



T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

BOOLE CEBİRİ ve LOJİK DEVRE SENTEZİ

2. BASKI

Prof. Yavuz AKSOY

$$1 + 1 = 1$$



T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

BOOLE CEBİRİ VE LOJİK DEVRE SENTEZİ

2. BASKI

Prof. Yavuz AKSOY

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN - EDEBİYAT FAKÜLTESİ

Bütün Hakları Saklıdır. © 2015, Yıldız Teknik Üniversitesi
Bu eserin bir kısmı veya tamamı, Y.T.Ü. Rektörlüğü'nün izni olmadan,
hiçbir şekilde çoğaltılamaz, kopya edilemez.

BOOLE CEBİRİ VE LOJİK DEVRE SENTEZİ

2. BASKI

Prof. Yavuz AKSOY

ISBN: 975-461-048-7

Y.T.Ü. Kütüphane ve Dokümantasyon Merkezi Sayı

YTÜ.-FE-DK-2015.0887

Baskı
Yıldız Teknik Üniversitesi
Basım-Yayın Merkezi-İstanbul
Tel: (0212) 383 31 30

Yıldız Teknik Üniversitesi Yönetim Kurulu'nun
08.01.2015 tarih ve 2015/01 sayılı Toplantısında Alınan karara göre
Üniversitemiz Matbaasında 200 (ikiyüz) adet bastırılan,
“Boole Cebiri ve Lojik Devre Sentezi” adlı
telif eserin her türlü bilimsel ve etik sorumluluğu yazarına aittir.

2.BASKI İÇİN

ÖNSÖZ

1850 li yıllardan itibaren başlayan Modern Bilim Çağı sürecinde, **Matematik** adeta yeniden oluşturuldu. XX.yy.da işe felsefe ve mantık da karışınca, matematik artık klasik tarzından ayrılmış, yeni yeni konuların ortaya çıktığı, farklı gelişmelerin yaşanmaya başlandığı yeni bir bilim konusu olmuştur.. Hilbert ve John Von Neumann ile başlayan bu süreçte Bertrand Russell, felsefe ile, matematiğin düşün dünyasını kurgulamıştı. Matematikçi Norbert Weiner ile Siberneik, Bourbaki Okulu ile Modern Matematik ve 1965 ten sonra da Azeri matematikçi Lütfi Asker Zadeh ile Bulanık Mantık (Fuzzy Logic), yeniden oluşan matematiğe yön veriyorlardı.

Matematikteki bu hızlı değişim yaşanırken, bir başka cephede **Teknoloji** ile ilgili olarak, bu sürecin matematiğe olan gereksinmesi şekillenmeye başlıyordu. 1948 yılında transistörün bulunması ile başlayan **elektronik** teknolojisi hızla gelişecek ve kısa süre sonra, **bilgisayar** teknolojisinin başlaması ve yapılaşması sürecine girilecektir. Bu öylesine hızla gelişen bir süreçtir ki 1980 li yıllardan itibaren neredeyse her on yılda bir kendini yenileme, yeniden dizayn etme gücüne erişmiştir. Saniyede on bin işlemden bir on yıl içinde saniyede bir milyon işlem sürecine ve 2000 li yılların başlarında da 3. kuşak olarak adlandırılan PC. ler saniyede bir milyar işlem gücüne erişmişlerdir. Bütün bu oluşumun gerek bilimsel ve gerekse mühendislik buluş ve uygulamaları, adeta dudak uçuklatacaktır. Bilimsel sınıflandırmada, **yapay bilim**ler tablosunda yer alan bütün mühendislikler, kendi dışındaki bir çok bilimsel alandan destek alarak kendi konularını oluştururlar. Örneğin tıp ve mimari de böyledir. Bu desteği sağlayan bilimsel alanların ilk sırasında ise **matematik** vardır. Bu alanlarda çalışanlar, konularına ait hesaplarını yapmak için bu tür bilimsel alanlardan yardım alırlar. Matematikteki bir çok konu da bu istekler doğrultusunda ortaya çıkmıştır.

George Boole ile **Modern Mantık** ortaya atıldıktan sonra, kurmuş olduğu cebir

onun adıyla anılacak ve ona **Boole Cebiri** denilecektir. Bu cebirin kuruluşunun temeli iki değerli mantığa dayandığından, bu cebire ait sayı sistemi de **iki tabanlı (binary) sayı sistemi** olacaktır. Böylece yepyeni bir matematiğin temelleri atılmıştır. Bu konu giderek kuramsal halde incelenecek, içinden yeni konular üretecektir. Bunlar sonunda geliştirilerek, bir teknolojik sürecin matematiğini oluşturacaklardır. Bu da **Lojik Devreler** olarak adlandırılan mantık devrelerinin bilimsel yorumlarını sağlayacaktır. Hatta bununla yetinmeyip ciddi hesap ortamı yaratacak ve pek çok işlemin matematik kavramlarla çözümlenmesini sağlamış olacaktır. Böylece **Lojik Devrelerin Sentezi**' ne ulaşılacaktır.

Kitabımızın konuları, yukarıda özetlenen bu gelişmelerin matematiğini içermektedir. Böylece elektronik teknolojisine giriş sürecinde gerekli matematik bilgileri hazır hale getirilmiş olmaktadır. Bir sonraki aşama ise artık mühendislik uygulamalarıdır.

Çağımızda **dijital (sayısal) sistemler** bu matematik ile dizayn edilmektedir. Bu o kadar yaygın hale gelmiştir ki, sadece bilgisayarlar değil, telefonlar, üretim teknolojisinde kullanılan robotlar, robot eller, akıllı makineler ve tüm kontrol sistemleri için geçerli bir savdır. Bu uygulamaların bir boyutu da **Sibernetik**'tir.

Kitabımızın baş tarafında **Modern Mantık** hakkında kısıtlı ama yeterli bilgiler verilmiş olacaktır. Çünkü daha sonraki konuların matematiği, bu mantıksal kavramlar üzerine inşa edilecektir. Bu nedenle, bu mantığın çok iyi anlaşılması ve öğrenilmesine gereksinme vardır. Sayılar teorisinin ilk ve temel bilgileri de yine kitabımızın konuları arasında yer alacaktır. Çünkü yeni bir sayı sisteminin analizini yapabilmek için klasik bilgilere gereksinmemiz olduğu yadsınmamalıdır. **Boole Cebiri** bu bilgiler yardımıyla geliştirilecek ve bu kez cebir bilgilerimiz konuya dahil edilecektir. **Boole Fonksiyonları** incelenirken, bu kez de fonksiyonlar hakkındaki bilgilerimizi burada kullanacağız. Böylece görülmektedir ki kaçınılmaz olarak, yeni kurgulanan bir matematik konusundan söz etmiş olsak da, önceden var olan bilgilerimize her an gereksinmemiz olduğu anlaşılmaktadır. Bu da matematiğin ne kadar derinlikli bir bilim disiplini olduğunu gösterir.

Komütasyon Cebiri oldukça yeni sayılan bir araştırma alanıdır. Mühendislik uygulamalarının, yoğun mantık ve matematik problemleri gibi algılanarak çözümleme süreçlerine girilmesi sırasında, matematiğe olan gereksinmenin düzeyini apaçık gösteren bir örnek oluşturmaktadır. Kitabımızın son konusunu olan bu cebir, sanırım matematiğin nerede bittiğini ve mühendisliğin nerede başladığını gösteren çok önemli bir örnek oluşturmaktadır.

Kitabımızın ilk baskısı 1000 adet basılmıştı ve bu tükenmiş durumdadır. İkinci baskı için kitap hazırlanırken baştan sona yeniden gözden geçirilmiş ve elektronik ortamda yayınlanabilir olması sağlanmıştır. Bu arada önceden tespit ettiğim birkaç küçük hata da düzeltilmiştir. Bütün bunlar zaman almıştır. Kitabın yeniden yayınlanmasıyla, ilgi alanı gerek Elektronik Mühendisliği, gerek Bilgisayar Mühendisliği, gerek Matematik Mühendisliği ve gerekse bizzat Matematik olanlar, sanırım kitabımızdaki bu bilgilere ulaşma şansını bulacaklardır.

Bu önsözden sonra gelmek üzere, gerek Modern Mantık'ın gerekse Boole Cebiri'nin kurucusu İngiliz matematikçi George Boole'ün bir portresine yer verilmiştir. Kitabın son bölümüne de bir sözcükler dizini konulmuştur. Bu tür dizinler, özellikle araştırma yapanlar için büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Ayrıca kitabın yazımı sürecinde kullanılan ve yararlanılan eserlerin bir listesi de son kısımda yer almıştır. Her kitabımızda olduğu gibi, *bilimsel etik* gereğince, kullandığım bütün yazılı eserler ya bu listede ya da sayfa altlarında dip not olarak belirtilmişlerdir.

Bu kitabın ilk baskısının hazırlanması sırasında önemli katkıları olan Yrd.Doç. Dr. Salih Karanfil ile (kızım) Mat.Yük.Müh. Neşe Aksoy'a teşekkürlerimi yine liyorum. Bu kitabın Yıldız Teknik Üniversitesi tarafından yayımlanması beni onurlandırmıştır.

Kitabımın ilk baskıda olduğu gibi ilgi ile karşılanacağını umarım. Bu duygu ve düşüncelerle kitabımı bilim ve teknoloji dünyasına sunuyorum.

Saygıyla ; sevgiyle ...

Beşiktaş, 14 Şubat 2014

Prof. Yavuz AKSOY



George BOOLE
(1815-1864)

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

BÖLÜM 1

TANITIM VE TEMEL KAVRAMLAR

- 1.01. Giriş (1)
- 1.02. XIX.Yüzyıldaki Çalışmalar (1)
- 1.03. Tarihçe ve George Boole (4)

BÖLÜM 2

ÖNERMELER MANTIĞI

- 2.01. Önerme ve Önermesel (9)
- 2.02. Basit ve Bileşik Önergeler (10)
- 2.03. Değilleme (13)
- 2.04. Denk Önergeler (13)
- 2.05. Satandart Biçim (Önerme Kalıbı) (14)
- 2.06. Bağlaçlar (15)
 - 2.06.01. Ve Bağlacı (15)
 - 2.06.02. Veya Bağlacı (15)
 - 2.02.03. Ya Da Bağlacı (16)
 - 2.02.04. Gerektirme (17)
 - 2.02.05. Çift Gerektirme (18)
 - 2.02.06. Bağdaşmazlık (19)
 - 2.02.07. Birlikte Değilleme (19)
- 2.07. De Morgan İlişkileri (19)
- 2.08. Bağlaçların Temel Bağlaçlar Cinsinden İfadeleri (20)
- 2.09. Bağlaçlara Ait Özellikler (20)
 - 2.09.01. Değişme (Komutatif) Özellik (20)
 - 2.09.02. Birleşme (Assosiyatif) Özellik (21)
 - 2.09.03. Dağılma (Distribütif) Özellik (21)

- 2.09.04. De Morgan (Değilleme) Özelliği (22)
- 2.09.05. Denk Güçlülük (Idempotent) (22)
- 2.10. Doğruluk Değeri Analizi (22)
 - 2.10.01. Totoloji (22)
 - 2.10.02. Çelişme (22)
 - 2.10.03. Geçerlilik – Geçersizlik (23)
 - 2.10.04. Tutarlılık – Tutarsızlık (23)
- 2.11. Doğruluk Değeri Analizi Yöntemleri (23)
 - 2.11.01. Doğruluk Değer Tablosu (Tablo Yöntemi) (23)
 - 2.11.02. Quinne Yöntemi (25)
 - 2.11.03. Analiz Yöntemi (28)
- 2.12. Mantıken Denk Polinomlar (29)
- 2.13. Mantıki Denklik Bağıntısının Özellikleri (34)
 - 2.13.01. Yansıma Özelliği (34)
 - 2.13.02. Simetri Özelliği (34)
 - 2.13.03. Geçişme Özelliği (34)
- 2.14. İndirgenmiş Biçimler (Dönüştürmeler) (35)
 - 2.14.01. Tam İndirgenmiş Biçim (35)
 - 2.14.02. Normal Biçime İndirgeme (36)
 - 2.14.03. Tam Normal Biçime İndirgeme (37)
 - 2.14.04. Tam Normal Biçime Dönüştürmede Tablo Yöntemi (38)
 - 2.14.05. Her Normal Biçim Tutarlıdır (40)
- 2.15. Açık Önergeler (41)
 - 2.15.01. Evrende Açık Önerme (41)
 - 2.15.02. Temel Problem – Doğruluk Değer Kümesi (41)
- 2.16. Nicelikli Önergeler (46)
 - 2.16.01. Evrensel Niceleme (46)
 - 2.16.02. Varlıksal Niceleme (46)
 - 2.16.03. Nicelikli Önergelerin Doğruluk Değeri Analizi (47)
 - 2.16.04. Nicelikli Önergeler İçin Açılım Yöntemi (49)
 - 2.16.05. Nicelikli Önergeler İçin Değilleme (50)
 - 2.16.06. Genel Nicelenmiş Önergeler (51)
 - 2.16.07. Bazı Temel Yasalar (53)

BÖLÜM 3

BOOLE ARİTMETİĞİ

- 3.01. Sayı Sistemlerinin Analizi (55)
- 3.02. On Tabanlı Sayı Sistemi (Desimal Sistem) (57)
- 3.03. Sayı Sistemlerinin Herhangi Bir Tabana Göre Çözümlemesi (60)

- 3.03.01. Yardımcı Teorem (60)
- 3.03.02. Teorem I (Varlık Teoremi) (61)
- 3.03.03. Teorem II (Teklik Teoremi) (65)
- 3.04. İki Tabanlı Sayı Sistemi (Binary Sistem) (68)
- 3.04.01. İki'lik Düzendeki On'luk Düzene Geçiş (70)
- 3.04.02. On'luk Düzendeki İki'lik Düzene Geçiş (71)
- 3.05. Diğer Sayı Sistemleri (75)
- 3.05.01. Diğer Sayı Sistemleri Arasında Taban Değiştirme (78)
- 3.06. On'luk Tabana Dönüştürmede Değişik Yöntemler (79)
- 3.06.01. Tam Sayılar İçin (80)
- 3.06.02. Kesirli Sayılar İçin (82)
- 3.07. On'luk Düzendeki Bir Sayının Diğer Bir Tabana Göre Yazılmasında Değişik Yöntemler (83)
- 3.07.01. Tam Sayılar İçin (83)
- 3.07.02. Kesirli Sayılar İçin (87)
- 3.07.03. Negatif Sayılar İçin (90)
- 3.08. İkili Sistemde Sayısal İşlemler [Toplama – Çarpma] (93)
- 3.08.01. Toplama İşlemi (95)
- 3.08.02. İşlemlere Özgü Özellikler (99)
- 3.08.03. Çıkarma İşlemi (100)
- 3.08.04. Çarpma İşlemi (103)

BÖLÜM 4

BOOLE CEBİRİ

- 4.01. Giriş (112)
- 4.02. Boolien Değerler (113)
- 4.02.01. Basit Boolien Nicelik [Sabit ve Değişken] (113)
- 4.02.02. Sıralama Bağlantısı (114)
- 4.02.03. Dualite (114)
- 4.02.04. Genel Boolien Nicelik (115)
- 4.03. İlk Tanımlar (115)
- 4.04. Aksiyomatik Tanım (119)
- 4.05. İşlemler (119)
- 4.05.01. Bütünleyici (120)
- 4.05.02. Toplama İşlemi (121)
- 4.05.03. Çarpma İşlemi (122)
- 4.05.04. Toplama ve Çarpma İşlemlerine Ait Özellikler (122)
- 4.05.05. De Morgan Formülleri (124)

- 4.05.06. Toplama ve Çarpma Arasında Dualite (124)
- 4.05.07. Birleşmiş Ayırma İşlemi (125)
- 4.06. Cebirsel Bağıntılarla Mantıksal Denklikler Arasındaki Benzerlik İlişkileri (126)
- 4.07. Önemli Teoremler (127)
- 4.08. Örnekler (133)
- 4.09. Alıştırma Problemleri (134)

BÖLÜM 5

BOOLE FONKSİYONLARI

- 5.01. Tanım (135)
- 5.02. Shannon Teoremi (136)
- 5.03. Ayırıcı Normal Form (138)
- 5.04. Tam Ayırıcı Normal Form (140)
- 5.05. Birleştirici Normal Form (142)
- 5.06. Tam Birleştirici Normal Form (143)
- 5.07. Fonksiyonun Bütünleyeni (144)
- 5.08. Tanım Tablosu (146)
- 5.09. Fonksiyonun Grafikle Gösterilişi (151)
- 5.09.01. Analitik Gösterilim (152)
- 5.09.02. Venn Gösterilimi (156)
- 5.10. Formların Birbirine Dönüştürülmesi (160)
- 5.11. Formların Dönüştürülmesinde Tablo Yöntemi (161)
- 5.12. Alıştırma Problemleri (164)

BÖLÜM 6

LOJİK DEVRELER

- 6.01. Giriş (166)
- 6.02. Temel Devre (169)
- 6.03. Ve Devresi (Seri Bağlama) (170)
- 6.04. Veya Devresi (Paralel Bağlama) (171)
- 6.05. Çarpma Devresi (171)
- 6.06. Toplama Devresi (172)
- 6.07. Ve-Veya Devresi (173)
- 6.08. Lojik Anahtar Çeşitleri (175)
- 6.09. Denk Devreler (177)
- 6.10. Ekonomik Devreler (181)

- 6.11. Köprü Devreler (182)**
- 6.12. Lojik Devre Problemleri (185)**
- 6.13. Alıştırma Problemleri (189)**

BÖLÜM 7

KOMÜTASYON CEBİRİ

- 7.01. Tanım Ve Temel Kavramlar (193)**
- 7.02. Komütasyon Değişkenleri (194)**
- 7.03. Hamming Uzaklığı (195)**
- 7.04. Cebirsel İfadelerin Standart Şekilleri (197)**
- 7.05. Sayısal Gösteriliş (208)**
- 7.06. Komütasyon Cebirinde Lojik Devre Sentezi (210)**
 - 7.06.01. Tek Çıkışlı Lojik Devreler (210)**
 - 7.06.02. Çok Çıkışlı Lojik Devreler (213)**
- 7.07. Alıştırma Problemleri (216)**

BÖLÜM 8

LOJİK DEVRELERİN İNDİRGENMESİ

[MİNİMİZASYON]

- 8.01. Giriş Ve Temel Kavramlar (220)**
- 8.02. Analiz Yöntemi (221)**
- 8.03. Asal Bileşenler (222)**
- 8.04. Tüm Asal Bileşenlerin Bulunmasında Quine-Mc Cluskey Yöntemi (223)**
- 8.05. Asal Bileşen Tabloları ve Boolien Yöntemi (227)**
 - 8.05.01. Baskın Sütun İşlemi (230)**
 - 8.05.02. Baskın Satır İşlemi (230)**
 - 8.05.03. Dallanma Yöntemi (234)**
- 8.06. Consensus Yöntemi (235)**
 - 8.06.01. Minimal Ayırıcı Normal Formun Consensus Yöntemiyle Bulunması (238)**
- 8.07. Quine-Mc Cluskey Yönteminin Uygulanmasında Farklı Bir Yaklaşım (240)**
- 8.08. Kafes Sistemi ve Petrick Yöntemi (247)**
 - 8.08.01. Kafes Sistemi (247)**
 - 8.08.02. Petrick Yöntemi (250)**

**8.09. Quine-Mc Cluskey Yönteminin Uygulamasında Uyulması
Gereken Temel İlkeler (253)**

8.10. Karnaugh Diyagramı (257)

8.10.01. Diyagramın Fonksiyonu Betimlemesi (257)

8.10.02. Karnaugh Diyagramında Bitişiklik İlkesi

**8.10.03. Minimumlaştırmanın Karnaugh Diyagramı Yardımıyla
Gerçekleşmesi (267)**

8.11. Keyfi Çıkış [D'ont Care] Koşulları (275)

8.11.01. Ve-Değil (NAND) Lojiği (278)

8.11.02. Veya-Değil (NOR) Lojiği (281)

8.12. Alıştırma Problemleri (284)

Dizin (287)

Yararlanılan Kaynak Eserler

BÖLÜM 1

TANITIM VE TEMEL KAVRAMLAR

1.1. GİRİŞ

Çağdaş Bilim sürecinde, son yüzyıl içinde, bu tür konuların işlenmesindeki temel amaç, ayrıntılara kadar inilerek, bütün bu bilgileri yönlendirmek ; tutarlı ve ayrıca uygulama yeteneği bulunan formel disiplinler oluşturmaktır. Daha sonraki aşamaysa, bu tür geliştirilen bilgileri, bilimin ve teknolojinin yararına sunmaktır. Konumuz ilerleyip geliştikçe görülecektir ki, özellikle son bölümde ortaya konan bilgiler ve bazı uygulamalar bizi, diğer bazı bilimlerin sınırına, diğer bir deyişle eşiğine getirmiş olacaktır. O andan sonrası artık, bu matematiği ya da bu formel mantığı kullananların işidir. Demek oluyor ki bu çalışma sırasında konumuzun içeriğini oluşturan **Cebir** ve onun ayrıntılarıyla ilgilenirken, diğer taraftan başka bilim dallarına ait matematiğin ya da bir tür cebirin temelleri atılmış olacaktır. Örneğin bir *komütasyon cebiri* ya da *integre devre kuramı* 'ndan söz edilmiş olacaktır.

Doğal gelişimi içinde **Mantıksal** ve **Matematiksel** oluşumlarını tamamlayarak artık işlenebilir, iş yapılabilir bir olgunluğa kavuşmuş olan bu yapılanmada, **Boole Cebiri ve Lojik Devre Sentezi** adı altında bir araya getirdiğimiz bu konuların bir bütünlüğü olduğu görülmektedir. Aritmetiğinden Cebirine ve Fonksiyonlarının analizine ve oradan uygulama alanları yoluyla *digital sistemin* ve dolayısıyla *makina dilinin* mantığına ve matematiğine ulaşmak böylece olanaklı hale gelmiş olacaktır. Bütün bu gelişmelerde, kuşkusuz, **Modern Mantığın** payı yadsınamaz bir gerçektir. Bu konuda özetlenmiş temel bilgiler, bundan sonraki bölümde verilmiş olacaktır. Ayrıca bu cebire özgü bir aritmetiğin varlığı bilinmekle birlikte, bu bilgileri sistematik bir tarzda toplayıp yorumlayarak, bu aritmetiğe yeni bir boyut kazandırılmaya çalışılmıştır.

1.2. XIX. YÜZYILDAKİ ÇALIŞMALAR

Gerek felsefe ve düşün dünyasında gerekse matematik ve mantık gibi soyut bilimlerde hızlı bir gelişme süreci yaşanan XIX. yüzyıl, bu konularda, hiç de

önceki yüzyıllara benzemiyordu. Hemen her alandaki çalışmalar öylesine önemli ve devrimler yaratacak nitelikteydi ki, bilimin rotasının ne yöne doğru çevrileceği adeta merak konusu olmuştu. XVIII. yüzyılın daha ortalarında ünlü Alman filozofu ve mantıkçısı **Immanuel KANT (1724-1804)** yeni bir mantıktan ve önermelerden söz etmektedir. O bir yüzyıl sonraki mantığın temellerini atmaya başlamıştır bile.

Önce akıllı kendisine konu edinen Kant, bundan çıkardığı sonuçlarla ulaştığı noktada ilginç olduğu kadar önemli bir görüşün sahibi olmuştu. Gerçekte O'na yön veren Copernic ' dir. Copernic şöyle diyordu :

- Yıldızların , dünyamızın çevresinde döndüklerine inanırsam, gök olaylarına bir çözüm getiremiyorum. Öyleyse bir de aksini düşüneyim , bunu deneyeyim. Dünyamızın , onların çevresinde döndüğü inancıyla gök olaylarına bakayım ; olanları buna göre eleştirip, yorumlayayım !

Kant'a ışık tutan bu görüş ve yorum şekli, O'nun da akıllı yönlendirmede başka türlü düşünülebilmesi için yol gösterici olmuştu. O da kendi felsefesini ve dünya görüşünü şöyle oluşturdu :

- Bilgimiz, dışımızdaki nesnelerden gelenlerle düzenleniyor inancına kapılarak, metafizik olaylara bir çözüm getirmek olanağı bulunamıyor. Bir de tersini deneyeceğim. Dışımızdaki nesneler , bilgilerimizden gidenlerle düzenleniyor inancıyla bakacağım metafizik olaylara !

Böylece Kant ile başlayarak gözlem yasalarında önemli bir görüş farkı oluştu. Bu yaklaşım diğer konularda da etkisini gösterdi ve artık bilim adamları kendi alanlardaki çalışmalarda düşünceyi tekdüze sürdürmenin ötesine geçmiş oldular. Kant onlara öylesine ışık tuttu ki felsefe ve mantık dahi bundan etkilendi. Kant'a göre her bilgi bir yargı demektir ; ancak her yargı bir bilgi değildir. Edindiğimiz bilgilere yön veren ve onlara birliktelik kazandıran yeteneklerimiz vardır. Bunlar şöyle sıralanabilir :

1. Duyarlılık ; 2. Anlık-Sağduyu ; 3. Akıl (Us).

Bunlar yardımıyla duyularımızı kontrol edebilir ve onlardan gelecek mesajları değerlendirebiliriz. Ancak ne yönden bakılırsa bakılsın, gelecek mesajlar daima *zaman* ve *ortam (mekan)* boyutlarını içerecektir ; içermelidir. Duyumlar iki tür mesaj alır : biri dıştan gelen , diğeri içten gelen ...

Edindiğimiz zaman ve ortam tasarımlarını yok saymamız olanaksızdır. Çünkü onlar düşünmemiz için zorunludur. Kant'a göre bu zorunluluk, bunların bün-yemize ve an'lık oluşumumuza ait olmalarındandır.

Kant analitik öncüllerden, doğruluğu kesin sentetik önermelerin elde edilemeyeceğini gören ilk bilgidir. Ona göre, doğruluğu kesin sentetik önermelere ancak yine doğruluğu kesin sentetik önermelerden hareket edilerek varılacaktır. Kant, sözünü ettiği bu tür önermelere *sentetik a priori* adını vermiştir.

Kant geleceğin bilim ve fikir dünyasının temellerini atarken daha çok empirik bilimleri gözönünde tutuyor ve felsefesinin esasını Newton Fizikine göre yönlendiriyordu. Oysa daha sonra, Newton yasasının eksikleri, yanlışları görülecektir. Bu da doğal olarak Kant felsefesine karşı bazı eleştiriler için ortam hazırlamıştır. Ancak neresinden bakılırsa bakılsın, Kant geleceğin mantığının oluşmasında, düşünce aşamasında, temelleri oluşturmuş bulunmaktadır.

Düşünce aşamasından etkinlik aşamasına geçilirken önemli bir ad olarak, bir Alman düşünür ve filozofu olan **Gottlieb FICHTE (1762-1814)**'yi görüyoruz. O, Kant felsefesi hakkında yaptığı eleştirisinde, Kant'ın üç buyruğunu tek bir buyruk olarak toparlamış ve bunu " *vicdanına göre davran !* " şeklinde özetlemiştir. Ünlü Alman yazarı **Goethe**'nin görüşünden hareketle Fichte'nin felsefesi " *birşeyler düşünmek için değil, birşeyler yapmak için yaşıyoruz.* " şeklinde ifadesini bulmuştur. İşte bu düşünce Kant'tan sonra yeni bir çılgır başlatmıştır. İşte burada ortaya önemli bir ad **HEGEL** çıkmaktadır.

O da bir Alman düşünürü ve filozofudur. **Wilhelm Friedrich HEGEL (1770 - 1831)** *diyalektik felsefe'nin* temellerini atan kişi olarak tanınır. Çağdaş diyalektik felsefede *tez - antitez - sentez* kavramı yeni yeni oluşumların ve düşünce akımlarının ortaya çıkmasına ve farklı bir biçimde tartışılmasına olanak sağlamıştır. Bu felsefede *çelişki* de önemli bir unsur olarak görülmektedir. Artık sadece *doğrulama bağlamları* ile değil *çelişme* ile de doğrulama yapılabilecektir. Bu anlayış karşıt ya da zıt fikirlerin de tartışma içinde yer almasına olanak sağlamaktadır. Öyleyse *Hegel Felsefesi* olarak da adlandırılan *Varoluşuluk* bu içeriğiyle *Modern Mantığın* fikir düzeyinde ilk bilgilerini oluşturmaya başlamıştır bile... Böylece bir *dinamik diyalektik* oluşmuştur.

Aristoteles Mantığının iflasından sonra yeni bir mantık arayışı XV. ve XVI. yüzyıllardan itibaren başlamıştır. Ünlü Fransız filozof ve matematikçisi ve *Analitik Geometri*'nin kurucusu **René DESCARTES (1596-1650)** bu boşluğu

ortaya koyduğu *Metodoloji* ile aşmayı başarmıştır. Bu yöntem, Modern Mantığın ortaya çıkmasına kadar geçen yaklaşık iki yüzyıl içinde bilimin gelişmesine önemli katkılarda bulunmuştur. Temel ilkeleri günümüzde dahi kullanılmaktadır. Bu aşamada yeni bir mantık arayışına **Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1717)**'in de önemli katkıları olmuştur. En azından fikir babalığını yaptığı söylenebilir. İşte adım adım gelişmeler ve yeni bir mantık arayışının George BOOLE öncesindeki dalgalanmaları bu şekilde görülmektedir.

Bu dönemin önemli bir gelişmesi de *Kümeler* ile ilgilidir. Giderek *Aksiyo-matik Sistem*, bilimde yerini almaya başlamıştır. Yüzyıllardır ne olduğu bilinmeden ve doğadan alındığı gibi kullanılan pek çok soyut ya da nesnel olgular, çözümlenmeye ve yeniden yapılandırılmaya başlamıştır. İşte bunlar arasında sayılar da vardır. XIX. yüzyıla gelindiğinde **Bolzano** , **Dedekind** , **Peano** ve **De Bois Reymond** gibi matematikçiler sayılar ve kümelerle ilgilenmişler ve bazı aksiyomatik tanımlar yapmışlardır. Daha sonra, kümeler kuramında gelişmişliği simgeleyen **Georg Ferdinand Ludwig Philip CANTOR (1845 - 1918)** görülmektedir. *Sınırlı olmayan kümeler kuramı* ile *iyi sıralı kümeler kuramı*'nı çağdaş bir yaklaşımla sunan O'dur. Ancak bu çağdaş yorum ve açıklamalara karşın yine de bir çok *paradoksal durum*'un ortaya çıkması kaçınılmaz olmuştur.

1904-1908 yılları arasında **Zermelo** , kümeler kuramının ilk *aksiyomlar sistemi*'ni oluşturarak, bu konuda bir çok ikircikli durumun giderilmesine katkıda bulunmuş ; bu kuramın matematiksel bir yapıya kavuşmasında öncü olmuştur.

Buraya kadar yapılan açıklamalardan çıkarılabilecek sonuç olarak, görüyor ve düşünüyoruz ki *Modern Mantığın* ve *Boole Cebiri*' nin kurucusu **George Boole**, işte böyle bir ortamda kendini bulmuş ve kuşkusuz bütün bu oluşum ve gelişmelerden etkilenmiştir. Ayrıca aynı ülkeden meslektaş ve aynı konularda çalışmalar yapan ünlü bir mantıkçı olan **De MORGAN** da bu konularda oldukça mesafe almış görülmektedir. Demek ki gerçekte **Boole** pek de yalnız sayılmaz. Ancak yine de bu gibi önemli aşamalarda bir lider yani bir sürükleyici gerekmektedir ki işte bu görevi de **Boole**' ün üstlendiği görülmektedir.

1.3. TARİHÇE ve GEORGE BOOLE

Boole Cebiri' nin de bir tarihçesi vardır ya da böyle bir tarihçe yazılabilir. Ancak görülmektedir ki bu tarih, bu cebirin kurucusu olan **George BOOLE (1815-1864)** ' ün yaşam öyküsünden fazlaca soyutlanamaz. Çok ayrıntılara

girmeden konu özetlenirse ; ortaya çıkışı, gelişmesi, uygulamada yerini alması ve diğer bilim dallarına olan katkısı ve onları ne şekilde etkilediği ve hatta yeni bilgi alanlarının ortaya çıkışı gibi farklı aşamalar, gözler önüne serilmiş olacaktır. Doğal olarak bu, başlangıçta, Boole'ün yaşam öyküsü ile koşut bir gelişme gösterecektir. George BOOLE' ün yaşam öyküsünü aşağıda bulacak-sınız. Böylece bir dahinin tanınmasına katkıda bulunulduğu inancıyla O'nun bulabildiğim güzel bir portresini de kitabın başına koyarak, kendisi hakkında iyi bir tanıtım yapılmış olduğu kanısındayım.

William Rowan HAMILTON (1805-1865) İrlanda'nın yetiştirdiği en ünlü matematikçilerden biridir. Konumuzla ilgisi De Morgan ile olan çekişmesidir. Modern Mantığın kurucularından biri olan **De MORGAN (1806-1871)** ciddi ve güler yüzlü, yumuşak karakterli insan ilişkileriyle tanınan ; sevilen, sayılan bir kişidir. O filozof kişiliğiyle de öne çıkmıştır. Hatta Hamilton O'nun için :

- Eğer M. de Morgan daha ufak çapta bir matematikçi olsaydı, herhalde daha büyük bir filozof olabilirdi,

demektedir.* Aynı Hamilton daha sonra Morgan hakkında iftirada bulunacak ve aralarında önemli bir tartışma başlayacaktır. Hamilton, De Morgan'ı kopyacılıkla suçluyordu. De Morgan tartışmayı büyütmemek için alçakgönüllü davranırsa da Hamilton aşırı yaklaşımla aksine olayı körüklüyordu.

Bu tartışmayı izleyen biri vardı : George Boole. O, tam bu sıralarda bir lisede matematik öğretmenidir. De Morgan'ın haklı olduğunu görmektedir ve O'nun alttan alışını da hazmedememektedir. Konuya oldukça egemendir ve artık bu olayın hakemliğine soyunma zamanı gelmiştir. Bu düşüncelerle, karşı fikri oluşturmak üzere ciddi olarak çalışmalara başlar. *The Mathematical Analysis Of Logic (Mantığın Matematiksel Çözümlemesi)* adını verdiği kitabını (tezini) bir yıl sonra tamamlar ve yayımlar. Yıl 1848 dir. Böylece Boole hakemlik görevini tamamlar ve De Morgan'ın haklılığını kanıtlar.

Bu öykü, sanki kişiler arasında sıkışmış gibi görülmesine karşın, sonucu itibarıyla yepyeni bir mantığın ortaya çıkmasına ve adeta bir devrim yaşanmasına neden olmuştur. Bu *Modern Mantığın* kuruluş çalışması ve aşamasıdır.

(*) Eric Temple BELL , **Büyük Matematikçiler Cilt II**

Çev. : İnönü,İşmen,Akova,Demirgüç ; M.E.B.Yayını, 1947 , s. 142

Bu eser ve George Boole kısa süre içinde ünlü olmuş ve hemen ertesi yıl Boole'e Üniversiteden teklif gelmiştir. Bunu değerlendiren Boole, akademik çalışmalara yönelebilmek için bunu olumlu karşılamış ve kendisini kısa süre içinde İrlanda'da yeni açılan bir kolejde, Queen's College'de matematik öğretmeni olarak buluvermiştir. O artık bir Üniversite öğretim üyesidir ve nitekim çok geçmeden profesör de olmuştur. Yıl , 1849 dur.

Tam bir akademik kimliği benimseyen Boole, durmadan çalışır ve eserler vermeye devam eder. Bunlar arasında , *Boole Cebiri'* nin de kuruluşunu içeren biri oldukça ses getirmiştir. *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilites (Mantık ve Olasılıkların Matematiksel Kuramlarının Dayandığı Düşünce Yasaları Hakkında bir Araştırma)* adını taşıyan bu eser, ilkinden daha da ünlü oluyor ve yepyeni bir mantığın ve cebirin müjdesini veriyordu. O güne kadar düşünce ve tartışma ötesine geçemeyen bu mantık, artık bir tamlik içinde gerçek olarak kurulmuş oluyor ve bilimin hizmetine sunuluyordu.

Modern Mantık ya da *Sembolik Mantık* olarak adlandırılan ve tam bir matematiksel düzene kavuşmuş olan konuların disipline ediliş şekli elbette bir matematikçinin elinden çıkmalıydı. İşte bunun şerefi önce De Mogan'a sonra da ve esas olarak G.Boole'e nasip olmuştur. İşte bu nedenledir ki bu mantığa dayalı olarak ortaya çıkan bu cebire de *Boole Cebiri* adı verilmiştir. Bu kitap, bu cebiri ve daha sonraki çalışmalara bağlı olarak ortaya çıkan gelişmeleri derlemek ve açıklamak amacıyla kaleme alınmıştır. Kitapta, Boole'ün gerçek çabasının ve emeğinin ne denli önemli olduğu çok iyi anlatılmıştır.

George Boole 8 Aralık 1864 günü, elli yaşındayken öldü. O, bir süre önce vereceği bir konferansa yetişmek üzere, şiddetli bir yağmur altında koşuştururken zatürriye olacak ve o zamanların bu amansız hastalığından bir türlü kurtulamayacaktır. O' nun ölümünden sonra, hem hayranı hem öğrencisi olan eşi Marie Everest, Boole'ün koyduğu bazı ilkeleri devam ettirdi ve özellikle çocuklarının yetişmesinde uyguladı. Bu ilkelerin ; çocukların eğitimini insani- leştirmek ve rasyonelleştirmek gibi temel öğeleri vardı ki bu bilgi ve önerileri içeren bir kitabı eşi Everest kaleme alıyor ve bu küçük kitapçığı *Boole's Psychology (Boole Psikolojisi)* adıyla yayımlıyordu. Çok ünlü bir matematikçi olan çağdaşı Henri Poincaré (1854 - 1912) O'nun için şöyle diyordu :

- Bu sığfata hak kazanmış bir bilgin, özellikle bir matematikçi çalışırken bir sa-

nat adamının izlenimlerini duyar, duyduğu haz onunki kadar yüksek ve aynı özelliktedir.

Boole Cebiri tam anlamıyla sembolik mantığın devamı olma özelliği göstermektedir. İkili (dual) yapı bu sistemin temel taşıdır. Her kuram ve her yaklaşım bu sistem üzerine oturtulmuştur. Konu işlenirken bu husus bütün açıklığı ile ortaya çıkacaktır. Hatta bu, aritmetik, cebir ve fonksiyonlar aşamasında tam olarak yaşanacaktır. Hem mantık hem de cebir ilişkisinde tam bir *tutarlılık* vardır. Ayrıca bu mantık, aksiyomatik bir tanımla ortaya konulduğundan, aksiyomlar değişmediği sürece, tam bir matematiksel gelişim süreci oluşmaktadır.

Bu yaklaşımın felsefe boyutuna gelince... Burada Aristoteles'in *Klasik Mantığı* ile karşılaştırıldığında, daha önce de ifadesini bulan gerekçelerle, tükenmiş bu mantık yerine böyle yetkin bir yenisini koymak, hem felsefe dünyasını hem de bilim dünyasını bir süre oyalayacaktır. Gerçekten de Boole mantığının öyle hemen benimsenip yaşama geçirildiği sanılmamalıdır. Bu mantık, gerçekten anlaşılır ve uygulamaya konur hale gelinceye kadar yaklaşık elli yıl geçmiştir.

Mantıkla matematiğin temelde özdeş olduğu, matematiğin gerçekte mantığın, nicel uygulamalarda gelişen kolu sayılabileceği şeklindeki görüş ünlü iki matematikçiye aittir.* Çağımızın matematikçileri **Bertrand RUSSELL (1872 - 1970)** ile **Alfred N. WHITEHEAD (1861 - 1947)** bu görüşte birleşerek, *Modern Mantığın* ve dolayısıyla *Boole Cebiri*'nin yaşama geçmesine katkı veriyorlardı.

Bu yaklaşım ve tam bu yıllarda matematikte ve teknolojiideki bazı gelişmeler de birbirini tamamlayınca, Boole'ün yaptığı işin hiç de yabana atılır bir şey olmadığı kısa sürede anlaşılabilir uygulamaya konulmaya başlandı. Özellikle XX. yüzyılın henüz başlarında, elektronik hesaplayıcılara geçiş aşamalarının yaşanmaya başlanması ve bu yönde yapılan çalışmalar, bu cebirin önemini günden güne artırıyordu. Örneğin yüzyılın matematikçisi olarak nitelenen **John Von NEUMANN**'ın 1905 yılında makara bantları bilgisayarlara uygulaması sonucu ortaya çıkan gelişim bir devrim kabul edilmiştir. Nümerik Analiz'in icadı yolu ile matematiği makinaya uyarlama düşüncesi, beraberinde

(*) Hans REICHENBACH, **Bilimsel Felsefenin Doğuşu**

Çev.: C.Yıldırım ; Remzi Kitabevi , 1979, s. 150

farklı hesap tekniklerini zorunlu kılmış ve matematik XX. yüzyıldan başlayarak artık bu yolda gelişmeye başlamıştır. Önemli sayılacak kadar da mesafe alınmıştır. Ancak bu yolla yapılacak hesapların da nicelik yönü artmıştır.

1947 yılında, ABD'de üç teknisyen bir özel çalışmaları sırasında, bir rastlantı sonucu *Transistörü* bulmuşlardır. Bu uzmanlar John BARDEEN (1908-1991), Walter Houser BRATTAIN (1902-1987), William SHOCKLEY (1910-1989) dir. Bell Telefon firmasında çalışan bu uzmanların transistörü bulmalarıyla bir devrim yaşanmıştır. Artık basit bir enerji ile büyük enerjilere ulaşmak olanaklı idi ve bu oldukça ucuz ve kolay elde edilebiliyordu. Ayrıca ısı gibi bir sorunu da yoktu. Ana maddesi *germanium kristalleri* olan ve daha sonraki gelişme süreci içinde silikonların kullanılmaya başlamasıysa başka bir başarı aşamasını temsil ediyordu. Bu üç uzman , bu başarıları nedeniyle , 1956 yılının Fizik da-lındaki Nobel ödülünü paylaşacaklardır.

Bu aşamalardan sonra teknolojinin hızı gözle görülür bir biçimde değişmiş ve artık enerjinin yönlendirilebilmesi ve kontrolü nedeniyle özellikle *elektronik* dünyasında yeni bir devir başlamıştır. İşte bu yıllarda, bu aşamada, kuramsal olarak *Boole Cebiri* gerekli olan matematiği vermiş ve teknoloji de bu mantığa dayalı *digital sistem* üzerine oturan teknolojiyi sürdürüp, geliştirmiştir. Bunun sonuçları ve ürünleri çok kısa sürede ortaya çıkmış ve çok duyarlı ve ömürlü aletler ve cihazlar üretilebilmiştir. Demek ki bütün bu sürecin bir ucunda görüldüğü gibi, bu iş için gerekli alt yapıyı bilim ve felsefe düzeyinde *Boole Cebiri* sağlamıştır. Bu savla ilgili açıklamalar, bu kitabın konularını oluştur-maktadır.

Modern Mantık bu yeni cebirin alt yapısını oluşturmaktadır. Gerçi bütün olarak ele alındığında, bu mantığın tüm konularını ve ayrıntılarını kullanmamız söz konusu edilmeyebilecektir. Oysa *Önermeler Mantığı* başlığı altında toplanan konular bir bütün olarak, Boole Cebiri'ni yönlendirebilmektedir. İşte bu nedenle bundan sonraki bölümün *Önermeler Mantığı*'na ayrılması doğal karşılanmalıdır. Ayrıca şu da belirtilmelidir ki, burada yapılacak açıklamalar ve anlatım, konu için gerekli ve yeterli ölçüde ifade edilecek ve örneklenecektir.

BÖLÜM 2

ÖNERMELER MANTIĞI

2.1. ÖNERME - ÖNERMESEL

Bir iddia (sav) içeren ve sadece *doğru* ya da *yanlış* olarak değerlendirilebilen tümcelere **önerme** denir. Eğer bu iddia (sav)' nın *doğru* ya da *yanlış* olarak değerlendirileceği kesin olmakla birlikte, başlangıçta buna karar verilemiyorsa bu tümceler **önermesel** adını alır. Önerme ya da önermeseller p , q , r , ... gibi harflerle temsil edilirler. Örneğin,

p : İstanbul, Türkiye'nin nüfus yoğunluğu bakımından en kalabalık ilidir.

q : $3 > 8$

r : Ali öğrencidir.

s : Dondurmayı çok seviyorum !

t : Benimle oynamak ister misin ?

gibi ifadeler üzerinde çalışılırsa ; bunlardan p , q ile gösterilenlerin birer önerme olduğu görülmektedir. p , Doğru ; q , Yanlış olan birer önermedir. Bunlardaki yargı, önceki bilgilerimize göre kesindir. Ancak r ile gösterilen önerme, bir sav olmakla birlikte, Ali' nin kim olduğu ayrıca tanımlanmış olmadığından, bu savın doğru ya da yanlış olarak değerlendirilmesi ancak ve ancak Ali tanındıktan sonra kesinleşecektir. Ama yine de doğru ya da yanlış olacağı bilinmektedir. İşte bu nedenle r bir önerme değil bir önermeseldir. Ancak önermeler mantığının esas amacı *önermeselleri* incelemek olduğundan, genelde önerme deyimi, bu açıklamalar ışığında önermeselleri de kapsayacaktır. Yani önerme denilince, önermeselleri de birlikte düşündüğümüz anlamı çıkacaktır.

Önermelerin doğru oluşu D ; yanlış oluşu Y sembolü kullanılarak gösterilir ve bunlara *doğruluk değerleri* denir. Bir önermenin (önermeselin) doğru ya da yanlış oluşu, onun *temel özelliği'* dir. Yukarıdaki açıklamalar ışığında örneklerimiz için ; $p = D$, $q = Y$ yazılacaktır. r nin değerlendirilmesi ise daha farklı olur. Bunu aşağıda izliyoruz. Bunlardan ikincisi daha çok kullanılan şeklidir. Buna *durum tablosu* denir.



s ve t ile gösterdiğimiz ifadeler gelince ... Görülüyor ki s ile bir istek belirtilmiş , bir sav ortaya konulmamıştır ; t ile bir soru yöneltilmiş yine bir sav oluşmamıştır. Öyleyse bunların, bir iddia içermedikleri için bir doğruluk değeri de olmayacaktır. Yani bunlar bir önerme değildir. Bir de önerme gibi görülmesine karşın doğruluk değeri belirlenemediği için önerme sayılamayacak tümceler oluşabilmektedir. Bunlar henüz araştırma aşamasında, kesin sonucu alınmamış bazı bilimsel yargılar için kurulmuş tümceler olabileceği gibi, aşağıdaki örneğimizde olduğu gibi, yapay olarak da düzenlenmiş tümceler olabilecektir.

u : Köpek koşarken gökyüzünü sarı görür.

Görünüşte sav vardır ancak bunu değerlendirebilecek hiçbir bilgi yoktur. Aksini iddia etmek de doğru değildir. Yani koşarken köpeğin gökyüzünü sarı görüp görmediğini kimse bilmemekte ve yanıtlayamamaktadır. Öyleyse bu savın *doğru* olduğu söylenemeyeceği gibi, *yanlış* olduğu da söylenemeyecektir. Demek ki bu önerme gibi görülmesine karşın bir doğruluk değeri olamayacaktır. Bir önermenin *temel niteliği* olan doğruluk değeri ancak bir tanedir ve o *doğru* ya da *yanlış*' dan biridir. Demek ki u ile temsil edilen ifade, doğruluk değeri alamadığı için bir önerme sayılmayacaktır. Eğer bir gün bu savın içeriğine ait bilgi oluşursa ve koşarken köpeğin gökyüzünü ne renk gördüğü kesin ve kanıtlanmış bir bilgi haline gelirse, o andan itibaren artık u savı, önerme niteliğine kavuşmuş olacaktır.

2.2. BASİT VE BİLEŞİK ÖNERMELER

Birden çok sayıda önermenin, *bağlaçlar* ya da *eklemler* adı verilen mantıksal değişmezler yardımıyla, biraraya getirilerek oluşturulan mantık ifadelerine, *bileşik önermeler* ya da *önerme polinomları* denir. Bunlara bazen *moleküler önermeler* denildiği de olmaktadır. Bunlar genel ifadeleri temsil eder ve bağıntı ifadeleri olarak nitelenebilir. Oysa tek bir savdan ibaret ve dolayısıyla tek bir doğruluk değeriyle değerlendirilen önermeler *basit önerme* adını almaktadır. Bunlara *atomsal önermeler* denildiği de olmaktadır. Bunlar özellik ifadeleri olarak nitelendirilebilir.

Önerme sayısı arttıkça, bunların alacağı doğruluk değerlerine bağlı durumlar da çeşitlenmektedir. Bu çeşitlenme bir kurala göre olmaktadır. p gibi bir önerme için iki durum oluşur. Bu önceki alt-bölümde açıklanmıştır. Önerme sayısının iki ve üç olması halleri değişik biçimlerde aşağıda gösterilmiştir.

2^n kuralına göre gerçekleşecek bu durumlarda $n = 2$ için :

p	q		
D	D	D	D
D	Y	↗	↗
Y	D	↘	↘
Y	Y	Y	Y

olarak gerçekleşir. $n = 3$ için :

p	q	r		
D	D	D	D	D
D	D	Y	↗	↗
D	Y	D	↘	↘
D	Y	Y	↗	↗
Y	D	D	↘	↘
Y	D	Y	↗	↗
Y	Y	D	↘	↘
Y	Y	Y	Y	Y

oluşacaktır. Burada da sekiz farklı durumun olduğu görülmektedir. Tablodaki sekiz durumun karşılığı yanda çizelge halinde düzenlenmiştir. Burada da dördü D için dördü de Y için olmak üzere sekiz farklı durumun oluşum yasası açıklanmış olmaktadır. Eğer devam edilmiş olsaydı, anlaşılıyor ki $n = 4$ için onaltı farklı durum, $n = 5$ için otuziki farklı durum oluşacaktır ve önerme sayısı arttıkça bu durumların sayısı da ikinin kuvvetlerine göre artacaktır.

Tablo halinde düzenlenmiş durumları gösterir çizelge *durumlar tablosu* adını alır ve uygulamada en çok bu yazış biçimi kullanılır. Bu tablo oluşturulurken pratik olarak uyulması gereken bir kural vardır ki o da şudur :

n önerme sayısı olduğuna göre, işe başlarken kural gereğince farklı durumların (grupların) sayısı baştan belirlenebilmektedir. Yukarıda ifade ettiğimiz gibi $n=1$ için 2 ; $n=2$ için 4 ; $n=3$ için 8 ; $n=4$ için 16 ; ... durum oluşacaktır. $p, q, r, \dots$ için düzenlenecek sütunların ilkinde durum sayısının yarısı kadar D ve yarısı kadar Y altalta sıralanır. İkinci sıradaki önerme için, ilk sıralama D ve Y ler için paylaştırılarak bu kez D lerin ilk yarısı yanlarına D ikinci yarısı yanlarına Y yazılır. Y için oluşan düzen için de aynı paylaşım kuralı uygulanarak, ilk yarı Y grubu için D, ikinci yarı Y grubu yanına da Y yazılarak ikinci önerme için doğruluk değerleri dizilmiş olur. Sonra gelen önerme için yarılama sistemi devam ettirilerek ve iki ile bölüştürülerek D ve Y değerleri dağıtılır. Sonuncu önermeye gelindiğinde artık D den başlayarak D ve Y değerleri mutlaka ardışık olarak sıralanacaklardır. Böylece atlanmadan, ne eksik ne de fazla bir durum yazılmış olacağından hatasız bir tablo düzenlemesi yapıldığı kesin olarak söylenecektir.

Örneğin $n=3$ için sekiz durumun olduğu, onun için düzenlenmiş olan tabloda görülmektedir. $n=3$ olması p, q, r gibi üç önerme için bu tablonun düzenlendiğini anlatmaktadır. Yukarıda açıklanan kural gereğince, 8 in yarısı olarak p nin altına önce 4 tane D sonra da 4 tane Y değeri yazılacaktır. q önermesine geçildiğinde, önceki sütunda oluşan D lere bakarak önce 2 adet D sonra 2 adet Y yazılacaktır. Alttaki Y ler için de aynı şeyler yapılacak ve önce ilk ikisi için D sonra da diğer ikisi için Y yazılacaktır. r önermesine gelince, o sonuncu önerme olduğundan, doğruluk değerleri D den başlayarak D , Y olarak altalta sıralanacaktır. Bu sıralanış aynı zamanda bir önceki sütunda oluşan değerlerin ikili paylaşımına da uyumlu olacaktır.

Boole Cebiri çalışmaları sırasında bu tablolar çok kullanılacaktır. Her ne kadar orada D yerine 1 ; Y yerine 0 kullanılacak da olsa, lojik yapı ve oluşum kuralları değişmeyecektir. Demek ki bu çalışma, sadece *önermeler mantığı* için gerekli değil, konumuzun temel çalışmaları için de önemli bir malzeme oluşturacaktır. Bu nedenle daha baştan itibaren bu ayrıntıların iyi saptanmasında yarar vardır. İlk bakışta o kadar önemli görülmeyen bu konuda, kuralsız çalışılırsa, n nin büyük olması halinde, hatasız bir yazımı sağlayabilmek oldukça güç olur.

Boole Cebiri incelenirken görülecektir ki, modern mantığın dual yapısı orada da aynen geçerlidir. Bu *ikililik düzeni*, kullanılan sayılardan tutun, operatörlere kadar yansıyacaktır. Bilinmektedir ki bu cebire özgü operatörler sadece *toplama* ve *çarpma*' dan ibarettir.

Bunun anlamı, bağlaç sayısı ikiden fazla olsa bile, esas olarak bu iki bağlaç tüm modern mantığa egemendir. Bunlar VE ile VEYA bağlaçlarıdır ki aşağıda ayrıntılı olarak incelenmektedirler. Ancak daha önce diğer bazı kavramlardan söz etmek gerekecektir.

2.3. DEĞİLLEME

p gibi bir önermenin *değil*'i denilince, p önermesi D değerinde olunca Y değerini alan, Y değerinde olunca D değerinde olan bir önerme anlaşılır ki buna p önermesinin *değili* denir ve

$$\sim p, \neg p, \bar{p}, p'$$

gibi gösterim şekilleri kullanılarak ifade edilir. Modern mantıkta ilk sembol kullanılmakla birlikte, Boole Cebiri konusu işlenirken sonuncu gösterimin kullanılması daha uygun olmaktadır.

p	$\sim p$	Bu tanıma uyan doğruluk değerleri düzenlemesi yandaki tabloda görülmektedir. Buna göre doğruluk değerleri arasında
—	—	
D	Y	
Y	D	$\sim D = Y$; $\sim Y = D$

ilişkilerinin oldukları yazılabilecektir.

2.4. DENK ÖNERMELER

P ve Q gibi iki önerme polinomunun aynı doğruluk değerleri için değerlendirilmesi durumunda her iki önerme polinomu da daima aynı değerleri alıyorsa bu iki önerme polinomuna *denk polinomlar* denir. Bu durum $P \equiv Q$ yazılarak gösterilir. Buna *denklik bağıntısı* denilecektir.

Örneğin bir önceki alt-bölümde p ye bağlı olarak $\sim p$ önermesi tanımlanmıştır. $\sim p$ önermesi yeniden değillenirse kolayca görülür ki elde edilecek doğruluk değerleri p ile aynı olacaktır. Gerçekten de,

$$\sim(\sim D) = \sim Y = D \quad ; \quad \sim(\sim Y) = \sim D = Y$$

olarak bu iddia kanıtlanmaktadır. Buna göre, bir bütünlük içinde

$$\sim \sim p \equiv p$$

yazılabilecektir ki işte bu bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya özel olarak *çift değilleme bağıntısı* adı verilir.

2.5. STANDART BİÇİM (ÖNERME KALIBI)

Modern Mantık bilimsel düşüncüyü ve bunun içinde yargıyı modelleyen bir anlayışa sahiptir. Önerme tanımı da buna uygun olarak yapılmıştır. Bir düşüncedeki yargı sayısı arttıkça, bunların senteziyle oluşan değerlendirilmenin yapılabilmesi için, yargıların herbirini temsil eden önermelerin biraraya getiriliş kuralının oluşması ve tanımlanması ve de ayrıca buna uyan modelin bir *standart olması* gerekmektedir. Aşağıdaki örneği inceleyelim :

- Ahmet, Ankara'ya ve İzmir'e gidecek.
- Ahmet, Ankara'ya da İzmir'e de gidecek.
- Ahmet, Ankara'ya gideceği gibi İzmir'e de gidecek.
- Ahmet, hem Ankara'ya hem de İzmir'e gidecek.
- Ahmet, Ankara'ya ; İzmir'e gidecek.
- Ahmet, Ankara'ya da gidecek İzmir'e de.
- Ahmet, İzmir'e gidecek ve Ankara'ya gidecek.
- *Ahmet, Ankara'ya gidecek VE Ahmet, İzmir'e gidecek.*

Burada bir çok cümle kurularak gerçekte tek bir şey anlatılmaktadır. Konuşma dilinde hiç de önemsemediğimiz ve farklı anlatım ya da yazım biçimleriyle dile getirdiğimiz bu tür yargılara ilişkin olarak *bilim dili* oluşurken, daha farklı düşünmek durumundayız. Bu örnekler arasında sonuncusu olarak yer alan ifade, önermeleri tek tek ayrılmış, kullanılan bağlacın belirgin olduğu bir anlatım biçimi olarak mantıksal modele uygun olanıdır. İşte buna bu olayın *standart biçimi* denir. Öyleyse standart biçim denilince, bir olayın, bir oluşumun ya da bir olgunun, mantığın ortaya koyduğu normlara göre ifade edilmiş şekli anlaşılmalıdır. Mantıksal işlemler ve değerlendirmeler hep bu standart biçimler üzerinde yapılacaktır ki bunlara *Önerme Kalıbı* da denilmektedir.

p : Ahmet Ankara'ya gidecek.

q : Ahmet İzmir'e gidecek

ile gösterilirse, yukarıda örneklediğimiz oluşumun standart biçimi $p \text{ VE } q$ şeklinde gerçekleşecektir. Burada VE bir bağlaç olup, o ve diğerleri de aşağıda tanımlanmaktadır. Daha önce de sözü edilmiş olan bağlaçlar ile önermeler birlikte temel standart biçimleri oluşturmaktadırlar.

2.6. BAĞLAÇLAR

Bağlaçlar ya da *eklemler* mantıksal değişmezler adını alırlar ve bunlar bileşik önermelerin oluşmasında önermeleri birbirine bağlayarak, onlara mantıksal boyut ve anlam kazandırır. Modern mantığın temel olan bağlaçları *Ve* ile *Veya* dır. Bunların dışında *Ya da* (*Ayrıcalıklı Veya*) , *Gerektirme* , *Çift Gerektirme*, *Bağdaşmazlık* ve *Birlikte Değilleme* bağlaçlarının varlığından söz edilebilir. Bu türler aşağıda tek tek incelenecektir.

2.6.1. VE Bağlacı

p ile q gibi iki önermenin VE ' li bileşimi $\wedge$ sembolü kullanılarak $p \wedge q$ şeklinde gösterilir ve p ve q diye okunur. Bu bileşim aşağıda görülen tablo yardımıyla tanımlanmıştır. Bu tanım tablosu değerlendirilirse , bu bağlaç için doğruluk değerleri arasında,

p	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

$$D \wedge D = D ; D \wedge Y = Y ; Y \wedge D = Y ; Y \wedge Y = Y$$

ilişkilerinden söz edilebilecektir. VE bağlacı tanımlanırken " *ancak her iki önerme de doğru ise VE ' li bileşim doğru ; diğer hallerde yanlıştır.* " şeklinde bir genelleme yapılabilmektedir. Burada $p \wedge q$, VE bağlacı ile oluşan

standart biçimdir.

2.6.2. VEYA Bağlacı

p ile q gibi iki önermenin VEYA ' lı bileşimi $\vee$ sembolü kullanılarak $p \vee q$ şeklinde gösterilir ve p veya q diye okunur. Bu bileşim aşağıda görülen tablo yardımıyla tanımlanmıştır. Bu tabloya bakarak, bu bağlaç için doğruluk değerleri arasında aşağıdaki ilişkilerin var olduğu söylenebilecektir.

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

$$D \vee D = D ; D \vee Y = D ; Y \vee D = D ; Y \vee Y = Y .$$

Bu tablo yardımıyla VEYA bağlacı tanımlanırsa " *ancak her iki önerme de yanlış ise VEYA ' lı bileşim yanlış ; diğer hallerde doğru'dur.*" şeklinde bir genelleme yapmak olanaklıdır. Burada $p \vee q$ ile VEYA bağlacına ait standart

biçim ifade edilmiş olmaktadır.

2.6.3. YA DA Bağlacı

p ile q gibi iki önermenin YA DA ' lı bileşimi $\vee$ sembolü kullanılarak $p \vee q$ ile gösterilir ve p ya da q diye okunur. Bu bileşim aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanmıştır. Bu tanım tablosuna bakılarak, bu bağlaç için doğruluk değerleri arasında aşağıdaki ilişkilerin varlığı yazılabilecektir :

p	q	$p \vee q$
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

$$D \vee D = Y ; D \vee Y = D ; Y \vee D = D ; Y \vee Y = Y .$$

Bu bağlaca *ayrıcalıklı veya* denilmesinin nedeni, tablodaki birinci durumdan kaynaklanmaktadır. Bu tablo VEYA' nın tanım tablosuyla karşılaştırılırsa, ilk durum dışında birbirinin aynı olduğu görülecektir. İşte birbirine uymayan bu ilk durum nedeniyle farklı bir bağlaç olarak incelenmektedir.

Bu bağlacı daha iyi açıklamak bakımından şu örnek verilebilir. Yaşamda ya da bilimde (burada ya da' nın kullanıldığına dikkat ediniz) öyle olgular vardır ki bir kez ve bir yerde bir kere oluşur ; yaşanır. Örneğin doğum olgusu, ölüm olgusu gibi yaşam gerçekleri tekrarlanması olanaksız olan ; bir kez ve yalnız bir kez gerçekleşen olaylardır.

P : Ben, Ankara'da veya İstanbul'da doğdum.

derseniz hatalı bir tümce oluşturursunuz. Çünkü VEYA bağlacını kullanarak, hem Ankara'da hem de İstanbul'da doğmuş olabileceğimi, tanım tablosundaki birinci durumun karşılığı olarak kabul ve ifade etmiş olursunuz. Oysa doğum, bir yerde (mekanda) , bir zamanda (tarihte) gerçekleşir ve bu değişmez bir yazgı olarak kalır. Ben ya da (yine bağlaca dikkat ediniz) bir kimsenin aynı anda iki farklı mekanda doğmuş olabileceği düşünülemeyeceğine göre yanlış olan VEYA bağlacının kullanılmasıdır. Doğru önerme, bu açıklamalar sırasında YA DA bağlacının kullanılışının iki kez örneklenmesinde olduğu gibi,

P : Ben, Ankara'da YA DA İstanbul'da doğdum.

şeklinde olanıdır. İşte YA DA bağlacı, tablodaki ilk durum karşılığı olarak, birlikte gerçekleşmesi olgusunu *yalanlamakta* ve böyle bir savın *yanlış* olacağını ifade etmektedir. Bütün bu açıklamalardan sonra YA DA' lı bileşimin tanımını şu şekilde verilebilecektir : " *Ancak farklı doğruluk değerleri için doğru olup diğer hallerde yanlıştır.* "

2.6.4. Gerektirme

p ile q gibi iki önermenin *koşullu bileşimi* $\Rightarrow$ sembolü kullanılarak $p \Rightarrow q$ şeklinde gösterilir ve " p gerektirir q " diye okunur. Bu ifade, p ise q şeklinde de okunabilmektedir. Bu bileşim aşağıda görülen tablo yardımıyla tanımlanır.

p	q	$p \Rightarrow q$	Bu tanım tablosundan, gerektirme için, doğruluk değerleri arasında, buradaki ilişkilerin oluştuğu anlaşılmaktadır :
D	D	D	
D	Y	Y	$D \Rightarrow D = D$; $D \Rightarrow Y = Y$; $Y \Rightarrow D = D$; $Y \Rightarrow Y = D$.
Y	D	D	
Y	Y	D	

Bu tanım tablosu bir kabul sonucu elde edilmiştir. Doğruluğu *sezgisel olarak* bulunan ikinci durum dışında diğer halleri bu şekilde değerlendirebiliriz. Bu nedenle gerektirme, diğerlerine göre daha farklı özellikleri olan bir bağlaç olarak görülmektedir. Bunlar, ayrıca incelenecektir ve orada bu ayrıcalıklar belirtilecektir.

$p \Rightarrow q$ standart biçimi aynı zamanda bir matematiksel iddianın yani teoremin mantıksal modelini oluşturur. Bu karşıtı doğru olmayan bir teoremdir. Burada p *hipotez* , q ise *hüküm* adını alır. Ayrıca p ye *ön bileşen* , q ya da *ard bileşen* denilmektedir. Göreceğiz ki $p \Rightarrow q \neq q \Rightarrow p$ dir. Burada p , q için *yeter koşul*, q ise p için *gerek koşul* olmaktadır. Bu standart biçimin, tanımdan doğan ikircikli durumunu farklı yorumlayabilmek için VEYA bağlacından yararlanılır ve aşağıda verilmiş olan denklik bağıntısı kullanılır.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$p \Rightarrow q$ var olduğuna göre, ayrıca aşağıdaki bileşim şekilleri de tanımlanmıştır :

- **Karşıt Önerme** : $q \Rightarrow p$ şeklinde oluşan bileşimdir.
- **Ters Önerme** : $\sim p \Rightarrow \sim q$ şeklinde oluşan bileşimdir.
- **Karşıt-Ters Önerme** : $\sim q \Rightarrow \sim p$ şeklinde oluşan bileşimdir. Özellikle bu bileşim için :

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

yazılabilecektir. Bu denkleğin varlığını, bir uygulama amacıyla aşağıdaki tablo üzerinde inceleyelim. Bu gibi tablolara *Doğruluk Değer Tablosu* denir ve bu şekilde *Doğruluk Değer Analizi* yapılmaktadır.

Bu tablolar, *Denklik Bağıntılarının Varlığını Göstermek* amacıyla kullanılır.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
D	D	D	Y	Y	D
D	Y	Y	Y	D	Y
Y	D	D	D	Y	D
Y	Y	D	D	D	D

Bu uygulamada, standart biçimlerin düzenlendiği üçüncü ve altıncı (sonuncu) sütunlarda doğruluk değerlerinin yukarıdan aşağıya tamamen aynı dizilişte oldukları görülmektedir ki bu durumda bu iki standart biçim denktir .

2.6.5. Çift Gerektirme

p ile q gibi iki önermenin *karşılıklı koşullu bileşimi* $\Leftrightarrow$ sembolü kullanılmak suretiyle $p \Leftrightarrow q$ şeklinde gösterilir ve p çift gerektirir q diye okunur. Bu bileşim, aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanmıştır :

p	q	$p \Leftrightarrow q$	Bu tanım tablosundan, doğruluk değerleri arasında aşağıdaki ilişkilerin olduğu kolayca belirlenebilecektir :
D	D	D	
D	Y	Y	$D \Leftrightarrow D = D$; $D \Leftrightarrow Y = Y$; $Y \Leftrightarrow D = Y$; $Y \Leftrightarrow Y = D$.
Y	D	Y	
Y	Y	D	Çift gerektirme, gerektirme bağlacına göre yorumlanırsa ,

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

demektir. Bu hem $p \Rightarrow q$ nun hem de $q \Rightarrow p$ nin aynı zamanda gerçekleşmesini içeren bir bağlaçtır.

Bu bağlacın karakteristik özelliklerinden biri , denklik bağıntısının bağlaca göre ifadesini sağlamasıdır. Bir denklik bağıntısında $\equiv$ yerine $\Leftrightarrow$ konursa, ifade içeriğini korumakla birlikte, bunun incelenmesinde kavram değişikliği olacak, yani farklı bir yol izlenecek demektir. Örneğin bu kez, denklik bağıntısının doğruluğu, doğruluk değeri analizi yoluyla kanıtlanacak demektir ki buna ait tanım ve yöntemler daha sonra verilecektir. Ancak yukarıda verilmiş olan denkliğin varlığını, tablo yöntemini kullanarak okuyucu, bir uygulama amacı ile yapmalıdır.

2.6.6. Bağdaşmazlık

p ile q gibi iki önermenin *bağdaşmaz* oluşları $|$ sembolü kullanılarak $p | q$ yazılarak gösterilir ve p bağdaşmaz q ya da p ile q bağdaşmazdır diye okunur. Bu bileşimin tanım tablosu aşağıdadır.

p	q	$p q$	Bu tanım tablosuna göre bağdaşmaz durumda olan doğruluk değerleri arasındaki ilişkiler aşağıda belirtilmiştir.
D	D	Y	
D	Y	D	$D D = Y$; $D Y = D$; $Y D = D$; $Y Y = D$
Y	D	D	
Y	Y	D	

Burada bağdaşmazlık iki doğruluk değerinin D olması halinde görülmektedir.

2.6.7. Birlikte Değilleme

p ile q gibi iki önermenin *birlikte değillenmesi* $\Downarrow$ sembolü kullanılarak $p \Downarrow q$ şeklinde gösterilir ve p birlikte değillenmiştir q diye okunur. Bu bileşim aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanmıştır. Bu tanım tablosuna göre, bu bağlaç için

p	q	$p \Downarrow q$	doğruluk değerleri arasında aşağıdaki ilişkilerin olduğu anlaşılmaktadır :
D	D	Y	
D	Y	Y	$D \Downarrow D = Y$; $D \Downarrow Y = Y$; $Y \Downarrow D = Y$; $Y \Downarrow Y = D$.
Y	D	Y	
Y	Y	D	

Anlaşıyor ki ancak her iki doğruluk değeri de Y ise bu bileşim *doğru* , diğer hallerde yanlıştır.

2.7. DE MORGAN İLİŞKİLERİ

p ile q gibi iki önerme ile aşağıda gösterilen denklikler oluşturulmuş ise bunlara *De Morgan İlişkileri* ya da *De Morgan Denklikleri* denir.

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad ; \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Bunlar da birer *değilleme yasası* olarak kabul edilebilir. $\wedge$ ile $\vee$ bağlaçları arasındaki ilişkileri düzenledikleri de söylenebilir. Bu ilişkilerin doğruluğu üzerindeki çalışmayı okuyucu bir alıştırma olarak yapmalıdır. Bu amaçla, şimdilik gördüğümüz kadarıyla doğruluk değer tablosu düzenlenmelidir. Bu tabloda, denkliğin iki yanı için oluşan değerler biribirinin aynı olmalıdır.

2.8.BAĞLAÇLARIN TEMEL BAĞLAÇLAR CİNSİNDEN İFADELERİ

Burada *temel bağlaçlar* ile ifade edilmek istenilen bağlaçlar VE ile VEYA'dır. Çünkü bu iki bağlacın, dual sistem içinde özel bir yerleri olduğu gibi bu iki bağlaç yardımıyla diğer tüm bağlaçları ifade etmek olanaklı görülmektedir. Bu demektir ki, bu ilişkiler yardımıyla, her ne kadar bu kadar bağlaç türü tanımlanmak zorunda kalınmış bile olsa, sonuçta bu özellik sistemin üstün yönünü ortaya koymaktadır. Aşağıda bu ilişkiler verilmiştir :

$$p \vee q \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$$p \mid q \equiv p \Rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q) \text{ De Morgan}$$

$$p \Downarrow q \equiv \sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q) \text{ De Morgan}$$

Bağlaçların bu ilişkileri gözönünde bulundurulursa, artık bilim dilini modelleştirirken standart biçimlerin oluşmasında, sadece VE ile VEYA bağlaçlarına göre ifade biçimleri oluşturmak, oluşturabilmek, sonuçta mantıktan, bunun uygulama alanı olarak cebire, yani hesap tekniklerine geçişi hem olanaklı hem de uygulanabilir kılmıştır. Bu ise bilimde ve özellikle makina dilinin kullandığı algoritmaların oluşturulmasında, teknolojinin gücünün de katılmasıyla adeta devrimler yaratacak kadar önemli atılımların sağlanmasına öncülük etmiştir. Doğal olarak bu ifadeler, sonraki bölümlerle bütünleştiğinde çok daha anlamlı olacaktır. Önceden de değindiğimiz gibi mantıkta ve ile veya bağlaçlarının yapısal oluşumları, Boole Cebirinde operatörlere dönüştüğünde, bunların sırasıyla çarpma ile toplama işlemlerini düzenleyecekleri görülecektir. Başkaca operatör kullanılmamaktadır. Demek ki mantıktaki diğer bağlaçların karşılıkları Boole Cebirinde yoktur. Öyleyse mantıktan cebire geçiş yukarıdaki denklikler yardımıyla sağlanabilmektedir ki bunların varlığı da gösterilmiştir.

2.9. BAĞLAÇLARA AİT ÖZELLİKLER

Yukarıda kendilerinden söz edilen ve tanımlanan bağlaçların, aşağıda açıklanan özellikleri vardır. Bunların herbiri doğruluğu kanıtlanmış denklikler olarak algılanmalı, ancak yine de uygulama için birer problem olarak görülmemelidir.

2.9.1. Değişme (Komutatif) Özelliği

$$p \wedge q \equiv q \wedge p ; \quad p \vee q \equiv q \vee p ; \quad p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p ;$$

$$p \Rightarrow q \neq q \Rightarrow p ; \quad p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$$

Görülüyor ki $\Rightarrow$ bağlacı dışında kalan diğer bağlaçlarda değişme özelliği vardır. Değişme özelliğinin anlamı, ön ve ard bileşenlerin aralarında yer değiştirmesi durumunda standart biçimin değerinin değişmeyeceğidir. İşte bu özelliğe uymayan $\Rightarrow$ bağlacı için ön ve ard bileşenlerin sıralarının değişmesi halinde yeni elde edilen biçim anlamsız olacaktır ki bu ancak yeni bir standart biçim olarak tanımlanmak zorundadır. Nitekim daha önce o da yapılmış ve buna *Kar-şıt Önerme* adı verilmiştir.

2.9.2. Birleşme (Assosiyatif) Özelliği

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r ; \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$$

olarak birer anlamlı ifade oluştururlar. $\wedge$ ile $\vee$ bağlaçlarının birleşme özelliği olması parantezlere göre istenilen gruplaşmanın yapılması durumunda sonucun bundan etkilenmeyeceği anlamı çıkar ki parantezlerin tamamen kaldırılması durumunda da yine anlamlı ifadeler (bileşimler) oluşacak demektir. Ayrıca $\underline{\vee}$ ile $\Leftrightarrow$ için de bu özelliğin var olduğu görülmektedir.

$$p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r) \equiv (p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \equiv p \underline{\vee} q \underline{\vee} r$$

$$p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \equiv p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$$

denklikleri yazılabilecektir. Bunlara karşın $\Rightarrow$ için aynı özellik geçerli değildir. Bu nedenle $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ gibi bir bileşim anlamlı değildir. Çünkü

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \neq (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

dir.

2.9.3. Dağılma (Distribütif) Özelliği

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) ; \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Bu özellik sadece ve ile veya bağlaçları arasında vardır. Bunlardan ilkinde *ve'nin veya üzerine dağılımı* ; ikincisine ise *veya'nın ve üzerine dağılımı* denilmektedir. Bunun daha özel bir durumu *Soğurma Özelliği* adı altında düzenlenmiştir ki bunlar da aşağıdaki denkliklerle ifade edilirler.

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad ; \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Bu denkliklerde p ye *soğuran* , q ya da *soğurulan* denir.

2.9.4. De Morgan (Değilleme) Özelliği

Önceden De Morgan Denklikleri olarak ifade edilmiş olan ilişkiler, birer özellik olarak da nitelendirilebilir. İşte bu yaklaşımla bu ilişkiler, bu kez birer özel-lik olarak gözönüne alınmış olacaktır :

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad ; \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

2.9.5 Denk Güçlülük (Idempotent)

$$p \wedge p \equiv p \quad ; \quad p \vee p \equiv p$$

özelliklerinin varlığı, sırasıyla $\vee$ ile veya bağlaçlarının *denk güçlü* olduklarını ifade eder. Bunlara karşın gerektirme ve çift gerektirme denk güçlü değildir. Çünkü,

$$p \Rightarrow p \equiv D \quad ; \quad p \Leftrightarrow p \equiv D$$

olmaktadır.

2.10. DOĞRULUK DEĞERİ ANALİZİ

Bir bileşik önermenin (standart biçimin) doğruluk değeri analizi denilince, onu meydana getiren önermelerin alacağı değerlere karşın bağlaçlarla birlikte değerlendirildiğinde oluşacak doğruluk değerlerinin tümü anlaşılmalıdır. Böylece önermelere ve bağlaçlara göre standart biçim değerlendirilmiş olmaktadır. Bu-nun sonucunda da çeşitli oluşumlara göre, standart biçim yorumlanmaktadır.

2.10.1. Totoloji

Standart biçimdeki önermeler hangi değerleri alırlarsa alsınlar, sonuçta standart biçim, bu değerlere bağlı olmaksızın hep doğru kalabiliyorsa bu tür standart bi-çimlere *totoloji* denir. En basit örneği $p \vee \sim p = D$ dir. Görülüyor ki p öner-mesi ister D ister Y değerini alsın, tanım gereğince sonuç daima D dir. Öyleyse $p \vee \sim p$ bileşimi (standart biçimi) bir totolojidir.

2.10.2. Çelişme

Standart biçimdeki önermeler hangi değerleri alırlarsa alsınlar, sonuçta standart

biçim, bu değerlere bağımlı olmaksızın hep yanlış oluyorsa bu tür standart biçimlere *çelişme* ya da (yerine göre) *çelişki* denir. En basit örneği $p \wedge \sim p = Y$ dir. Burada da görülüyor ki p ister D ister Y değerini alsın sonuç daima Y olmaktadır. Öyleyse $p \wedge \sim p$ bileşimi (standart biçimi) bir çelişmedir.

2.10.3. Geçerlilik - Geçersizlik

Bir standart biçimin doğruluk değeri analizi yapıldığında, önermelere verilen doğruluk değerlerine karşın, standart biçim her değerlendirmede daima D değerini alıyorsa buna *Geçerli Standart Biçim* denir. En az bir değerlendirmede olsun Y doğruluk değerini alıyorsa, bu bir *Geçersiz Standart Biçim* ' dir.

2.10.4. Tutarlılık - Tutarsızlık

Bir standart biçimin doğruluk değeri analizi yapıldığında, önermelere verilen doğruluk değerlerine karşın, standart biçim en az bir D değerine ulaşıyorsa bu-na *Tutarlı Standart Biçim* denir. Eğer değerlendirmelerin tümünde de Y değeri alıyorsa, standart biçime *Tutarsız* ' dır denir.

Doğruluk değeri analizi yapıldıktan sonraki *yorum* aşamasında, standart biçim için bu değerlendirmeler sonucu, yukarıda tanımlanan biri ile bir karşılık bulacaktır. Ancak bazı benzerlik gösteren tanımlara kanarak bunların aynı olduğu gibi bir yanıla düşmemek gerekir. Şöyle ki :

- Totoloji ve Çelişme kavramları, standart biçimin, önermelerin aldıkları doğruluk değerlerinden soyutlanmış bir değerlendirilmesidir.

- Geçerlilik ve dolayısıyla Geçersizlik kavramı, standart biçimin alacağı değerlerin Y (yanlış) ye göre değerlendirilmesi esas alınarak tanımlanmıştır.

- Tutarlılık ve dolayısıyla Tutarsızlık kavramı, standart biçimin alacağı değerlerin D (doğru) ye göre değerlendirmesi esas alınarak tanımlanmıştır.

Görüldüğü gibi tamamen farklı yaklaşımlarla yapılmış bu tanımlar sonucu, bir standart biçime " totoloji ve aynı zamanda geçerlidir " denilebilmesine karşın totoloji $\neq$ geçerlilik' dir. Çelişme ile tutarsızlık arasında da aynı şeyler söz konusudur.

2.11. DOĞRULUK DEĞERİ ANALİZİ YÖNTEMLERİ

Bir standart biçimi incelemek denilince, öncelikle akla ilk gelen, *doğruluk değeri analizi* yapmaktır. Doğal olarak bu işin de çeşitli yöntemleri vardır.

Aşağıda bu yöntemler tanıtılmakta ve örnekler yardımıyla uygulama becerisi pekiştirilmektedir. Ayrıca her uygulamadan sonra, yukarıdaki tanımlardan hareket edilerek standart biçim yorumlanmaktadır. Gerçekte yapılmak istenilen şey aşağıdaki örnekte açıklanmaktadır.

ÖRNEK. $(p \wedge q) \Rightarrow r$ standart biçiminin doğruluk değeri analizini yapalım. Üç farklı önerme bulunduğundan sekiz farklı durum değerlendirmesi yapmak gerekecektir. Bunlar aşağıda tek tek düzenlenmiştir :

1. $p = D, q = D, r = D$ için : $(D \wedge D) \Rightarrow D = D \Rightarrow D = D$
2. $p = D, q = D, r = Y$ için : $(D \wedge D) \Rightarrow Y = D \Rightarrow Y = Y$
3. $p = D, q = Y, r = D$ için : $(D \wedge Y) \Rightarrow D = Y \Rightarrow D = D$
4. $p = D, q = Y, r = Y$ için : $(D \wedge Y) \Rightarrow Y = Y \Rightarrow Y = D$
5. $p = Y, q = D, r = D$ için : $(Y \wedge D) \Rightarrow D = Y \Rightarrow D = D$
6. $p = Y, q = D, r = Y$ için : $(Y \wedge D) \Rightarrow Y = Y \Rightarrow Y = D$
7. $p = Y, q = Y, r = D$ için : $(Y \wedge Y) \Rightarrow D = Y \Rightarrow D = D$
8. $p = Y, q = Y, r = Y$ için : $(Y \wedge Y) \Rightarrow Y = Y \Rightarrow Y = D$

Bu işlemlerin herbiri bir *yerine koyma örneği'* dir. Önerme sayısı arttıkça ve standart biçim çok daha karmaşık şekiller aldıkça, bu işlemlerin giderek güçleşeceği ve pratik bir değeri kalmayacağı kolayca anlaşılır. İşte bu nedenle aşağıda açıklanacak olan yöntemler geliştirilmiştir.

2.11.1. Doğruluk Değer Tablosu (Tablo Yöntemi)

Verilen standart biçime ait doğruluk değer tablosu, *durum tablosu'* nun yanısıra işlemler için ayrılan sütunlardan sonra esas olarak *sonuç sütunu'* nu içerir. İşte bu sütunda oluşan doğruluk değerlerine bakılarak yorum yapılabilecektir ki buna ait düzenlemeler aşağıdaki örnekler üzerinde görülecektir.

Önce basit bir örnek üzerinde çalışalım. $p \Leftrightarrow (q \vee \sim p)$ standart biçiminin doğruluk değer tablosunu düzenleyelim. p ve q önermelerine göre dört farklı durum oluşacaktır.

p	q	$\sim p$	$q \vee \sim p$	$p \Leftrightarrow (q \vee \sim p)$
D	D	Y	D	D
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	D	Y

Bu tablodaki sonuca göre standart biçim yorumlanırsa, sonuç sütununda bulunan D ve Y değerlerine bakarak, 1) totoloji ve çelişme olmadığı ; 2) Y değerlerinden ötürü Geçersiz olduğu ; 3) D değerlerinden dolayı Tutarlı olduğu, söylenebilecektir. Şimdi yorumlar bunlar olabileceğine göre, bu standart biçimin doğruluk değeri analizi hangi amaç için yapılmışsa, yanıt bu üç seçenekten biri ile verilmiş olacaktır. Şimdi de aşağıdaki örneği inceleyelim :

$$p \quad q \quad r \quad p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \quad p \Rightarrow r \quad [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

D	D	D	D	D	D	D	D	D
D	D	Y	D	Y	Y	Y	Y	D
D	Y	D	Y	D	Y	D	D	D
D	Y	Y	Y	D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	D	D	D	D	D	D
Y	D	Y	D	Y	Y	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D	D	D	D
Y	Y	Y	D	D	D	D	D	D

Bu tablo $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ standart biçiminin doğruluk değeri analizi için düzenlenmiştir. Sonuç sütunundaki tüm doğruluk değerleri D dir. Demek ki bu standart biçimde, önermeler ne türlü değerlendirilmiş olurlarsa olsunlar her durum için standart biçim D değerini almaktadır. İşte bu nedendir ki bu totoloji olan bir standart biçimdir.

Siz de benzeri bir çalışma yaparak $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \wedge p)$ standart biçiminin bir çelişme olduğunu görünüz. Çelişme olduğunu nasıl açıklarsınız ?

2.11.2. Quine Yöntemi

Bu yöntem önermelerin almış olduğu doğruluk değerlerinden soyutlanmış bir şema olarak görülmektedir. Yani sadece sonuca göre bir yorum getirmek olanacağı vardır. Oysa, anımsanırsa, *Totoloji* ve *Çelişme* tanımları da bu esas üzerine yapılmıştı. Demek ki özellikle standart biçimin bu tür yorumları için bu yöntem bir seçenek olarak kullanılabilecektir. Ancak sonuca bakarak, standart biçimin geçerli olup olmadığı ya da tutarlı olup olmadığı da açıklık kazanılabilecektir. Şöyle ki, eğer sonuç D ve Y leri birlikte içeriyorsa ;

- a) D değerlerine bakarak standart biçimin tutarlı,
- b) Y değerlerine bakarak standart biçimin geçersiz

olduğu söylenebilecektir. Ayrıca,

- c) Tüm doğruluk değerleri D ise standart biçimin bir totoloji olduğu,
- ç) Tüm doğruluk değerleri Y ise standart biçimin bir çelişme olduğu da söylenebilecektir.

Yöntem aşağıda açıklandığı şekilde uygulanır :

- Verilen standart biçimdeki farklı önermeler sayıca belirlenir. Sayıca en çok olan önermeden başlanır. Eğer hepsi eşit sayıdaysa, alfabedeki sıra gözetilir.
- Standart biçim çalışma yerinin ortasına gelecek şekilde yazılır.
- Hangi önermeden başlanacaksa, ifadede bunun yerlerine D yazılarak elde edilen yeni ifade standart biçimin sol-alt tarafına ; Y yazılarak elde edilen ifade standart biçimin sağ-alt tarafına gelecek şekilde yazılır.
- Bu şekilde elde edilen ifadelerdeki işlemler yapılır. Bu işlemlerin neler olduğu birer kural haline getirilerek aşağıda açıklanmıştır. İşlemler sonunda :
 - a) standart biçim bir doğruluk değerinden ibaret kalır ki orada işlem durdurulur ;
 - b) standart biçimin yerinde, değerlendirmeye giren önermenin içinde bulunmadığı yeni bir standart biçim oluşur ki bu durumda yöntem bu noktadan itibaren yeniden uygulanmaya başlanır.
- Bütün önermeler değerlendirildiğinde ; oluşan standart biçimler bir doğruluk değerinden ibaret kalıncaya kadar işlemler sürdürülür. Anlaşıldığı gibi bazen ardışık işlemler yapmak gerekebilecektir.
- Açıklanan sonuca ulaşıldığı takdirde işlem duracak ve önceden verilen açıklamalar doğrultusunda yorum aşamasına geçilebilecektir.

Yöntemin ne şekilde kullanıldığına dair verilecek örneklerden önce, yukarıda sözü edilen kuralların öncelikle ortaya konması elbette yararlı olacaktır. P ile bir bileşik önerme ya da bir önerme polinomu gösterilmiş olsun.

$$1) P \wedge D = D \wedge P = P$$

Bileşenlerinden biri D olan bir $\wedge$ li bileşim diğer bileşene (P ye) indirgenir.

$$P \wedge Y = Y \wedge P = Y$$

Bileşenlerinden biri Y olan bir $\wedge$ li bileşim Y ye indirgenir.

$$2) P \vee D = D \vee P = D$$

Bileşenlerinden biri D olan bir $\vee$ lı bileşim D ye indirgenir.

$$P \vee Y = Y \vee P = P$$

Bileşenlerinden biri Y olan bir $\vee$ lı bileşim diğer bileşene (P ye) indirgenir.

$$3) P \Rightarrow D = D ; D \Rightarrow P = P$$

Bileşenlerinden biri D olan bir koşullu bileşim ard bileşene indirgenir.

$$P \Rightarrow Y = \sim P ; Y \Rightarrow P = D = \sim Y$$

Bileşenlerinden biri Y olan bir koşullu bileşim ön bileşenin değiline indirgenir. Daha önce de belirtildiği gibi, koşullu bileşimin değişme özelliği olmadığı için D ve Y değerlerinin ön ve ard bileşenlerde bulunma durumlarını ayrı ayrı incelemek zorunlu olmuştur.

$$4) P \Leftrightarrow D = D \Leftrightarrow P = P$$

Bileşenlerinden biri D olan bir çift gerektirmede bileşim diğer bileşene indirgenir.

$$P \Leftrightarrow Y = Y \Leftrightarrow P = \sim P$$

Bileşenlerinden biri Y olan bir çift gerektirmede bileşim diğer bileşenin değiline indirgenir.

Kuralları bu şekilde açıkladıktan sonra şimdi aşağıdaki örnekleri inceleyelim :

$p \Leftrightarrow [\sim q \wedge (\sim p \Rightarrow r)]$ standart biçiminin doğruluk değeri analizini yapmak için Quine Yöntemini uygulayalım. Uygulamadaki aşamalar anımsanırsa, p sayıca daha fazla (2 tane) bulunduğundan p den başlanır.

$$\begin{array}{ll}
 p \Leftrightarrow [\sim q \wedge (\sim p \Rightarrow r)] & \\
 D \Leftrightarrow [\sim q \wedge (\sim D \Rightarrow r)] & Y \Leftrightarrow [\sim q \wedge (\sim Y \Rightarrow r)] \\
 \sim q \wedge (Y \Rightarrow r) & \sim [\sim q \wedge (D \Rightarrow r)] \\
 \sim q \wedge D & \sim (\sim q \wedge r) \quad (\text{De Morgan}) \\
 \sim q & q \vee \sim r \quad \downarrow \\
 \sim D & D \vee \sim r \quad Y \vee \sim r \\
 Y & D \quad \sim r \\
 & \sim D \quad \sim Y \\
 & Y \quad D
 \end{array}$$

olur.

İşlemler sırasında karşılaşılan $\sim q$; $q \vee \sim r$ ve $\sim r$ ifadeleri yeni standart biçimler olduklarından, işlem bunların herbirinde yeniden başlatılmıştır. Böylece, sonuçta, her çalışma dalında bir doğruluk değerine ulaşıldığından işlem tamamlanmıştır. Bu doğruluk değerlerine bakarak yorum yapılacaksa, standart biçimin bir totoloji ya da çelişme olmadığı söylenebileceği gibi, D değerlerine bakarak bunun tutarlı olduğu ; ancak Y değerlerine bakarak bunun geçersiz olduğu da söylenebilecektir.

Yukarıda tablosunu düzenlediğimiz örneği, aşağıda bu yöntemle inceliyoruz.

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ standart biçiminin doğruluk değeri analizi yapılırsa, sonuca göre yorumlandığında bunun bir totoloji olduğu görülecektir.

$$\begin{array}{l}
 [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r) \\
 [(D \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (D \Rightarrow r) \quad [(Y \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (Y \Rightarrow r) \\
 [q \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r \quad [\sim Y \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (\sim Y) \\
 [D \wedge (D \Rightarrow r)] \Rightarrow r \quad [Y \wedge (Y \Rightarrow r)] \Rightarrow r \quad [D \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow D \\
 (D \wedge r) \Rightarrow r \quad (Y \wedge \sim Y) \Rightarrow r \quad (q \Rightarrow r) \Rightarrow D \\
 r \Rightarrow r \quad (Y \wedge D) \Rightarrow r \quad D \\
 D \Rightarrow D \quad Y \Rightarrow Y \quad Y \Rightarrow r \\
 D \quad D \quad D
 \end{array}$$

Böylece işlem tamamlanmış olur. Varılan doğruluk değerlerin hepsi D olduğundan bu standart biçimin bir *totoloji* olduğu söylenebilecektir.

2.11.3. Analiz Yöntemi

Bu yöntemle doğruluk değeri analizi yapabilmek için, standart biçim üzerinde, ardışık işlemler uygulayarak, bağlaçlara ait tanım ve özelliklerden yararlanmak suretiyle, ya tek bir doğruluk değerine ulaşmak ya da bu gerçekleşmiyorsa, artık üzerinde işlem yapılması olanaksız hale gelen veya kısır döngüye dönüşen modül bir ifadeye, standart biçimin en basit haline ulaşmak amaçlanmış olacaktır.

Yöntemin ne şekilde uygulanacağına dair bir genel açıklama yapmak olanaksız olup ancak yukarıdaki amaç için çizilmiş olan çizgiden giderek, her problem için yapılması gerekenlere, problem süreci içinde karar verilecek ve uygulana-caktır. Yer yer denemeye dayanan çalışmalar da yapılabilecektir.

Bu açıklamaları pekiştirmek ve anlamlı kılmak için aşağıdaki iki örnek incelen- melidir. Her işlem aşamasında, bir sonraki ifadeye geçilirken kullanılan özelli-ğin ne olduğunu anlamaya, bulmaya çalışınız !

$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q)$ standart biçiminin doğruluk değeri analizini bu yöntemle uygulayarak gerçekleştirelim. Aşağıda ardışık işlemlerle oluşan çözüm görülmektedir. İzleyelim ...

$$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim \sim p \wedge \sim q) \equiv$$

$$(\sim \sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \equiv (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \equiv D$$

bulunur. Eğer $P = (p \wedge \sim q)$ denirse, son ifadeden $P \Leftrightarrow P = D$ yazılabileceği kolayca anlaşılmaktadır. Çünkü daha önce belirtildiği gibi, çift gerektirmenin (karşılıklı koşullu bileşimin) denk güçlü (idempotent) olmadığı bilinmektedir. Bu sonuca göre standart biçimin bir *totoloji* olduğuna karar verilecektir.

Eğer sonuç Y olarak bulunmuş olsaydı standart biçimin bir *çelişme* olduğu ifa-de edilecekti. Ancak sonuç D ya da Y olarak bulunmamışsa, yani önermelere bağlı ancak daha da daraltılması olanaksız bir ifadeyse, bu takdirde önermelerin alacağı doğruluk değerlerine bağımlı sonuçlar elde edilecektir ki bu takdirde standart biçim ne totoloji ne de çelişkidir. Tutarlı ya da Geçersiz standart biçim olarak yorumlanacaktır. Bunu açıklayan bir örnek aşağıdadır.

$\sim [(p \Rightarrow \sim r) \Rightarrow (\sim q \vee r)] \wedge [r \Rightarrow (\sim p \wedge q)]$ standart biçiminin doğruluk değeri analizi bu yöntemle gerçekleştirilecektir. İzliyoruz ...

$$\begin{aligned} & \sim [(p \Rightarrow \sim r) \Rightarrow (\sim q \vee r)] \wedge [r \Rightarrow (\sim p \wedge q)] \equiv \\ & \sim [(\sim p \vee \sim r) \Rightarrow (\sim q \vee r)] \wedge [\sim r \vee (\sim p \wedge q)] \equiv \\ & \sim [\sim (\sim p \vee \sim r) \vee (\sim q \vee r)] \wedge [\sim r \vee (\sim p \wedge q)] \equiv \\ & [(\sim p \vee \sim r) \wedge \sim (\sim q \vee r)] \wedge [\sim r \vee (\sim p \wedge q)] \equiv \\ & [(\sim p \vee \sim r) \wedge (q \wedge \sim r)] \wedge [(\sim r \vee p) \wedge (\sim r \vee q)] \equiv \\ & (\sim p \vee \sim r) \wedge q \wedge \sim r \wedge (\sim r \vee p) \wedge (\sim r \vee q) \equiv \\ & [(\sim p \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim r)] \wedge [q \wedge (q \vee \sim r)] \wedge \sim r \equiv \\ & [(p \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (\sim r \wedge \sim r)] \wedge [(q \wedge \sim r) \vee (q \wedge q)] \wedge \\ & \sim r \equiv [Y \vee (\sim p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim r) \vee \sim r] \wedge [q \vee (q \wedge \sim r)] \wedge \sim r \equiv \\ & \{[(p \vee \sim p) \wedge \sim r] \vee \sim r\} \wedge q \wedge \sim r \equiv \\ & \{[D \wedge \sim r] \vee \sim r\} \wedge q \wedge \sim r \equiv (\sim r \vee \sim r) \wedge q \wedge \sim r \equiv \\ & \sim r \wedge q \wedge \sim r \equiv q \wedge \sim r \end{aligned}$$

bulunur. Görülüyor ki ulaşılan sonuçta artık başkaca sadeleştirme ya da tek bir değere indirgeme olanağı yoktur. Öyleyse, yukarıdaki açıklamalar ışığında bu standart biçimin totoloji ya da çelişme olmadığı apaçıktır. Ancak *tutarlı* ya da *geçersiz* bir standart biçim olduğuna karar verilebilecektir.

2.12. MANTIKEN DENK POLİNOMLAR

Aynı önermelerden oluşmuş iki önerme polinomu $P(p,q,r,...)$ ile $Q(p,q,r,...)$ ise,

bu iki polinomun bütün yorumlarının birbirlerinin aynı olması halinde bunlara *Denk Polinomlar* denir. Bu özellikteki iki önerme polinomu

$$P(p,q,r,...) \equiv Q(p,q,r,...) \text{ ya da } P(p,q,r,...) \underset{Dk}{=} Q(p,q,r,...)$$

yazılarak gösterilir. Bu denkliklerin var olmaları için, bu önerme polinomlarının *özdoğruluk polinomları* olmaları gerekmemektedir. Standart biçimi bir totoloji olan önerme polinomu *özdoğruluk polinomu* adını almaktadır. Buna dair aşağı- da verilmiş olan uygulama, konuya yeteri kadar açıklık getirecektir.

Daha önce sözü edilen $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ denkliğini bu açıklamalar ışığında inceleyelim. Bu VE nin VEYA üzerine dağılımı şeklinde ifade edilmiş olan *Dağılma Özelliği* olarak bilinmektedir.

$$P(p,q,r) = p \wedge (q \vee r) ; Q(p,q,r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

denirse, $P(p,q,r) \equiv Q(p,q,r)$ denklik bağıntısı elde edilir. Şimdi bu savın doğru olduğunu kanıtlamaya çalışalım. Bunun için, her iki polinoma ait yorumları tek tek belirleyelim ve karşılaştıralım.

1. yorum : $p = D , q = D , r = D$ için,
 $P(p,q,r) = P(D,D,D) = D \wedge (D \vee D) = D$
 $Q(p,q,r) = Q(D,D,D) = (D \wedge D) \vee (D \wedge D) = D$
2. yorum : $p = D , q = D , r = Y$ için ,
 $P(p,q,r) = P(D,D,Y) = D \wedge (D \vee Y) = D$
 $Q(p,q,r) = Q(D,D,Y) = (D \wedge D) \vee (D \wedge Y) = D$
3. yorum : $p = D , q = Y , r = D$ için ,
 $P(p,q,r) = P(D,Y,D) = D \wedge (Y \vee D) = D$
 $Q(p,q,r) = Q(D,Y,D) = (D \wedge Y) \vee (D \wedge D) = D$
4. yorum : $p = D , q = Y , r = Y$ için,
 $P(p,q,r) = P(D,Y,Y) = D \wedge (Y \vee Y) = Y$
 $Q(p,q,r) = Q(D,Y,Y) = (D \wedge Y) \vee (D \wedge Y) = Y$
5. yorum : $p = Y , q = D , r = D$ için,
 $P(p,q,r) = P(Y,D,D) = Y \wedge (D \vee D) = Y$
 $Q(p,q,r) = Q(Y,D,D) = (Y \wedge D) \vee (Y \wedge D) = Y$

6. yorum : $p = Y$, $q = D$, $r = Y$ için,
 $P(p,q,r) = P(Y,D,Y) = Y \wedge (D \vee Y) = Y$
 $Q(p,q,r) = Q(Y,D,Y) = (Y \wedge D) \vee (Y \wedge Y) = Y$

7. yorum : $p = Y$, $q = Y$, $r = D$ için,
 $P(p,q,r) = P(Y,Y,D) = Y \wedge (Y \vee D) = Y$
 $Q(p,q,r) = Q(Y,Y,D) = (Y \wedge Y) \vee (Y \wedge D) = Y$

8. yorum : $p = Y$, $q = Y$, $r = Y$ için,
 $P(p,q,r) = P(Y,Y,Y) = Y \wedge (Y \vee Y) = Y$
 $Q(p,q,r) = Q(Y,Y,Y) = (Y \wedge Y) \vee (Y \wedge Y) = Y$

bulunur. Bütün yorumları hesaplanmış olan bu iki önerme polinomunda her yorumun sonucunun, her ikisi için de aynı olduğu görülmektedir. İşte bu özelliği nedeniyle ki bu iki polinom denk'tir ve incelenmekte olan denkliğin varlığı bu şekilde gösterilmiş olur.

Bu çalışma biçimi, bir yöntem gibi algılanabilirse de, gerçekte pratik bir değeri yoktur. Bu nedenle böyle bir denkliğin varlığı yine *Doğruluk Değeri Analizi* yapılarak gerçekleştirilir. Öyleyse, ona ait yöntemler uygulanabilir demektir. İşte burada önemli bir kavram olarak *denkliğin standart biçimleşmesi* günde-me gelmektedir. Bu ise bir denklik bağıntısında $\equiv$ yerine $\Leftrightarrow$ bağlacı kullanılarak sağlanır. Yani $P \equiv Q$ gibi bir denklik, $P \Leftrightarrow Q$ gibi bir standart biçimle yer de-ğiştirmiş olacaktır. Eğer bu standart biçimin bir totoloji olduğu gösterilebilirse, denkliğin var olduğu kanıtlanmış olacaktır. Bu savın karşıtı olarak da $P \Leftrightarrow Q$ gibi bir standart biçim bir totoloji ise, bundan $P \equiv Q$ gibi bir denklik bağıntısına geçmek olanaklıdır.

Yukarıdaki örneği bu kez bu yaklaşımla yeniden inceleyelim. Dağılma özelliği olarak bilinen $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ denkliğini bu kez $\equiv$ yerine $\Leftrightarrow$ bağlacını koyarak, $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ şeklinde bir standart biçime dönüştürerek, doğruluk değeri analizini yapalım. Bunu Quine yöntemini kullanarak sağlayalım.

$$\begin{array}{ll}
 [p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] & \\
 [D \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(D \wedge q) \vee (D \wedge r)] & [Y \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(Y \wedge q) \vee (Y \wedge r)] \\
 (q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r) & Y \Leftrightarrow (Y \vee Y) \\
 D & Y \Leftrightarrow Y \\
 \text{olur.} & D
 \end{array}$$

Görülüyor ki bu standart biçim bir totolojidir. O halde standart biçimin oluşma nedeni olan denklik bağıntısı da geçerlidir yani var demektir.

Bu tür standart biçimlerin doğruluk değer tablosu düzenlenerek incelenebildiği de bilinmektedir. Öyleyse denklik bağıntılarının bu tür tablolar yardımıyla incelenebilmesi olanaklı olmalıdır. Gerçekten de bir denklik bağıntısının varlığının gösterilmesinde bu yöntemden yararlanılabilmektedir. Ancak daha önce yapılmış olan açıklamalara, bu amaca uygun olmak üzere yeni bir düzen verilmesi gerekebilecektir. Bunun için tablo düzenlenirken şunlara dikkat edilmelidir :

- Durum tablosu denklikte bulunan tüm önermelere bakılarak düzenlenir.
- Denkliğin her iki yanı için iki ayrı tablo yapılır. Sonuç sütunları birbirinin sıralı olarak tamamen aynıysa bu denkliğin varlığı gösterilmiş olur.
- Pratikte bu tabloların ayrı ayrı yapılması yerine aynı bir tablo üzerinde birleştirilmesi de olanaklıdır. Sonuç sütunları tablonun içinden bulunarak karşılaştırılır ve yukarıda olduğu gibi değerlendirilir.

Bu açıklamaları pekiştirmek için aşağıdaki uygulamaları izleyelim :

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ ve $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ denklikleri *Soğurma Özelliği* olarak bilinmektedir. Bunlardan ilkinin varlığını tablo düzenleyerek kanıtlayalım. Diğeri de okuyucuya bir çalışma konusu olarak bırakılmıştır.

$P(p,q) \rightarrow$	p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$Q(p,q) \rightarrow$	p	q	p
	D	D	D	D		D	D	D
	D	Y	D	D		D	Y	D
	Y	D	D	Y		Y	D	Y
	Y	Y	Y	Y		Y	Y	Y

olur. Görülüyor ki her iki tablonun sonuç sütunları birbirinin aynısıdır. İşte bu değerlendirme yoluyla bu iki polinomun denk oldukları söylenebilecektir.

		$P(p,q)$		$Q(p,q)$
p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	p
D	D	D	D	D
D	Y	D	D	D
Y	D	D	Y	Y
Y	Y	Y	Y	Y

Bunlara göre $P(p,q) = p \wedge (p \vee q)$; $Q(p,q) = p$ denirse, $P(p,q) \equiv Q(p,q)$ yazılabilecektir. Oysa daha önce açıklandığı gibi, bu iki inceleme (değerlendir-me) tek bir tablo üzerinde gerçekleştirilebilecektir. Yukarıda, bu uygulama da görülmektedir.

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$; $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ denklikleri *De Morgan denkliği* olarak adlandırılır. Bunlar aynı zamanda birer *değilleme yasası* oluşturmakla birlikte, VE ile VEYA bağlaçları arasındaki bir tür ilişkiyi de düzenlemektedir. Bunlardan ilkinin bir denklik bağıntısı olarak, tablo yöntemini kullanarak incele-yelim ve öncekinde olduğu gibi ikincisini de okuyucuya bir uygulama problemi olarak bırakmış olalım.

Bunun, doğruluk değeri analizi yoluyla incelenbilmesini sağlamak üzere önce-likle bir standart biçim oluşturacak şekle sokulması, yani bir biçimsel düzenle-me yapılması gerekmektedir. Bunun için $\equiv$ yerine $\Leftrightarrow$ konularak, denklik bağın- tısı,

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

standart biçimi olarak düzenlenmiş olur. Bunun için tablo düzenlenirse ;

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
D	D	Y	Y	D	Y	Y	D
D	Y	Y	D	Y	D	D	D
Y	D	D	Y	Y	D	D	D
Y	Y	D	D	Y	D	D	D

oluşacaktır. Sonuç sütunundaki tüm doğruluk değerleri D dir ve dolayısıyla bu standart biçim bir totolojidir. O halde bu bir denklik bağıntısıdır.

Bu kez aynı problemi yine tablo ile ancak farklı yorumla gerçekleştirelim. Bir örneğini yukarıda verdiğimiz uygulamanın bir benzeri burada tekrarlanacaktır.

		*		*			
p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	
D	D	D	Y	Y	Y	Y	
D	Y	Y	D	Y	D	D	
Y	D	Y	D	D	Y	D	
Y	Y	Y	D	D	D	D	

Düzenlenen tablodaki dördüncü ve yedinci sütunlar (* işaretli), denkliğin her iki yanına ait sonuç sütunları olup, doğruluk değerleri bakımından aynı dizilişte oldukları görülmektedir. Öyleyse, önceden oluşturulmuş kural gereğince bun-ların denk polinomlar oldukları ifade edilebilecektir. Bu ise şu anlama gel-mektedir :

$P(p,q) = \sim (p \wedge q)$; $Q(p,q) = \sim p \vee \sim q \rightarrow P(p,q) \equiv Q(p,q)$ olur. Bunların denk oluşları gerçekte $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ [De Morgan] denkliğinin varlığını ifade etmektedir.

2.13. MANTIKİ DENKLİK BAĞINTISININ ÖZELLİKLERİ

$P(p,q,r,...)$ ve $Q(p,q,r,...)$ gibi aynı önermelerden oluşmuş iki önerme polinomunun denk olması, önceki alt-bölümde işlendiği gibi bunlar arasında bir *denklik bağıntısı* olduğu anlamına gelecektir. Bu gibi ilişkilere *Mantiki Denklik Bağıntısı* denir. Mantiki denklik bağıntısının önemli üç özelliği aşağıda açıklan-mıştır.

2.13.1. Yansıma Özelliği

$P(p,q,r,...)$ önermesi biliniyorsa, bunun için oluşturulan

$$P(p,q,r,...) \equiv P(p,q,r,...)$$

denkliği geçerlidir ki bu ilişki " her önerme polinomu öncelikle kendisine denk- tir demektir " şeklinde açıklanır. Bu ilişki *yansıma özelliği* olarak adlandırılır.

2.13.2. Simetri Özelliği

$P(p,q,r,...)$ ve $Q(p,q,r,...)$ önerme polinomları verilmiş olsun.

$$P(p,q,r,...) \equiv Q(p,q,r,...) \text{ ise } Q(p,q,r,...) \equiv P(p,q,r,...)$$

yazılabilecektir. Buna *simetri özelliği* denir.

2.13.3. Geçişme Özelliği

$P(p,q,r,...)$; $Q(p,q,r,...)$ ve $R(p,q,r,...)$ önerme polinomları verilmiş olsun.

$$P(p,q,r,...) \equiv Q(p,q,r,...) \text{ ve } Q(p,q,r,...) \equiv R(p,q,r,...)$$

ise

$$P(p,q,r,...) \equiv R(p,q,r,...)$$

olur. Buna *geçişme özelliği* denir.

2.14. İNDİRGENMİŞ BİÇİMLER (DÖNÜŞTÜRMELER)

Bir standart biçim $\wedge$ ile $\vee$ sembollerinden başka bağlaç içermiyorsa buna *indirgenmiş biçim* denir. Eğer daha önce tanımlanmış olan bağlaçları ve özellikle $\Rightarrow$ ve/veya $\Leftrightarrow$ bağlaçlarını içeriyorsa, aşağıda açıklanacağı gibi, bunları ortadan kaldırarak şekilde yeniden yapılanma ile standart biçim tanıma uygun hale getirilebilecektir ki bu işe *dönüştürme* adı verilmektedir. Böylece elde edilecek olan standart biçime ise *İndirgenmiş Biçim* denir.

$\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ bağlaçlarının bulunduğu varsayımına göre,

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad ; \quad p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

denklikleri yardımıyla bu bağlaçlar, $\wedge$ ile $\vee$ bağlaçlarıyla değiştirilmiş olacaktır. Böylece indirgenmiş biçime ulaşılabilecektir. Aşağıdaki örneği inceleyelim :

$[(p \wedge q) \Leftrightarrow r] \Rightarrow p$ standart biçimi, indirgenmiş biçimde ifade edilmek istenilmektedir. Bu amaçla, hemen yukarıda verilmiş olan denkliklerden yararlanarak,

$$\begin{aligned} [(p \wedge q) \Leftrightarrow r] \Rightarrow p &\equiv \sim [(p \wedge q) \Leftrightarrow r] \vee p \equiv \\ &\equiv \sim \{[(p \wedge q) \wedge r] \vee [\sim (p \wedge q) \wedge \sim r]\} \vee p \end{aligned}$$

bulunur ki bu standart biçimin indirgenmiş biçimdeki halidir. Elbette olanaklı ise daha sade ve basit ifadesi elde edilmelidir. Nitekim işlemlere devam edilirse

$$\{[(p \wedge q) \wedge \sim r] \vee [\sim (p \wedge q) \wedge r]\} \vee p$$

bulunacaktır. Standart biçimin içeriği değişmeksizin sadece biçimsel düzenleme amacıyla yapılan bu çalışmanın, Boole Cebiri içinde ve uygulama alanlarında önemli kullanım yerleri bulunmaktadır. Bu nedenle konu, bu kitabın esas temasıyla çok yakından ilgili bulunmaktadır.

Genel anlamda, *indirgenmiş biçim* tanımı bu şekilde verilmesine karşın, özel

anlamda yapılmış başkaca biçimsel düzenlemeler de vardır ki bunlar da aşağıda incelenmektedir.

2.14.1. Tam İndirgenmiş Biçim

İndirgenmiş biçimdeki bir standart biçimde *değilleme*, sadece önermelere ait olacak şekilde düzenlenebiliyorsa, buna standart biçimin *Tam İndirgenmiş Biçi-mi* denir. Böylece bir önerme polinomuna ait değilleme bulunmayacak şekilde bir düzenleme yapılmış olmaktadır. Bunu *çift değilleme yasası* olarak bilinen

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

denklik bağıntısıyla ve daha önce örneklenen

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad ; \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

De Morgan denklikleriyle bu düzenlemeler yapılabilecektir.

Bu konudaki ilk örnek bu tanıma göre incelenirse, son düzenlemede ikinci kö-şeli parantez içinde $\sim (p \wedge q)$ olan bir ifadeye rastlanılmaktadır ki bu istenilen koşula aykırı bir durumdur. Öyleyse De Morgan'dan yararlanarak,

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

yazılabileceğinden, ifade buna göre yeniden düzenlenirse, ilkinde denk olmak üzere,

$$\equiv \{[(p \wedge q) \wedge \sim r] \vee [(\sim p \vee \sim q) \wedge r]\} \vee p$$

olur ki bu tam indirgenmiş biçimdedir. Çünkü artık buradaki değiller sadece önermelere aittir.

2.14.2. Normal Biçime İndirgeme

İndirgenmiş biçimdeki bir standart biçimde, özel bir düzenlemeyle, bileşenlerin $\wedge$ li bileşim şeklinde oluştuğu ve bunların birbirlerine $\vee$ bağlacıyla bağlandığı bir düzen kurulabiliyorsa buna *Normal Biçim* denir . Eğer standart biçim bu tanımdaki yapıya uygun değilse, dağılma ve benzeri özellikler gerektiği kadar uygulanarak bu yapıya ulaşılmaya çalışılır.

Tam indirgenmiş biçimdeki bir standart biçim

$$[p \vee (q \wedge \sim r) \vee q] \wedge [(p \wedge q) \vee r]$$

şeklinde verilmiş olsun. Bunun normal biçime dönüştürülmesi için yapılması gereken işlemler aşağıda gösterilmiştir.

Dağılma özelliği uygulanarak ilk aşamada

$$[p \wedge (p \wedge q)] \vee [p \wedge r] \vee [(q \wedge \sim r) \wedge (p \wedge q)] \vee [(q \wedge \sim r) \wedge r] \vee [q \wedge (p \wedge q)] \vee [q \wedge r]$$

elde edilecektir. Burada, $p \wedge (p \wedge q) = q \wedge (p \wedge q) = p \wedge q$; $r \wedge \sim r = Y$ ve $q \wedge Y = Y$ olacaktır. Bunlar gözönünde bulundurularak yeni bir düzenleme yapılacak olursa, sonuçta

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (q \wedge r)$$

standart biçimine ulaşılır ki bu tanıma uygun yapıda olduğu için *Normal Biçim'* dedir denir. Burada parantezlerle oluşturulan bileşenlere *Temel Bileşenler* adı verilir. Bunlar birer VE ' li bileşimdir.

2.14.3. Tam Normal Biçime İndirgeme

Normal biçimdeki bir standart biçimde ayrıca her temel bileşen, önermelerin hepsinden değil ya da değilsiz olacak şekilde birini içeriyorsa bu düzenleme biçimine *Tam Normal Biçime Dönüştürme* ve bu işlem sonunda elde edilen standart biçime ise *Tam Normal Biçime İndirgenmiş* denir. Temel bileşenlerin sayısı, önerme sayısı n ise, 2^n den daha büyük olamaz. Ayrıca tam normal biçime dönüştürülmüş bir standart biçimde aynı bileşenden iki ya da daha fazlası birarada bulunamaz. Normal Biçime İndirgenmiş bir standart biçimden Tam Normal Biçime İndirgenmiş standart biçime dönüşüm yapabilmek için, iki temel ilişkiden yararlanılabilecektir. Bunlar, formel olarak ifade edilirse,

$$A \wedge D = A \quad ; \quad p \vee \sim p = D$$

dir. Şimdi aşağıdaki uygulamayı izleyelim. Burada A ile, yukarıdaki anlamda herhangi bir önerme polinomu temsil edilmektedir.

$$A = A \wedge D = A \wedge (p \vee \sim p) = (A \wedge p) \vee (A \wedge \sim p)$$

Görülüyor ki sadece bir A dan hareket ederek, nasıl bir genişleme sağlanabilmiş oldu. İşte bu oluşumu, temel bileşende eksik olduğunu saptadığımız önerme için uygularsak, yapısal düzenin de tanıma tam bir uyum göstermesi nedeniyle amaca en kısa yoldan ulaşılmış olacaktır. Yukarıda, önceki alt-bölümde sonuçlandırdığımız standart biçimi tam normal biçime dönüştürelim.

Standart biçimin normal biçime dönüşmüş ifadesi

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (q \wedge r)$$

şeklinde bulunmuştu. Burada sadece 3.bileşen tam normal biçimde olması gerektiği gibidir. Diğerlerinde bir önerme eksik bulunmaktadır. Bu bileşenlerin tam normal biçime dönüşmüş bir standart biçimde olması gerektiği gibi düzenlenmeleri gerekmektedir. Bunlar ise aşağıda gösterilmiştir :

$$\begin{aligned} p \wedge q &= p \wedge q \wedge D = p \wedge q \wedge (r \vee \sim r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \\ p \wedge r &= p \wedge r \wedge D = p \wedge r \wedge (q \vee \sim q) = (p \wedge r \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge \sim q) = \\ &= (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \\ q \wedge r &= q \wedge r \wedge D = q \wedge r \wedge (p \vee \sim p) = (q \wedge r \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge \sim p) = \\ &= (p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \end{aligned}$$

Bunlar standart biçimde yerlerine konarak yeniden düzenlenir. Bu düzenleme sırasında yukarıda sözü edilmiş olan ilke gözetilecektir. Nitekim her üç ifadede de $p \wedge q \wedge r$ bileşeni bulunmaktadır. Öyleyse bunlardan ancak biri alınacak demektir. Diğer bileşenlerden $p \wedge q \wedge \sim r$ ise hem ilk düzenlemede hem de normal biçimde (3. bileşen) bulunmaktadır. Bunlardan da biri alınacaktır. Bu açıklamalardan sonra standart biçimin *tam normal biçime dönüşmüş hali* artık yazılabilecektir. Bu da,

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$$

şeklinde gerçekleşecektir.

2.14.4. Tam Normal Biçime Dönüştürmede Tablo Yöntemi

İster indirgenmiş biçimde olsun ister olmasın, bir standart biçimin tam normal biçime dönüştürülmesinde uygulanan etkin bir yöntem *tablo yöntemi* olarak adlandırılmaktadır. Bu demektir ki standart biçimde, başlangıçta $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ bağlaç-ları bulunsa bile, işleme doğrudan geçilebilecektir.

Bu yöntemin ne şekilde uygulandığı ve nasıl değerlendirildiği aşağıda açıklanmıştır.

1. Standart biçim için doğruluk değer tablosu düzenlenir.
2. Sonuç sütununda Y bulunan satırlar iptal edilir. D olan satırlarla ilgilenilir.
3. D bulunan satırlarda durum tablosuna bakılarak, D değerini alan önermenin kendisi, Y değerini alan önermenin değili alınarak bunların $\wedge$ li bileşimi oluşturulur. Bunlar *temel bileşenler* olurlar.
4. Bu şekilde elde edilen temel bileşenler, sonuç sütunundan sonraki bir yere, D lerin hizalarına yazılır.
5. Temel bileşenler birbirlerine $\vee$ ile bağlanarak Tam Normal Biçime Dönüştürmüş ifade elde edilir.

Bu açıklamalar ışığında, aşağıdaki örneği inceleyelim :

Standart biçim $(p \wedge \sim q) \vee r$ olsun. Bu Tam İndirgenmiş biçimdedir. Hatta Normal biçimde olduğu da söylenebilecektir. Bu standart biçimi Tam Normal Biçime indirgenmiş olarak ifade etmek istiyoruz. Bunun için tablo yöntemi uygulanacaktır.

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee r$	Temel Bileşenler
D	D	D	Y	Y	D	$p \wedge q \wedge r$
D	D	Y	Y	Y	Y	-----
D	Y	D	D	D	D	$p \wedge \sim q \wedge r$
D	Y	Y	D	D	D	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$
Y	D	D	Y	Y	D	$\sim p \wedge q \wedge r$
Y	D	Y	Y	Y	Y	-----
Y	Y	D	D	Y	D	$\sim p \wedge \sim q \wedge r$
Y	Y	Y	D	Y	Y	-----

Tablodaki bu sonuçtan yararlanarak, standart biçim için :

$$(p \wedge \sim q) \vee r \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$$

yazılabilecektir ki, standart biçimin nasıl şekil değiştirdiği çok iyi görülmektedir. Bunların denk oldukları da ayrıca belirtilmiştir.

Şimdi de daha farklı yapıda bir standart biçimle bir örnekleme yapalım. Standart biçim,

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow p$$

olsun. Bunun tam normal biçime indirgenmiş ifadesi tablo yöntemiyle bulunur-ken başkaca ön işleme gereksinme yoktur. Öyleyse doğrudan doğruya, doğruluk değer tablosunun düzenlenmesine geçilebilecektir.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow p$	Temel Bileşenler
D	D	D	D	D	D	$p \wedge q \wedge r$
D	D	Y	D	Y	Y	-----
D	Y	D	Y	D	D	$p \wedge \sim q \wedge r$
D	Y	Y	Y	D	D	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$
Y	D	D	Y	D	Y	-----
Y	D	Y	Y	D	Y	-----
Y	Y	D	Y	D	Y	-----
Y	Y	Y	Y	D	Y	-----

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow p \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

olarak ifade edilebilecektir ki, standart biçimin tam normal biçime indirgenmiş şekli elde edilmiş olmaktadır.

2.14.5. Her Normal Biçim Tutarlıdır

Yukarıda açıklandığı şekildeki *Normal Biçimde* ya da *Tam Normal Biçimde* bir ifade *tutarlı*'dır. Bunun anlamı *Temel Bileşen* olarak adlandırılan bileşenlerden en az birinin, D doğruluk değerinde olacağıdır.

İster Normal Biçimde ister Tam Normal Biçimde olsun bir Temel Bileşenin ya-pısı bellidir ; yani bir VE'li bileşimdir. Bir VE'li bileşimin doğru (D) olması ko- şuluysa, bileşenlerin tümünün D doğruluk değerinde olmasıdır. Normal biçim-deki ifadede temel bileşenlerden biri alınıp, orada değilsiz önermelerin yerlerine D , değilli önermelerin yerlerine Y konulursa, $D \wedge \sim Y = \sim Y \wedge D = D$ olacağı

Not : Burada yukarıdaki açıklamadan çıkarılabilecek bir sonuç olsa olsa şudur : Standart biçimi *çelişki* olan bir önerme polinomu, Normal biçimde ya da Tam Normal Biçimde ifade edilemez.

bilindiğinden temel bileşenin D değerini alacağı görülmektedir. Bu değerlendirme sonucu diğer temel bileşenler D değerini almayacaktır. Onlar ancak uygun değerler için D değerinde olacaklardır. Diğer temel bileşenler hangi doğruluk değerinde olurlarsa olsunlar, biliyoruz ki bir VEYA'lı bileşimin doğru olabilmesi koşulu, bileşenlerden en az birinin doğru olmasıdır. Bu ise yukarıda açıklandığı şekilde sağlanabileceğinden her normal biçimdeki ifade *tutarlı* olacaktır demektir.

2.15. AÇIK ÖNERMELER

Bir ya da daha çok sayıda serbest değişkene bağımlı önermelere *açık önerme* denir ve genellikle $p(x)$ ya da p_x ile gösterilir. x in alacağı değerlere bağlı olarak doğruluk değerleri alacak olan $p(x)$ açık önermesi, doğru ya da yanlış olacağından bir önerme niteliğinde olacaktır. Matematik iddiaların hemen hepsi bu tür önermelerle ifade edilir. Ancak $p(x)$ in tanımlanabilmesi için de x in tanım kümesinin verilmiş olması gerekir.

$p(x) : x > 5$ denildiğinde bu bir açık önermedir. Ancak x in tanım kümesi verilmiş olmadığından, şimdilik bu önermenin ayrıntıları hakkında bir şeyler söyleyebilmek için henüz erkendir. Ne var ki kabaca, x in 5 den büyük değerler aldığı zaman $p(x)$ in doğru (D) ; x in 5 den küçük değerler alacağı veya $x = 5$ olacağı durumlarda $p(x)$ in yanlış (Y) olacağı söylenebilecektir.

2.15.1. Evrende Açık Önerme

x in tanım kümesi $E(x)$ ile gösterilir ve buna *evren* denir. Eğer $E(x)$ biliniyorken $p(x)$ açık önermesi verilmişse, bu oluşum,

$$\begin{aligned} E(x) &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ p(x) &= \{x \mid p(x)\} \end{aligned}$$

şeklinde gösterilecek ve buna *Evrende Açık Önerme* denilecektir. $p(x)$ in de bir küme olarak tanımlanabileceği (bu bir zorunluluk değil) görülmektedir. Örneğin,

$$\begin{aligned} E(x) &= \{1, 4, 9, 12, 15\} \\ p(x) &= \{x \mid x > 5\} \end{aligned}$$

ile, evrende tanımlanmış bir $p(x)$ açık önermesi gösterilmektedir.

2.15.2. Temel Problem - Doğruluk Değer Kümesi

Evrende tanımlanmış bir açık önermenin incelenmesi denilince, evrendeki değişken değerlerinin her birine karşı açık önermenin alacağı doğruluk değerleri-nin araştırılması ve buna bağlı olarak, *Doğruluk Değer Kümesi'* nin yazılabil-mesi anlaşılmaktadır. Yapılan işe ise, *doğruluk değeri analizi* denilmektedir. Bu analiz sonrasında, $p(x)$ hangi x değerleri için D değerini almışsa, o x değer-lerinin oluşturduğu bir küme yazılır ki bu *doğruluk değeri kümesi* olur.

Bazı problemlerde evren verilmemiş olabilir. Bu takdirde evreni bizim seçme-miz gerekecektir. Ancak bu seçimlerde özel (nesnel) değerler kullanılamaz. Bu nedenle $E(x)$ evreni, eleman sayısı önceden belirlenmek koşuluyla,

$$E(x) = \{a, b, c, \dots\} \text{ ya da } E(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

şeklinde oluşturulur ki bunlara *teorik* ya da *soyut evren* denilecektir. Eleman-ları önceden tanımlanmış, bizce ne oldukları bilinen evrenlere ise *nesnel evren* denilmektedir.

$P(x)$ ile bir önerme polinomu gösterilmiş olsun. Bunun yukarıdaki $E(x)$ evre-ninde tanımlandığı varsayımına göre, doğruluk değeri analizi yapılırsa, evrenin elemanları için hesaplanmış olacak $P(x_1)$, $P(x_2)$, ..., $P(x_n)$ değerlerinin herbiri artık bir basit önermeden ibaret olacaktır. Öyleyse bunların bir doğruluk değeri olması da kaçınılmazdır. İşte böylece $P(x)$, önerme tanımına tam bir uyum gös-termiş olmaktadır.

Örnek : $E(x) = \{1,2,3,4\}$ evreninde tanımlanmış $P(x) = \{x \mid x > 2\}$ açık öner-me polinomu için hesaplanacak olursa :

$$\begin{array}{ll} P(x) = P(1) = (1 > 2) = Y & ; \quad P(x) = P(2) = (2 > 2) = Y ; \\ P(x) = P(3) = (3 > 2) = D & ; \quad P(x) = P(4) = (4 > 2) = D \end{array}$$

elde edilecektir. Bu husus (değerlendirme) bir tablo yardımıyla da temsil edilebilmektedir. Bu tablo aşağıda gösterilmiştir :

$x \in E(x)$	$P(x)$
$x < 2$	Y
$x = 2$	Y
$x > 2$	D

Gerçek problemler, $P(x)$ gibi önerme polinomlarının bileşik önerme olmasıdır. Yani iki ya da daha çok sayıda ve bağlaçlarla oluşturulmuş mantık ifadeleri olması halinde, bu bileşimlerin analizinde, yukarıdaki bilgilerimiz saklı kalmak üzere yeni bazı kavramların ortaya çıktığı görülmektedir.

Açık önermelerde bağlaçların kullanılmasında ve tanımlanmasında önemli farklar görülmemekle birlikte yorum aşamasında bazı farklı anlatımların ortaya çıktığı görülmektedir. Bu da x in alacağı değerlere bağlı olarak varılan doğruluk değerlerinin kullanılması (yorumlanması) nedeniyle oluşmaktadır. Aşağıda, bu konuda kullanılacak olan bağlaçların tanım tabloları birlikte verilmiştir.

$x \in E(x)$	$p(x)$	$q(x)$	$p(x) \wedge q(x)$	$p(x) \vee q(x)$	$p(x) \Rightarrow q(x)$	$p(x) \Leftrightarrow q(x)$
$x \in p, x \in q$	D	D	D	D	D	D
$x \in p, x \notin q$	D	Y	Y	D	Y	Y
$x \notin p, x \in q$	Y	D	Y	D	D	Y
$x \notin p, x \notin q$	Y	Y	Y	Y	D	D

Temel problemin, *doğruluk değer kümesi* 'nin belirlenmesi olduğu daha önce ifade edilmiştir. Bu belirleme işi için de temel ilkenin ne olduğu yine açıklanmıştır. Ancak orada tek bir önerme için oluşan bu kavramı, biraz daha geniş kapsamlı bir uygulama alanına yönelterek bileşik önermeler (önerme polinomu) için gerçekleştirelim. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde tartışalım :

ÖRNEK . $E(x) = \{x \mid x, \text{ Türk alfabesinin ünlüleridir.} \}$
evreninde tanımlanmış açık önermeler şunlardır :

$p(x) = \{x \mid x, \text{ " Milliyet " sözcüğündeki harflerdir.} \} = \{e, i\}$

$q(x) = \{x \mid x, \text{ " Cumhuriyet " sözcüğündeki harflerdir.} \} = \{e, i, u\}$

$r(x) = \{x \mid x, \text{ " Hürriyet " sözcüğündeki harflerdir.} \} = \{e, i, ü\}$

Her açık önerme için hemen yanlarına, evrene göre doğruluk değer kümeleri yazılmıştır. $P(x)$ açık önerme polinomu,

$$P(x) = \{p(x) \Rightarrow [\sim q(x) \wedge r(x)] \} \Leftrightarrow \sim p(x)$$

olarak verilmiştir. Doğruluk değeri analizini yaparak, $E(x)$ evrenine göre doğruluk değer kümesinin ne olduğu belirtilecektir.

Değişik yöntemler uygulamak olanağı vardır. Kavram olarak, tanıma en uygun yöntem aşağıdaki uygulamada görülmektedir. Bu yöntemde, x yerine evrenin elemanları tek tek konularak, oluşan basit önermelerin doğruluk değerleri için bileşik önerme değerlendirilir. D sonucu veren eleman doğruluk değer kümesi- nin elemanı olur. Y sonucunu veren elemanlar bu kümeye giremez. Öncelikle şu belirtilmelidir : $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ in tanım kümesinde olan elemanlar için bun-lar D , olmayan elemanlar için Y değerini alacaklardır.

$$\begin{aligned}
x = a \text{ için : } P(x) = P(a) &= \{p(a) \Rightarrow [\sim q(a) \wedge r(a)]\} \Leftrightarrow \sim p(a) = \\
&\{Y \Rightarrow [\sim Y \wedge Y]\} \Leftrightarrow \sim Y = \{Y \Rightarrow (D \wedge Y)\} \Leftrightarrow D = D \Leftrightarrow D = D \\
x = e \text{ için : } P(x) = P(e) &= \{p(e) \Rightarrow [\sim q(e) \wedge r(e)]\} \Leftrightarrow \sim p(e) = \\
&\{D \Rightarrow [\sim D \wedge D]\} \Leftrightarrow \sim D = \{D \Rightarrow (Y \wedge D)\} \Leftrightarrow Y = Y \Leftrightarrow Y = D \\
x = ı \text{ için : } P(x) = P(ı) &= \{p(ı) \Rightarrow [\sim q(ı) \wedge r(ı)]\} \Leftrightarrow \sim p(ı) = \\
&\{Y \Rightarrow [\sim Y \wedge Y]\} \Leftrightarrow \sim Y = \{Y \Rightarrow (D \wedge Y)\} \Leftrightarrow D = D \Leftrightarrow D = D \\
x = i \text{ için : } P(x) = P(i) &= \{p(i) \Rightarrow [\sim q(i) \wedge r(i)]\} \Leftrightarrow \sim p(i) = \\
&\{D \Rightarrow [\sim D \wedge D]\} \Leftrightarrow \sim D = \{D \Rightarrow (Y \wedge D)\} \Leftrightarrow Y = Y \Leftrightarrow Y = D \\
x = o \text{ için : } P(x) = P(o) &= \{p(o) \Rightarrow [\sim q(o) \wedge r(o)]\} \Leftrightarrow \sim p(o) = \\
&\{Y \Rightarrow [\sim Y \wedge Y]\} \Leftrightarrow \sim Y = \{Y \Rightarrow (D \wedge Y)\} \Leftrightarrow D = D \Leftrightarrow D = D \\
x = ö \text{ için : } P(x) = P(ö) &= \{p(ö) \Rightarrow [\sim q(ö) \wedge r(ö)]\} \Rightarrow \sim p(ö) = \\
&\{Y \Rightarrow [\sim Y \wedge Y]\} \Leftrightarrow \sim Y = \{Y \Rightarrow (D \wedge Y)\} \Leftrightarrow D = D \Leftrightarrow D = D \\
x = u \text{ için : } P(x) = P(u) &= \{p(u) \Rightarrow [\sim q(u) \wedge r(u)]\} \Leftrightarrow \sim p(u) = \\
&\{Y \Rightarrow [\sim D \wedge Y]\} \Leftrightarrow \sim Y = \{Y \Rightarrow (Y \wedge Y)\} \Leftrightarrow D = D \Leftrightarrow D = D \\
x = ü \text{ için : } P(x) = P(ü) &= \{p(ü) \Rightarrow [\sim q(ü) \wedge r(ü)]\} \Leftrightarrow \sim p(ü) = \\
&\{Y \Rightarrow [\sim Y \wedge D]\} \Leftrightarrow \sim Y = \{Y \Rightarrow (D \wedge D)\} \Leftrightarrow D = D \Leftrightarrow D = D
\end{aligned}$$

Görülüyor ki oldukça zahmetli bir işlem dizisi gerçekleştirmek gerekmektedir. Buradaki sonuçlara bakarak, bütün değerlendirmelerde D değerine ulaşıldığı anlaşıldığından, $P(x)$ in doğruluk kümesi evrenin kendisi olacaktır. Yani,

$$P(x) = \{a, e, ı, i, o, ö, u, ü\} = E(x)$$

şeklinde ifade edilecektir. Bu çalışmayı bir de tablo yöntemiyle inceleyelim. İş- lemlerde kolaylık sağlamak üzere, şimdilik $p(x) = p$, $q(x) = q$, $r(x) = r$ alalım.

$$x \in E(x) \quad p \quad q \quad r \quad \sim q \quad \sim q \wedge r \quad p \Rightarrow [\sim q \wedge r] \quad \sim p \quad \{p \Rightarrow [\sim q \wedge r]\} \Leftrightarrow \sim p$$

$x \in p, x \in q, x \in r$	D	D	D	Y	Y	Y	Y	D
$x \in p, x \in q, x \notin r$	D	D	Y	Y	Y	Y	Y	D
$x \in p, x \notin q, x \in r$	D	Y	D	D	D	D	Y	Y
$x \in p, x \notin q, x \notin r$	D	Y	Y	D	Y	Y	Y	D
$x \notin p, x \in q, x \in r$	Y	D	D	Y	Y	D	D	D
$x \notin p, x \in q, x \notin r$	Y	D	Y	Y	Y	D	D	D
$x \notin p, x \notin q, x \in r$	Y	Y	D	D	D	D	D	D
$x \notin p, x \notin q, x \notin r$	Y	Y	Y	D	Y	D	D	D

Üçüncü satır dışında hepsi D olduğundan, evrenin bunlara uyan elemanları bu-lunarak, bunlarla oluşturulacak küme, doğruluk değer kümesi olacaktır. Bunun nasıl olduğu ise burada satırlar itibariyle açıklanmıştır.

- 1.satırda : $x \in p = p(x)$, $x \in q = q(x)$, $x \in r = r(x)$ olmakla bu üç önermenin ortak elemanı varsa bu seçilecektir. $x = e$ ve $x = i$ elemanları bu özellikte olup, doğruluk değer kümesinin elemanlarıdır.
- 2.satırda : $x \in p = p(x)$, $x \in q = q(x)$, $x \notin r = r(x)$ olmakla, p ile q de olan ancak r de olmayan elemanlar varsa, bunlar alınacaktır.
Bu özellikte bir eleman yoktur.
- 3.satırda : Y değeri bulunduğundan bu satıra ait bir yorum yapılmayacaktır.
- 4.satırda : $x \in p = p(x)$, $x \notin q = q(x)$, $x \notin r = r(x)$ olmakla, sadece p olan ve diğerlerinde olmayan elemanlar alınacaktır. Böyle eleman yoktur.
- 5.satırda : $x \notin p = p(x)$, $x \in q = q(x)$, $x \in r = r(x)$ olmakla, q ve r de bulunan ancak p de olmayan elemanlar alınacak demektir. Bu tanıma uyan eleman bulunmamaktadır.
- 6.satırda : $x \notin p = p(x)$, $x \in q = q(x)$, $x \notin r = r(x)$ olmakla, sadece q da bulunan ve diğer ikisinde bulunmayan elemanlar alınacak demektir.
Bu tanıma $x = u$ elemanı uymaktadır. Öyleyse u kümenin bir elemanıdır.
- 7.satırda : $x \notin p = p(x)$, $x \notin q = q(x)$, $x \in r = r(x)$ olmakla , sadece r de olan diğer ikisinde olmayan elemanlar aranmaktadır. Bu tanıma $x = ü$ elemanı uymaktadır. Öyleyse $ü$ de kümenin bir elemanıdır.
- 8.satırda : $x \notin p = p(x)$, $x \notin q = q(x)$, $x \notin r = r(x)$ olmakla, evrende olan ancak p de, q da ve r de bulunmayan elemanların da doğruluk değer kümesinin elemanları olacağı anlaşılmaktadır. Bunlar ise $x = a$, $x = 1$, $x = o$, $x = ö$ elemanlarıdır.

Böylece analiz tamamlanmıştır. Şimdi eldeki bilgilere göre, sonuçta doğruluk değer kümesi oluşturulursa, sırasıyla satırlardan $\langle e, i, u, ü, a, ı, o, ö \rangle$ elemanlarının biraraya geldikleri görülmektedir. Bunlar bir küme oluşturacak şekilde düzenlenirse, bu $P(x)$ in doğruluk değer kümesi olduğundan,

$$P(x) = \{a, e, ı, i, o, ö, u, ü\} = E(x)$$

bulunacaktır. Eğer böyle bir inceleme sonucunda, doğruluk değer kümesine, evrenin hiçbir elemanı giremiyorsa, bu takdirde doğruluk değer kümesinin *boş küme* olduğu

$$P(x) = \{ \} \text{ ya da } P(x) = \emptyset$$

yazılarak ifade edilir ve gösterilir.

Açık önermelerin analizinde bir de *Venn Çizimi* yoluyla araştırma yapmak ola-nağı vardır. Ancak bu ayrıntılara fazlaca girilmeyecektir. Bu konularda, başta da belirtildiği gibi, yazarın **Modern Mantık*** adlı kitabında yeteri kadar ayrıntılı bilgi bulunmaktadır. Gerek duyulduğu takdirde bu kitap incelenmelidir.

2.16. NİCELİKLİ ÖNERMELER

Gerek konuşma gerekse bilim dilinde bir çok zaman *bazı, bazısı, hep, hepsi, tamamı, en az biri, her, vb.* sözcükler kullanarak, açıklanmakta olan fikri *nicelemiş* oluruz. Böylece hem kapsam hem de içerik açısından bu önermeye bir boyut kazandırmış daha da anlamlı kılmış oluruz. Örneğin,

İnsanlar ölümlüdür.

önermesiyle

Bütün insanlar ölümlüdür.

önermesi karşılaştırılırsa, ikincisinde *bütün* sözcüğü kullanılarak bir niceleme yapıldığı görülmektedir. İkinci anlatımda bir kapsam oluşmuştur.

Bazı kuşlar uçamaz .

(*) Yavuz AKSOY , **Modern Mantık (Sembolik Mantık)** , 3.Baskı,
Yıldız Teknik Üniversitesi Yayını, Yayın Sıra No. 870 , İstanbul , 2013

önermesinde *bazı* sözcüğü bir nicelemedir. Böylece, kuşlar aleminde, en az bir tane, uçuş eylemini gerçekleştiremeyen bir kuşun var olduğu anlatılmış ol-maktadır.

2.16.1. Evrensel Niceleme

Genelleme yapmak için kullanılan, her, bütün, hepsi, vb. niceleyicilere *Evrensel Niceleyici* adı verilir ve bunu temsil etmek üzere $\forall$ sembolü kullanılır. Evrensel nicelenmiş bir açık önerme,

$$\forall x, P(x)$$

yazılarak gösterilir.

2.16.2. Varlıksal Niceleme

Bazı, Bazısı, En az biri, sadece biri, vb. gibi sözcüklerle nicelenmiş olan ve ti-kelliği ifade eden nicelemeye *Varlıksal Niceleme* adı verilir ve bunu göstermek üzere $\exists$ sembolü kullanılır. Varlıksal nicelenmiş bir açık önerme,

$$\exists x, P(x)$$

şeklinde ifade edilerek gösterilir.

2.16.3. Nicelikli Önermelerin Doğruluk Değeri Analizi

Nicelikli önermelerin, yukarıdaki tanımlardan anlaşılacağı gibi, açık önermeler ya da açık önerme polinomları olacağı bilinmektedir. Öyleyse bütün bu işlemler $P(x)$ in tanımlı olduğu tanım kümesi (Evren) için geçerli olacaktır. $P(x)$ in nicelenme cinsine göre, aşağıdaki saptamalar yapılabilecektir.

Öncelikle nicelenmiş bir açık önermenin, ilk örneklerden yola çıkılarak ne anla-ma geldiğini araştıralım.

Bütün insanlar ölümlüdür. = İnsan olan herkes ölümlüdür = İnsan olan her x, ölümlü bir x dir. Her x için ; x insan ise x ölümlüdür. = $\forall x, (x \text{ bir insandır.}) \Rightarrow (x \text{ ölümlüdür.})$

çözümlemesi yapılabilecektir. Bu bağlantıları, beynimizde, mantıki doğruluk arayarak oluşturmaktayız. Böylece mantıki bağlamları oluşturacak bir yapıya

ulaşmış bulunmaktayız. Burada " x, bir insandır." ve " x, ölümlüdür." ayrı birer önerme olup, açık önerme oldukları da kolayca saptanabilmektedir. Bunlar sırasıyla p(x) ve q(x) ile gösterilirlerse, bu örnekten bir genel ifadeye geçiş sağlanmış olacaktır. Bu ise

$$\forall x, [p(x) \Rightarrow q(x)]$$

şeklinde gerçekleşecektir. p(x) ve q(x) aynı bir E(x) evreninde tanımlanmış olduklarından, bunun doğruluğunun belirlenmesinde, E(x) evrenine göre bir yorum verilmiş olacaktır. Evrensel nicelikli önerme için oluşan yapıdan sonra şimdi de Varlıksal nicelikli önerme için oluşan yapıyı araştıralım. Yine ilk ör-neğimizden hareket ederek bir çözümleme (analiz) gerçekleştirelim.

Bazı kuşlar uçamaz = Uçamayan kuşlar vardır. = En az bir kuş vardır ki uçmaz. = En az bir x için, x bir kuştur ve x uçamaz. = $\exists x [(x, \text{bir kuştur.}) \vee (x, \text{uçamaz})] = \exists x, [(x, \text{bir kuştur.}) \wedge (x, \text{uçamaz})]$

Bütün bu çözümleme, öncekinde olduğu gibi, beynimizin mantıki doğruları düzenlemesiyle gerçekleştirilmiştir. Görülüyor ki, burada da bir mantıki düzen kurulmaya çalışılmıştır. " x bir kuştur." ve " x uçamaz." ayrı birer açık önerme olup bunlar sırasıyla p(x) ve q(x) ile gösterilirse, bu nicelikli önerme için bir genel ifade yazılabilecektir. Bu da,

$$\exists x, [p(x) \wedge q(x)]$$

şeklinde gösterilecektir.

Bu yapılar oluştuktan sonra, daha genel anlamda bir *doğruluk değeri analizi* yapmak olanağı sağlanmış olmaktadır. Şöyle ki, artık bunlar örneklerimizi aşarak genel ifadeler olduğundan, E(x) evrenine göre tanımlanmış p(x) ve q(x) açık önermeleri için bu nicelikli önermelere ait yapılacak çözümlemeler, bu kalıplar yardımıyla açıklanabilecek tüm önermeler için de geçerli olacaktır. Örneğin,

Bazı insanlar sporcudur.

denildiği zaman da aynı niceleme (Varlıksal niceleme) kalıbı ve çözümlemesi geçerli olacaktır. Keza,

Bütün insanlar güler.

nicelikli önermesi (Evrensel niceleme) için de genel kalıba ait yorum geçerli olacaktır.

Burada açık önermeler yerine *açık önerme polinomları'* nin bulunduğunu varsaymak, probleme daha da boyut kazandıracaktır.

Nicelikli önermelerin doğruluk değeri analizi yapılmasında, değişik yöntemler uygulamak olanaklıdır. Bunların hepsinden söz etmek gerekmemektedir. Boole Cebiri konusu için gerekli olan alt yapıyı oluşturduğumuz düşünülürse, o konu da işlenirken yararlı olacak yöntemin ya da yöntemlerin seçilmesi, daha akılcı bir yaklaşım olarak görülmektedir. Burada *temel problem*, ister evrensel nice-lenmiş ister varlıksal nicelenmiş açık önerme olsun, *doğruluk değer kümesi'* nin belirlenmesidir. Öyleyse ilke olarak, açık önermelerdeki analizin bir türü bu-rada kullanılacak demektir. Bu da evrenin elemanları için *örnek önermeler'*in hesaplanmasından sonra, nicelemelerin tanımlarından ve ortaya çıkan kalıplar- dan hareket edilerek yapılacak düzenleme sonunda belirlenecektir.

2.16.4. Nicelikli Önermeler İçin Açılım Yöntemi

Bir $E(x)$ evreninde tanımlanmış $P(x)$ açık önerme polinomunun doğruluk değeri analizi yapılmasında ve doğruluk değer kümesinin saptanmasında etkin uygulamalardan biri *açılım yöntemi'*dir. Ancak bu yöntemin uygulanabilmesinin ön koşulu, evrenin sonlu sayıda, nesnel elemanlardan oluşmasıdır. Yöntem hakkındaki temel oluşum yasasıyla birlikte yoruma ilişkin açıklamalar aşağıda-dır. Buradaki açıklamalar her ne kadar teorik bir evren için yapılmış da olsa, değerlendirmede bu elemanların tanımlı olduğu varsayılacaktır.

$E(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ evreninde tanımlanmış açık önerme polinomu $P(x)$ olsun. Bunun, evrenin elemanlarıyla yapılan değerlendirmeleri sonunda $P(x)$, önermelerden oluşan bir önerme polinomuna dönüşecek ve bunun da bir doğruluk değeri olacaktır. Bu doğruluk değerlerine göre, Evrensel ya da Varlıksal nicelikli oluşuna göre, oluşan açılıma bir yorum getirilecektir.

$$\forall x, P(x)$$

ile Evrensel Nicelenmiş açık önerme gösterilmektedir. Evrensel Niceleme tanı-mına göre, $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ ile elde edilen değerlerin tümünün **doğru** olması gerekmektedir. Önceden biliyoruz ki, bunun , açık önermenin **doğru** olması için bir zorunluluk olarak kabul edilmesi halinde bu yapı ancak ve ancak bir $\forall$ ' li bileşim olarak düzenlenmesi gerekmektedir. Aksine yaklaşılsa, $P(x_i)$ değerlerinden biri dahi **yanlış** olsa, bunun kabul edilebilir olmadığı ancak

bu şekilde test edilebilecektir. Yani sonuç yanlış olacaktır. Şimdi bu açıklamalar ışığında, evrensel nicelenmiş bir açık önerme için açılım yasasının,

$$\forall x, P(x) = P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

şeklinde gerçekleşeceği anlaşılmaktadır.

Bu kez Varlıksal Nicelikli bir açık önerme polinomu için konuyu tartışalım. Yine $E(x)$ evreninin yukarıda olduğu gibi verildiği varsayılmaktadır.

$$\exists x, P(x)$$

ile gösterilen bu nicelme şeklinde, *örnek önermeler'* den en az birinin **doğru** olması halinde nicelmenin tanımına uyan sonuç gerçekleşmiş olacaktır. Bu ise, yine tanımlardan anımsandığı gibi bir VEYA' lı bileşimle sağlanabilecektir.

Bu açıklamalar ışığında, varlıksal nicelenmiş bir açık önerme için açılım yasası,

$$\exists x, P(x) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$$

şeklinde gerçekleşecektir.

Örnek : $E(x) = \{0,2,4,6\}$ evreninde tanımlanmış $P(x) = [(x > 2) \Rightarrow (x^2+1 = 0)]$ açık önerme polinomu veriliyor. $\forall x, P(x)$ ve $\exists x, P(x)$ nicelikli önermelerinin bu evrende geçerli olup olmadığını araştıralım. Açılım yasaları uygulanmak üzere, öncelikle örnek önermeleri belirleyelim. Biliyoruz ki,

$$\forall x, P(x) = P(0) \wedge P(2) \wedge P(4) \wedge P(6)$$

$$\exists x, P(x) = P(0) \vee P(2) \vee P(4) \vee P(6)$$

açılımlarından yararlanılacaktır.

$$x = 0 \text{ için : } P(0) = [(0 > 2) \Rightarrow (0+1 = 0)] = Y \Rightarrow Y = D ,$$

$$x = 2 \text{ için : } P(2) = [(2 > 2) \Rightarrow (4+1 = 0)] = Y \Rightarrow Y = D ,$$

$$x = 4 \text{ için : } P(4) = [(4 > 2) \Rightarrow (16+1=0)] = D \Rightarrow Y = Y ,$$

$$x = 6 \text{ için : } P(6) = [(6 > 2) \Rightarrow (36+1=0)] = D \Rightarrow Y = Y ,$$

olarak, yukarıdaki açılımlara uygulanır ve her bileşenin doğruluk değeri açılımdaki yerlerine yazılır.

$$\begin{aligned}\forall x, P(x) &= D \wedge D \wedge Y \wedge Y = Y \\ \exists x, P(x) &= D \vee D \vee Y \vee Y = D\end{aligned}$$

sonuçları elde edilecektir. Bunlara bakarak, ilk nicelikli önermede sonucun Y olması, bunun tanımlı olduğu evren için *geçerli olmayan* bir nicelikli önerme olduğunu saptarız. Oysa, ikinci nicelikli önermede sonucun D olması, bunun tanımlı olduğu evrende *geçerli* olduğunu ifade edecektir.

2.16.5. Nicelikli Önermeler İçin Değilleme

Önermelerde olduğu gibi *değilleme* kavramı, nicelikli önermelerde de önemli bir inceleme alanıdır. Buna bağlı olarak oluşan *değilleme yasaları* aşağıdadır :

$$\sim \forall x, P(x) = \exists x, \sim P(x) \quad ; \quad \sim \exists x, P(x) = \forall x, \sim P(x) .$$

Bunlara **De Morgan** ilişkileri de denilmektedir. Çünkü bu ilişkilerin esası ve doğruluklarının (varlıklarının) gösterilmesi De Morgan denklikleri yardımıyla sağlanabilmektedir. Bunlardan ilki için, bir *teorik evren* seçerek, kanıtlamayı burada gerçekleştirirken , diğeri için benzeri işlemlerin yapılarak kanıtlanmasını da okuyucuma bir ödev olarak bırakıyorum.

Teorik Evren seçilirken gözetilecek olan kural şudur : Evrenin en az eleman sayısı, açık önerme polinomundaki farklı önermelerin sayısı n olduğu takdirde 2 nin n. kuvveti kadar, yani 2^n olmalıdır. Bu seçime göre bir genelleme yapılması olanağı vardır. Bu kurala göre, $\sim \forall x, P(x)$ de bir önerme görüldüğü için $[P(x)]$, $n = 1$ ve yani iki elemanlı bir teorik evren seçmek yeterli olacaktır.

$E(x) = \{a, b\}$ olsun. Buna göre, açılım yöntemi uygulanacağı düşünülürse, aşağıdaki işlemler gerçekleşecektir :

$$\sim \forall x, P(x) = \sim [P(a) \wedge P(b)] = \sim P(a) \vee \sim P(b) ; \exists x, \sim P(x) = \sim P(a) \vee \sim P(b)$$

Burada her iki sonuç karşılaştırılırsa, tamamen aynı oldukları görülür. Demek ki $P(x)$ in içeriğini bilmeden, seçilecek bir teorik evren yardımıyla, doğruluğu (varlığı) kanıtlanmış bir yasa oluşturulabilmiştir. Bunun sağlanmasında, özellikle De Morgan'dan yararlanıldığına dikkat edilmelidir.

Bu değilleme yasaları dışında, *çift değilleme* olarak adlandırılan aşağıdaki ilişkiler de geçerlidir :

$$\forall x, P(x) = \sim \exists x, \sim P(x) \quad ; \quad \exists x, P(x) = \sim \forall x, \sim P(x) .$$

2.16.6. Genel Nicelenmiş Önergeler

Bu alt-başlık altında konu, değişken ve ona bağlı olarak niceleme çeşitlemesi yönünden biraz daha genişletilmiş olmaktadır. Burada artık açık önermenin de-ğişken sayısının iki ya da daha fazla olduğu varsayılmakta ve bu de-ğişkenlerin herbiri için bir niceleme yapıldığı düşünülmektedir. Ancak burada konu, daha çok iki de-ğişkenli önergeler üzerinde çalışılarak geliştirilecek ve elde edilen bulgular yardımıyla genelleştirilme yapılacaktır. Aksine gelişecek özel durum-lar ise, doğal olarak belirtilecektir. Ayrıca burada, evrenin o şekilde verilmesi gerekmektedir ki, de-ğişkenlerin hepsi için, tanım aralıkları belirtilmiş olsun. Eğer evren, de-ğişkenlere göre ayrı ayrı tanımlar vermiyor, sadece nesnel ele-manlardan oluşuyorsa, bu elemanlar tüm de-ğişkenlere ait demektir.

Bir $E(x,y)$ evreninde tanımlanmış bir $P(x,y)$ açık önerme polinomu için nicele-me çeşitlemesi şu şekilde oluşur :

$$\begin{array}{ll} \forall x, \forall y ; P(x,y) & , \quad \forall x, \exists y ; P(x,y) \\ \exists x, \forall y ; P(x,y) & , \quad \exists x, \exists y ; P(x,y) \end{array}$$

Görülüyor ki burada da yine 2^n kuralı geçerli olmaktadır. Nitekim, de-ğişken sayısı üç olması halinde sekiz çeşit niceleme oluşacaktır. Bu da $2^3 = 8$ demektir. Böylece devam edecektir. Buradaki işlemler de *ikili (dual) sistem'* e uyum göstermektedir.

Bu oluşum ve gelişimler için *temel problem* yine öncekinde olduğu gibi, tanım- lı olduğu evrende nicelikli önermenin geçerli olup olmadığının araştırılmasıdır. Bu amaçla yapılacak inceleme yani *doğruluk değeri analizi* için uygulanacak bir yöntem, yine *açılım yasaları* olacaktır. Burada da temel yaklaşım de-ğişme-mekte, ancak niceleme sırasına bağlı olarak bazı düzenlemelerin yapılması ge- rekmektedir. Buna dair bir açıklama aşağıda verilmiştir.

$E(x,y)$ evreninde tanımlı bir nicelikli önerme $\forall x, \exists y ; P(x,y)$ olarak verilmiş olsun. Evren öyle seçilmelidir ki, yukarıda verilen kural gereğince,

$$E(x,y) = \{x,y \mid x = (x_1,x_2) ; y = (y_1,y_2)\}$$

şeklinde ikişer elemanlı kümelerden oluşan bir küme olması yeterlidir.

$$\begin{aligned}\forall x, \exists y ; P(x,y) &= \forall x, [\exists y ; P(x,y)] = \forall x [P(x,y_1) \vee P(x,y_2)] = \\ &= [P(x_1,y_1) \vee P(x_1,y_2)] \wedge [P(x_2,y_1) \vee P(x_2,y_2)]\end{aligned}$$

Bu hesaplama sırasında, işlem önceliğinin önermeye en yakın nicelemede olduğu saptanmış olmalıdır. Niceliklerin bu sırasına bağlı olarak, açılım yasalarının uygulamaya konulmuş olduğu görülmektedir. Açılım tamamlandıktan sonra ortaya çıkmış bulunan örnek önermeler birer doğruluk değeri vereceğinden, bunlara bağlı olarak sonuç D ya da Y bulunacaktır. Önceden de olduğu gibi, ulaşılan sonuç D ise nicelikli önermenin, tanımlı olduğu evrende geçerli olduğu söylenecektir. Y bulunmuşsa, nicelikli önerme, tanımlı olduğu evrende geçerli değildir demektir. Böylece açılım yasalarının, genel niceleme mantığı içinde de bir uygulama alanı ortaya çıkmış olmaktadır ki bu aynı zamanda bu tür nicelikli önermelerin incelenmesinde bir algoritma oluşturmaktadır.

ÖRNEK . $E(x,y) = \{x,y \mid x = (1,2,3), y = (2,3,4)\}$ evreninde tanımlanmış olan aşağıdaki nicelikli önermenin bu evrende geçerli olup olmadığı tartışılacaktır.

$$\exists x, \forall y ; [(x / y \in \mathbb{N}) \wedge (xy > 4)] .$$

Not : $\mathbb{N}$ ile doğal sayılar kümesi gösterilmektedir. Doğal sayılar, sıfır da dahil olmak üzere pozitif tam sayılardır.

Niceliklerin sıralanışına dikkat edilirse, bileşik önermeye yakınlığı nedeniyle öncelikle evrensel nicelemeden ve dolayısıyla y değişkeninden başlanacaktır. Bu kez, farklı bir çalışmayla, değerlendirmeleri ayrıca değil, işlemlerin içinde yapmış olalım :

$$\begin{aligned}\exists x, \forall y ; [(x / y \in \mathbb{N}) \wedge (xy > 4)] &= \exists x, \{\forall y ; [(x / y \in \mathbb{N}) \wedge (xy > 4)]\} = \\ \exists x, \{[(x / 2 \in \mathbb{N}) \wedge (2x > 4)] \wedge [(x / 3 \in \mathbb{N}) \wedge (3x > 4)] \wedge [(x / 4 \in \mathbb{N}) \wedge (4x > 4)]\} &= \\ \{[(1/2 \in \mathbb{N}) \wedge (2 > 4)] \wedge [(1/3 \in \mathbb{N}) \wedge (3 > 4)] \wedge [(1/4 \in \mathbb{N}) \wedge (4 > 4)]\} \vee & \\ \{[(2/2 \in \mathbb{N}) \wedge (4 > 4)] \wedge [(2/3 \in \mathbb{N}) \wedge (6 > 4)] \wedge [(2/4 \in \mathbb{N}) \wedge (8 > 4)]\} \vee & \\ \{[(3/2 \in \mathbb{N}) \wedge (6 > 4)] \wedge [(3/3 \in \mathbb{N}) \wedge (9 > 4)] \wedge [(3/4 \in \mathbb{N}) \wedge (12 > 4)]\} &= \\ \{[Y \wedge Y] \wedge [Y \wedge Y] \wedge [Y \wedge Y]\} \vee \{[D \wedge Y] \wedge [Y \wedge D] \wedge [Y \wedge D]\} \vee & \\ \{[Y \wedge D] \wedge [D \wedge D] \wedge [Y \wedge D]\} &= \{Y \wedge Y \wedge Y\} \vee \{Y \wedge Y \wedge Y\} \vee \{Y \wedge D \wedge Y\} = Y\end{aligned}$$

bulunacaktır. Bu sonuca göre, verilen nicelikli önermenin tanımlı olduğu evren-de geçerli olmadığı söylenecektir.

2.16.7. Bazı Temel Yasalar

Konuyla ilişkin olarak, fazlaca ayrıntılarına girmeden, ancak ilerideki çalışmalarımızda kullanılması olasılığına karşın bilinmesinde yarar bulunan bazı önem-li yasaların, kanıtlanması düşünölmeksizin ifade edilmesi uygun olacaktır. Bun-lar, ne amaçla düzenlendiklerine dair kısa açıklamalarıyla birlikte aşağıda ve-rilmişlerdir :

* Niceliklerin sırasının değıştirilebilmesi :

Aynı cins nicelikler ardışık olarak sıralanmışlarsa bunlar aralarında sıra değıştirebileceklerdir. Farklı cinslerin ardışık sıralı olması halinde sıra değıştirilmesi sonucu etkilemektedir. Bunlar şu şekilde ifade edilmektedir :

$$\begin{aligned} \forall x, \forall y ; P(x,y) &= \forall y, \forall x ; P(x,y) \quad , \quad \exists x, \exists y ; P(x,y) = \exists y, \exists x ; P(x,y) \\ \forall x, \exists y ; P(x,y) &\neq \exists y, \forall x ; P(x,y) \quad , \quad \exists x, \forall y ; P(x,y) \neq \forall y, \exists x ; P(x,y). \end{aligned}$$

* Evrensel önerme varlıksal önermeyi gerektirir :

Gerçekte bu önemli bir teorem olup, aşağıda olduğu şekilde ifade edilir ki doğruluğu kanıtlanmış olan bu ifade geçerlidir.

$$\forall x, P(x) \Rightarrow \exists x, P(x) .$$

* Değilleme yasaları :

Nicelikli önermeler için değilleme yasaları (De Morgan) niceleme sayısı ne olursa olsun aşağıda açıklandığı şekilde geçerlidir . Bunun için genel anlamda

verilen yasaya *Shannon Yasası* denir.

$$\sim f(P_1, P_2, \dots, P_n ; \sim, \wedge, \vee, \forall, \exists) = f(P_1, P_2, \dots, P_n ; -, \vee, \wedge, \exists, \forall)$$

Bu genel ifadeden daha özel ifadelere geçilirse, değilleme yasaları olarak aşağı-

ğıdaki denklikler de yazılabilecektir :

$$\sim \forall x, P(x) = \exists x, \sim P(x) \quad ; \quad \sim \exists x, P(x) = \forall x, \sim P(x)$$

$$\sim \forall x, \forall y ; P(x,y) = \exists x, \exists y ; \sim P(x,y)$$

$$\sim \forall x, \exists y ; P(x,y) = \exists x, \forall y ; \sim P(x,y)$$

$$\sim \exists x, \forall y ; P(x,y) = \forall x, \exists y ; \sim P(x,y)$$

$$\sim \exists x, \exists y ; P(x,y) = \forall x, \forall y ; \sim P(x,y) .$$

* Ardışık gerektirme yasası :

Bu yasaya ilişkin uygulamalara rastlanılacaktır. Bu nedenle yasanın ifade edilmesinin yararı vardır.

$$\forall x, \{[p(x) \Rightarrow q(x)] \wedge [q(x) \Rightarrow r(x)]\} \Rightarrow \forall x, [p(x) \Rightarrow r(x)]$$

veya

$$\{\forall x, [p(x) \Rightarrow q(x)] \wedge \forall x, [q(x) \Rightarrow r(x)]\} \Rightarrow \forall x, [p(x) \Rightarrow r(x)]$$

dır.

* Bunların dışında , a) İndirgeme yasaları ; b) Daraltma yasaları ; c) Dağılma yasaları gibi başkaca yasalar oluşmuşsa da bunlar konumuzu yakından ilgilendirmediği için üzerlerinde durulmaya gerek görülmemiştir.

Yine de ilgilenecekler için, yazarın önceden sözünü ettiğimiz Modern Mantık adlı kitabı bu konuda yeterli bilgileri içermektedir. Bu kitaptan yararlanılabilir.

BÖLÜM 3

BOOLE ARİTMETİĞİ

3. 1. SAYI SİSTEMLERİNİN ANALİZİ

Harfler kullanılarak *dil*'in gerektirdiği elemanlar (sözcükler) oluşturulduğu gibi, aynı lojik yaklaşımla, rakamlar kullanılarak *sayılar* oluşturulmaktadır. Nasıl ki harflerin aynı olmasına karşın, bir dil'in kuruluş aksiyomlarına (gramerine) göre oluşan sözcükler bir başka dil için anlamsız ya da *yabancı sözcük* oluyor-sa, sayıların da kuruluş aksiyomlarına göre oluşumu, farklı tabanlarda gerçek-leştiğinde, biri diğer sisteme göre *yabancı bir sayı* olmaktadır. Hatta birinin kullandığı rakamlar yani semboller, diğer sayı sisteminde görülmemektedir.

Örneğin, ayrıntılarını aşağıdaki alt-bölümlerde inceleme konusu yapacağımız bazı sistemlerde kullanılan rakamlar, *on tabanlı sistem*'de **0,1,2,3,4,5,6,7,8,9** olmasına karşın, *iki tabanlı sistem*'de sadece **0** ve **1** ; *beş tabanlı sistem*'de **0,1,2,3,4** dür. Ancak ileride sözü edileceği gibi, bazı teknik nedenlerle *oniki* ya da *onaltı tabanlı sayı sistemleri*'nde, alışılmışın dışında yeni sembollerin kullanılması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Oniki tabanlı sistemde 9 dan sonraki sayıyı yani *on*'u göstermek üzere örneğin Δ , ondan sonraki sayı *onbir*'i gös-termek üzere de örneğin ∇ sembolleri kullanılabilir. Bazen bu gös-terimlerde on için **a** ve onbir için **b** kullanıldığı ya da α , β sembollerinin kullanıldığı görülebilmektedir. Demek ki önemli olan önceden yapılan kabulün belirlenmiş ve tanımlanmış olmasıdır. Daha sonra, kuramsal açıklamalarla birlikte değerlendirildiğinde, her sistemin ancak taban sayısı kadar *şifreyi (rakamı)* içerebileceği görülecektir. Buna göre , örneğin oniki tabanlı bir sistemin rakamları kümesi,

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\Delta,\nabla\}$$

şeklinde ifade edilmiş olacaktır.

Sayı sistemlerin tanıtımına bir bütünlük kazandırabilmek için, bunların *yazılma ve okunma kuralları*'nın da belirlenmiş olması gerekir. Bunlara dair ayrıntılı açıklamalar aşağıda verilecek olmakla birlikte, bir ön bilgi olarak, herhangi bir

tabanlı sayının yazılma kuralının, genel anlamda şöyle olacağı anlaşılmaktadır :

$a, t \in \mathbb{N}$ ve $t > 1$ olmak üzere u_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) ile sistemin basamaklarındaki rakamlar temsil edilmiş olsun. Burada $u_i < t$ dir. Bu koşullarda **a doğal sayısı'** nın **t tabanlı sistemde'** ki ifadesi , $n \in \mathbb{N}$ ile basamak sayısı gösterildiğine göre,

$$(1) \quad a = u_{n-1} \cdot t^{n-1} + u_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + u_2 \cdot t^2 + u_1 \cdot t + u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} u_i t^i$$

şeklinde dir. Böylece a doğal sayısının, t sayısını taban kabul eden bir sistemde ifade edilmesi yeteneği bulunduğu görülmektedir. Buna göre bu a sayısı ya

$$(2-1) \quad a = (\underbrace{u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0}_t)$$

şeklinde gösterilecek ya da,

$$(2-2) \quad a = \overline{u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0}_{(t)}$$

şeklinde ifade edilecektir. Burada, $u_{n-1}, \dots, u_1, u_0$ ile sistemdeki rakamlar temsil edilmektedir. Her biri bir *basamak* oluşturmakta ve bir bütünlük içinde a sayısını göstermektedirler. Burada tabanı temsil eden t , *radiks* olarak adlandırılmaktadır. Gerçekte (2-2) gösterilişinde, rakamların üstünde kullanılan çizgi işte bu bütünlüğü temsil etmek üzere konulmuştur. Oysa pratikte buna gerek yoktur ve kullanılmayacaktır. Yazım ve anlatım kolaylığı nedeniyle bu kitapta daha çok ve aksi gerekmedikçe, bu yazış (ifade) biçimi yeğlenecektir.

Bu açıklamaları pekiştirmek üzere, aşağıdaki örneği sadece şekil yönünden ve içerikten yoksun olarak inceleyelim :

On'luk sistemde $a = 37$ sayısının İki'lik sistemdeki karşılığı $a = 100101$ dir. Oysa böyle bir sayı on'luk sistemde " *yüzbinyüzbir* " olarak vardır. Öyleyse bu farkın yani bu sayının İki'lik sisteme ait olduğunun bir türlü belirtilmesi gerek-mektedir. İşte bu nedenledir ki,

$$a = 37_{10} = \overline{100101}_2 = 100101_{(2)}$$

yazılabileceği gibi, yukarıdaki diğer anlatım tarzına uygun olarak da yazılır :

$$a = (37)_{10} = (100101)_2$$

Bir karşılaştırma yapılırsa, genel ifadeye göre,

$$u_5 = 1, u_4 = 0, u_3 = 0, u_2 = 1, u_1 = 0, u_0 = 1$$

oldukları anlaşılacaktır.

Konuya girişte, harflerin oluşturduğu dil'lerden söz edilmiştir. Ancak görüyoruz ki *dilbilgisi (gramer)* oluşumları birbirine benzeyen veya karşılaştırılabilen dil'lerin birbirine *çevirisi (tercümesi)* olanaklıdır. İşte bu benzetme ile oluşan yaklaşımda olduğu gibi, sayı sistemlerinin de birbirine çevirisinden yani matematik dilindeki sözcüğüyle *dönüştürülmesi*'nden söz edilebilecektir. Çünkü hepsinin ortak grameri (1) ile ifade edilmiş bulunmaktadır. İşte bu lojik yaklaşımla, herhangi tabanlı sayı sistemlerinin birbirlerine dönüştürülmesi için oluşturulan yöntemler ve bu tür sayılarla işlemlere ilişkin operatörler, bu bölümün başlıca konularını oluşturacaktır.

3. 2. ON TABANLI SAYI SİSTEMİ (Desimal Sistem)

Bizlerce daha çok tanınan ve hemen bütün sayısal işlemlerimizde kullanılmakta olan **0,1,2,3,4,5,6,7,8,9** rakamlarının oluşturduğu kümenin elemanlarıyla yazılabilen sayılar, *Onluk Sayı Sistemi*'ne aittir. Bu sayıların çeşitleri ve diğer ayrıntıları şimdilik bizi ilgilendirmemektedir. Sayıların nasıl kurulduğu, hangi aksiyomlarla inşa edildiği, ne gibi çeşitleri ve özellikleri olduğu, hep on'luk sayı sistemi kriterlerine göre *Sayılar Teorisi* adıyla bilinen bir matematik disiplinin ilgi alanına girmektedir. Özellikle bu sayıların oluşturulma yasasının *Peano Aksiyomları* ile oluştuğu da bilinmektedir.

On'luk sayı sisteminde bir sayının yazılma ve okunma kuralları, herhalde önce-likli olarak incelenmelidir. Bir sayı içinde yer alan rakamların bulunduğu yerlere *basamak* adı verildiğinden daha önce de söz edilmiştir. On'luk sistemde bu basamaklar üçlü gruplar halinde sınıf değiştirmektedirler. Ancak basamaklar da yine özel adlar almaktadırlar. Aşağıda bu husus şematik olarak gösterilmiştir :

-----	__ Milyarlar__	__ Milyonlar __	__ Binler __	__ Birler __
	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

Bu çizelgede basamaklar numaralanarak gösterilmiş ve aşağıda karşılıkları olan adlar (basamakların adları) açıklanmıştır :

① : Birler , ② : Onlar , ③ : Yüzler , ④ : Binler , ⑤ : Onbinler , ⑥ : Yüzbinler , ⑦ : Milyonlar , ⑧ : Onmilyonlar , ⑨ : Yüz milyonlar , ⑩ : Milyarlar ⑪ : Onmilyarlar , ⑫ : Yüz milyarlar , - - - - -

Bu basamaklar uzayıp gitmektedir. Sembolik olarak gösterilen yerlerde daha başka basamaklar bulunduğuna göre acaba bunların adları nelerdir ? Bunu da aşağıda, *büyük sayılar* diye adlandırılan ve uluslararası düzeyde kabul edilmiş ve kullanılan sayılar olarak listelemiş oluyoruz. *

AVRUPA SİSTEMİ

Milyon	10^6
Milyar	10^9
Bilyon	10^{12}
Trilyon	10^{18}
Katrilyon	10^{24}
Kentilyon	10^{30}
Sekstilyon	10^{36}
Septilyon	10^{42}
Oktilyon	10^{48}
Nonilyon	10^{54}
Desilyon	10^{60}
Undesilyon	10^{66}
Düodesilyon	10^{72}
Tredesilyon	10^{78}
Katordesilyon	10^{84}
Kendesilyon	10^{90}
Seksdesilyon	10^{96}
Septendesilyon	10^{102}
Oktodesilyon	10^{108}
Novemdesilyon	10^{114}
Vijintilyon	10^{120}
Santilyon	10^{600}

AMERİKAN SİSTEMİ

Million	10^6
Billion	10^9
Trillion	10^{12}
Quadrillion	10^{15}
Quintillion	10^{18}
Sextillion	10^{21}
Septillion	10^{24}
Octillion	10^{27}
Nonillion	10^{30}
Decillion	10^{33}
Undecillion	10^{36}
Duodecillion	10^{39}
Tredecillion	10^{42}
Quattuordecillion	10^{45}
Quindecillion	10^{48}
Sexdecillion	10^{51}
Septendecillion	10^{54}
Octodecillion	10^{57}
Novemdecillion	10^{60}
Vigintillion	10^{63}
Centillion	10^{303}

* Büyük Larousse Sözlük ve Ansiklopedisi Cilt 20,
S. 10246 dan alınmıştır.

Burada her iki sistemin farkı, trilyon basamağından sonra ortaya çıkmaktadır. Avrupa sisteminde bu basamaktan sonra 6 lık grupta sistemine geçilmiş olmasına karşın, Amerikan sisteminde üçlü grupta sistemi, sonuna kadar değişmeden devam edip gitmektedir.

Bu açıklamalar ışığında On'luk düzendeki bir sayının, $t = 10$ olduğuna göre, (1) ile ifadesini bulan bir çözümlemenin nasıl yorumlanacağı, aşağıdaki örnek üzerinde incelenirse ;

$$\begin{aligned} 3743 &= 3000 + 700 + 40 + 3 = \\ &= 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 4 \times 10 + 3 = \\ &= 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \end{aligned}$$

demektir. Böylece bu sayı 10 tabanının kuvvetlerine göre ifade edilmiş ve (1) deki açıklamaya uygun olarak düzenlenmiş olmaktadır. Burada 10 nun kuvvet-leri için oluşan her terim bir basamağı temsil etmektedir. Böylece 10^0 lı basa-mak *birler basamağı* , 10^1 li basamak *onlar basamağı* , 10^2 li basamak *yüzler basamağı* , 10^3 lü basamak da *binler basamağı* gibi adlar almaktadır. Bu basa- maklardaki rakamlar ise o basamağın karakteristiğini oluşturmaktadır. Öyle ki On'luk sistemde bu rakamlar

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

kümesindeki elemanlardan ancak biri olabilecektir. Yukarıdaki örnekte bunlar, baştan itibaren sırasıyla 3 , 7 , 4 , 3 olarak görülmektedir. Böyle bir sayı, basa-maklara verilen özel adlarla birleştirilerek *üçbinyediyüzkırk üç* olarak okunabilmektedir. Bu ise $3743_{(10)} = 3743$ ile gösterilmektedir. Sadece On ' luk sisteme özgü olmak üzere taban sayısı yazılmamaktadır.

Bu kez örnek olarak 285,43 sayısını seçmiş olalım ve çözümlemesini yapmak isteyelim. Görüldüğü gibi bu bir *kesirli (ondalıklı)* sayıdır. Bunun (1) gereğince çözümlemesi,

$$\begin{aligned} 285,43 &= 285 + 0,43 = 285 + 43/100 = 2 \times 100 + 8 \times 10 + 5 + 4/10 + 3/100 = \\ &= 2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

şeklinde gerçekleşecektir.

Bu arada özel bir durum, basamaklarda 0 (sıfır) sayısının yer almasıdır. Bir basamakta sıfır varsa, buna karşılık olan basamakta rakam görülmesine karşın, ancak bu, çözümleme sırasında görülmeyecektir. Aksine yani karşıt bir yaklaşımla şu da söylenebilecektir : çözümleme düzeninde olması gerektiği halde görülmeyen bir terim varsa, onun katsayısı sıfır demektir. Örneğin 1084 sayısını çözümlenirse,

$$1084 = 1000 + 80 + 4 = 1 \times 10^3 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0 = \\ = 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

demektir. İlk çözümlemede 10^2 li basamak, katsayısı sıfır olduğu için görülme-mektedir. Kesirli sayıların çözümlemesinde de bu gibi hususlara dikkat edilme-si gerekmektedir. Örneğin $47/316$ gibi bir kesir sayı, ilk üç ondalık alınmak suretiyle,

$$\frac{47}{316} = 0,148734... = 0,149 = \frac{1}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{9}{10^3} = \\ = 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$$

şeklinde çözümlenecektir. Bu şekilde ifade edilmiş ve çözümlenmiş bu kesir sayısı, onbinde bir hatayla doğru çözümlenmiş olmaktadır.

3.3. SAYI SİSTEMLERİNİN HERHANGİ BİR TABANA GÖRE ÇÖZÜMLEMESİ

$t > 1$ ve $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere, t tabanına göre bir sayı yazmanın varlığına ve bunun tek türlü belirleneceğine dair teoremler aşağıda incelenmiştir. Bunlara *varlık* ve *teklik teoremleri* denir. Ancak önce bir yardımcı teoremin verilmesi gerekmektedir.

3.3.1. Yardımcı Teorem

t ile taban gösterildiğine göre, yukarıda belirtilen özellikte bir sayı a sayısı ve-rildiği takdirde, $a \in \mathbb{N}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$(3) \quad t^{n-1} \leq a < t^n$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir ve yalnız bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

Kanıt : t nin doğal sayılarla kuvvetlerinden oluşturulan küme K olsun.

$$K = \{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n, \dots\}$$

şeklinde bir küme gözönüne alınacak demektir. $t > 1$ ve $t^0 = 1 \in K$ dır. Demek ki $n = 0$ ın da karşılığı bu kümede yer alabilmektedir.

K kümesinin elemanlarından, a ya eşit ve a dan küçük olanlarının oluşturduğu kümeyi L ile gösterelim. Öyleyse,

$$L = \{x \mid x \in K, x \leq a\} \subset K \subset N$$

olduğu yazılabilecektir. $1 \in L$ olup, $L \neq \emptyset$ dir. L nin bütün elemanları a ya eşit ya da ondan küçük olacaklarından L bir *sonlu küme*' dir. Sonlu kümede, elemanlar doğal sayılardan oluşuyorsa, L nin elemanları arasında öyle bir tanesi vardır ki, diğerlerinden büyüktür. Bu eleman c ise $c \in L$ ve $L \subset K$ dan $c \in K$ olur. Öyleyse $c = t^n$ dir ve n yalnız bir tanedir.

K kümesinin bütün elemanları gibi $c \leq a$ dır. O zaman $c = t^n \leq a$ olur. Aynı zamanda $a < t^{n+1}$ dir. Çünkü $t^{n+1} \leq a$ olsaydı $t^{n+1} \in L$ olup, $t > 1$ için $t^{n+1} > t^n$ olduğundan L nin en büyük elemanı olan t^n den büyük, L de t^{n+1} gibi bir eleman olması gerekecekti. Oysa bu açıklama, yukarıda yapılmış olan kabul ile çelişmektedir. Demek ki $t^n \leq a < t^{n+1}$ eşitsizliğini sağlayabilecek, $n \in N$ olan ancak bir n doğal sayısı vardır ve bu tek türlü belirlenmektedir.

3.3.2. Teorem I (Varlık Teoremi)

Her a doğal sayısı ($\forall a \in N$) verilen t tabanına göre ($t > 1 \wedge t \in N$), (1) ile gös-terildiği gibi, $u_{n-1}, \dots, u_1, u_0$ ile rakamlar temsil edilmek üzere,

$$a = u_{n-1} t^{n-1} + u_{n-2} t^{n-2} + \dots + u_1 t + u_0$$

şeklinde ifade edilecektir. Bu gösterime karşın sayı, yukarıda belirtilen rakam-ların yer aldığı,

$$a = (\overline{u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0})$$

şeklinde ifade edilmiş olacaktır.

Kanıt : $a \in N$ olduğundan 1°) $a < t$; 2°) $a = t$; 3°) $a > t$ gibi üç farklı durumu ayrı ayrı incelemek ve tartışmak gerekmektedir.

1. $a < t$ olduğuna göre :

$t > 1$ olduğu anımsanırsa, t den küçük doğal sayılar ancak t tane olur (olabilir). Bu ise, bunların sonlu sayıda olduklarını gösterir. Bunlar, rakamlar kullanılarak

ifade edileceğinden $a < t$ için a , ancak bu rakamlardan biri ile gösterilecektir. Bu ise

$$a = u_0 = 0 \cdot t^{n-1} + \dots + 0 \cdot t + u_0$$

ifadesinde anlamını bulduğu şekilde gösterilebilir.

Örneğin $a = 4$ ve $t = 5$ olsun. $a < t$ koşulu $4 < 5$ olarak vardır. t den küçük doğal sayılar $4, 3, 2, 1, 0$ dır. Bunlar sayıca 5 tane yani t taban sayısı kadardır ve sonlu sayıda olacaklardır. a sayısı işte bu sayılardan ancak biri olabilecektir ve nitekim örneğimizde $a = 4$ tür. a , artık bu kümedeki diğer sayılardan biri ola-maz. Buna göre,

$$a = 4_{(5)}$$

yazılacaktır.

2. $a = t$ olduğuna göre :

Bu ancak $a = 1 \cdot t + 0$ olarak, yani $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ için olanaklıdır. Böylece 0 ve 1 rakamlarının kullanılmasıyla t tabanlı bir sistemde $10_{(t)}$ yazılarak gösterilir ve ancak bu **bir-sıfır** diye okunur. Bunun **on** olarak okunabilmesi, ancak On'luk düzende yani özel olarak $t = 10$ olması halinde olanaklıdır.

3. $a > t$ olduğuna göre :

$t > 1$ olarak, doğal sayılardan oluşan kuvvetler için

$$t^0 = 1, t^1 = t, t^2, \dots, t^{n-2}, t^{n-1}, t^n, t^{n+1}, \dots$$

dizisi oluşur. Konu olan a sayısı için aşağıdaki açıklanan iki durum gerçekleşir:

1 °) a doğal sayısı t nin, t den büyük doğal kuvvetlerinden sadece birine eşit olur.

2 °) a doğal sayısı, yukarıdaki dizinin elemanlarından hiçbirine eşit olamaz.

3 °) Diyelim ki $t < n$ olmak üzere $a = t^n$ dir ; ($n \geq 2$ için).* Bunun sağlanabil-mesi için

$$a = t^n = 1 \cdot t^n + 0 \cdot t^{n-1} + \dots + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 0$$

(*) n nin 2 den küçük olması halleri ilk iki şıkkın tartışması içinde yer almaktadır.

olmalıdır. Buna göre, katsayılarından hareket ederek

$$a = 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ (t)$$

yazılacaktır. Burada sıfırların sayısının n tane olduğu apaçık görülmektedir.

4°) a , t nin kuvvetlerinden hiçbirine eşit değilse, Yardımcı Teorem'den yararlanılarak, $t^n \leq a < t^{n+1}$ eşitsizliğini sağlayan n nin var olduğu ve tek türlü belirlenebileceği bilindiğinden, böyle bir n sayısı var demektir.

Kalanlı bölme kavramından hareketle,

$$[\exists u_{n-1} \in \mathbb{N} , \exists a_1 \in \mathbb{N}] \ni a = u_{n-1} \cdot t^{n-1} + a_1 \wedge 0 \leq a_1 < t^{n-1}$$

yazılabilecektir. Burada a_1 , a sayısının u_{n-1} ile bölümünden elde edilen kalanı göstermektedir ve kalanlı bölme olduğu için $a_1 \neq 0$ dır. Oysa yukarıda $a < t^{n+1}$ olduğu ifade edilmiştir.

$a = u_{n-1} \cdot t^{n-1} + a_1$ den, Teorem I (Varlık Teoremi) yardımıyla $t^{n-1} \cdot u_{n-1} \leq a_1 < t^n$ olur. Bunlar birlikte gözönüne alınırsa, $t^{n-1} \cdot u_{n-1} < t^n$ ile $t^{n-1} \neq 0$ olduğu bilindiğinden, sadeleştirilerek

$$u_{n-1} < \frac{t^n}{t^{n-1}} = t$$

bulunur. Bu bize, t tabanlı bir sistemde u_{n-1} in, bu sistemin rakamlarından ancak biri ile gösterilebileceğini ifade eder.

Özel olarak, $a_1 = 0$ ise, $a = u_{n-1} \cdot t^{n-1} + 0$ olur ki bu da

$$a = u_{n-1} \cdot t^{n-1} + 0 \cdot t^{n-2} + \dots + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 0$$

demektir. Buradan da a sayısının , t tabanlı bir sistemde

$$a = u_{n-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ (t)$$

yazılabileceği anlaşılır. İşte bu sayı içindeki u_{n-1} rakamı, sözü edilmiş olan rakamdır. Diyelim ki a_1 , t nin kuvvetlerinden herhangi birine eşittir. $a_1 = t^{n-2}$ olduğu takdirde,

$$a = u_{n-1} t^{n-1} + a_1 = u_{n-1} t^{n-1} + t^{n-2} = u_{n-1} t^{n-1} + 1 \cdot t^{n-2} + 0 \cdot t^{n-3} + \dots + 0 \cdot t + 0$$

yazılarak, t^{n-2} nin bulunduğu basamakta katsayının 1 olduğu, diğerlerinde 0 olacağı böylece görülebilecektir. Öyleyse bu koşula uyan örneğimizdeki a sayısı,

$$a = u_{n-1} 1 0 \dots 0 0_{(t)}$$

dır demektir.

Bu açıklamalara göre kalan $a_1 = 0$ ise ya da a_1 , t nin t^{n-1} den küçük bir doğal kuvvetine eşitse, a doğal sayısı, tabanı t olan bu sistemde ifade edilebilecek demektir. Esasen gösterilmek istenilen de budur. Ancak konu ile ilgili açıklamalar henüz bitmiş değildir.

a_1 kalanı, $k \leq n-1$ ve $k \in \mathbb{N}$ olduğuna göre, sıfırdan ve t^k dan farklı ise, 3.3.1. deki Yardımcı Teorem'den yararlanılarak, a_1 in $t^{n-2} < a_1 < t^{n-1}$ aralığında bulu-nacağı söylenebilecektir. Diğer taraftan a_1 kalanı, u_{n-1} ile bölümünde a_2 kalanını veriyorsa, $0 \leq a_2 < t^{n-2}$ olmak koşuluyla

$$a_1 = u_{n-2} \cdot t^{n-2} + a_2$$

yazılabilecektir. Eğer kalanlı bölmeyse, $a_2 \neq 0$ olmak koşuluyla,

$$u_{n-2} \cdot t^{n-2} \leq a_1$$

eşitsizliğini yazmamıza olanak sağlanmış olur. Yukarıda $a_1 < t^{n-1}$ olduğu ifade edilmiştir. Öyleyse bunlar birleştirilerek, eşitsizlik yönü de uygun olduğundan,

$$u_{n-2} \cdot t^{n-2} < t^{n-1}$$

yazılabileceği görülür. $t > 1$ için $t^{n-2} \neq 0$ olup $u_{n-1} < t$ bulunur. Bu ise u_{n-2} in bu sayının bir rakamı olduğunu ifade eder. Bu açıklamaya uygun işlem ve yazılışlar ardışık olarak sıralanırsa,

$$a = u_{n-1} \dots u_2 u_1 u_0 (t)$$

sayısının rakamlarının, kuramsal olarak nasıl elde edilebilecekleri görülmüş ol-maktadır. Burada herbiri, t taban sayısından küçük olmak koşuluyla u_{n-1} , $\dots$, u_0 lar, a sayısının rakamlarını oluşturmaktadırlar.

3.3.3. Teorem II (Teklik Teoremi)

Bir doğal sayının bir t tabanına göre yazılışı tek türlü belirlenir.

Önceden seçildiği gibi, doğal sayı a ile gösterilmiş olsun. $t > 1$ olmak koşuluyla, bu tabana göre a doğal sayısı, (1) ile gösterildiği şekilde ifade edilmiştir.

$a \in \mathbb{N}$ için, (1) ile ifade edilen çözümlemenin, aynı tabanda kalındığına göre, bir başka türlü (ikinci bir şekilde) gerçekleşebileceğini varsayalım. Bu sayı, rakamları $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere v_i katsayılarından oluştuğu düşünülerek düzenlenirse,

$$a = v_{n-1} \cdot t^{n-1} + v_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + v_2 \cdot t^2 + v_1 \cdot t + v_0$$

şeklinde bir sayı çözümlemesi yazılmış olacaktır. Teoremin iddiası, hipotez geçince esasen, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere $u_i < t$ ve $v_i < t$ koşulları da bulunduğu göre, a sayısının tek türlü belirlenebilmesi için,

$$u_{n-1} = v_{n-1} ; u_{n-2} = v_{n-2} ; \dots ; u_1 = v_1 ; u_0 = v_0$$

olmasıdır.

a sayısının her iki şekilde yazılabileceği varsayımından hareket edilerek,

$$a = u_{n-1} \cdot t^{n-1} + u_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + u_1 \cdot t + u_0$$

$$a = v_{n-1} \cdot t^{n-1} + v_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + v_1 \cdot t + v_0$$

çözümlemelerinin varlığını kabul edelim. Her ikisinde de benzeri işlemler yapılarak aşağıdaki düzenlemeler sağlanırsa, t ile bölündükleri düşünüldüğünde,

$$a = t [u_{n-1} \cdot t^{n-2} + u_{n-2} \cdot t^{n-3} + \dots + u_2 \cdot t + u_1] + u_0$$

$$a = t [v_{n-1} \cdot t^{n-2} + v_{n-2} \cdot t^{n-3} + \dots + v_2 \cdot t + v_1] + v_0$$

olur. Bu ifadelerden, a sayısının t ile bölümden elde edilen kalanların, sırasıyla u_0 ve v_0 oldukları anlaşılmaktadır. $u_0 < t$ ve $v_0 < t$ olup, bu bölme işlemi sonunda, bir sayısının bir sayıya bölümünün tek bir sayı olması gerektiğinden

$$u_0 = v_0$$

sonucu bir zorunluluktur. Bölüm olan ifade b ile gösterilsin. Bu yukarıdaki bölme işlemlerinde parantezlenmiş ifadeler olarak görülmektedir.

t ile bölünerek,

$$b = t [u_{n-1} \cdot t^{n-3} + u_{n-2} \cdot t^{n-4} + \dots + u_3 \cdot t + u_2] + u_1$$

$$b = t [v_{n-1} \cdot t^{n-3} + v_{n-2} \cdot t^{n-4} + \dots + v_3 \cdot t + v_2] + v_1$$

elde edilecektir. İlk adımdaki iddia ve açıklamalar burada da aynen geçerlidir. Sonuç olarak her ikisinde de aynı bir b sayısı aynı bir t sayısı ile bölünmüştür. Öyleyse kalanları da aynı olmalıdır. Kalanların tek türlü belirleneceği ilkesinden hareket ederek,

$$u_1 = v_1$$

olması gerektiği yazılabilecektir. Aynı iddia, bölümler için de geçerlidir. Öyleyse bu bölme işleminden ortaya çıkan bölüm c ile gösterilirse, her iki durumda

$$c = u_{n-1} \cdot t^{n-3} + \dots + u_2$$

$$c = v_{n-1} \cdot t^{n-3} + \dots + v_2$$

olacaktır. Bunlar da t ile bölünerek ifade edilirse, artık anlaşıyor ki bunlardan elde edilen kalanların eşitliği söz konusu olacaktır. Bunun sonucunda da

$$u_2 = v_2$$

yazılacaktır. Bu işlemlere ardışık olarak devam edildiği takdirde, sonuçta

$$u_3 = v_3 ; \dots ; u_{n-1} = v_{n-1}$$

ilişkilerinin bulunduğu görülecektir. Bu şekilde, a sayısının basamaklarındaki rakamların farklı olamayacağı gösterilmiş olmaktadır. Bu ise sayının tek türlü çözümlenebileceğini ifade eder.

Aynı teoremden farklı bir yaklaşım da $m \neq n$ olmak üzere aşağıdaki gibi iki çö- zümlemenin olanaklı olduğu düşüncesidir. Buna göre aynı a doğal sayısının,

$$a = u_{n-1} \cdot t^{n-1} + u_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + u_2 \cdot t^2 + u_1 \cdot t + u_0$$

$$a = v_{m-1} \cdot t^{m-1} + v_{m-2} \cdot t^{m-2} + \dots + v_2 \cdot t^2 + v_1 \cdot t + v_0$$

şekillerinde çözümlenebilerek ifade edileceği varsayılmaktadır.

Temelde uygulanacak işlemler ilkiyle aynı olacaktır. Ancak $m \neq n$ olmasından kaynaklanan bir yorum farkı oluşacaktır. Çünkü çözümlemelere dikkat edilirse, ikincisinde $m > n$ olduğu takdirde,

$$a = v_{m-1} \cdot t^{m-1} + \dots + v_n \cdot t^n + \dots + v_1 \cdot t + v_0$$

olduğu düşünölebilecektir. Görölüyor ki $v_{m-1} \cdot t^{m-1} + \dots$ ile temsil edebileceğimiz bir toplam grubu ilk çözümlemede yoktur. İşte yorum farkı bunun için gerekli olacaktır.

İlk kısımda olduğu gibi t ile bölme işlemleri yapılarak düzenlemeler burada da tekrar edilecektir. İlk adım,

$$a = t [u_{n-1} \cdot t^{n-2} + \dots + u_2 \cdot t + u_1] + u_0$$

$$a = t [v_{m-1} \cdot t^{m-2} + \dots + v_2 \cdot t + v_1] + v_0$$

olarak ifade edilecektir. Buradan kalanların eşitliği yazılarak $u_0 = v_0$ bulunur. Devam edilir ve ardışık işlemler yapılırsa n . adımda , $u_1 = v_1$; ... ; $u_{n-1} = v_{n-1}$ oldukları (olması zorunluluğu) gösterilmiş olacaktır. Bunlar için ikinci çözüm-leme ifade edilirse,

$$\begin{aligned} a &= v_{m-1} \cdot t^{m-1} + \dots + v_n \cdot t^n + v_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + v_1 \cdot t + v_0 \\ &= v_{m-1} \cdot t^{m-1} + \dots + v_n \cdot t^n + u_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + u_1 \cdot t + u_0 \\ &= v_{m-1} \cdot t^{m-1} + \dots + v_n \cdot t^n + a \end{aligned}$$

yazılacaktır. Burada son ifadede a sayısı, ilk çözümlemenin karşılığı olarak gel-miştir. Buradan son bir işlemle

$$v_{m-1} \cdot t^{m-1} + \dots + v_n \cdot t^n = 0$$

olduğu ifade edilebilecektir. Demek ki $m \neq n$ olarak alınmak suretiyle yapılan iki farklı çözümlemenin de gerçekte tek türlü olduğu bu şekilde belirlenmiş ol-maktadır. Buradan kolayca $v_{m-1} = 0$, ... , $v_n = 0$ oldukları görölebilmektedir.

Bütün bu araştırma ve kanıtlar sonunda, a doğal sayısı nasıl çözümlenirse çözümlensin, bunun ancak tek türlü gerçekleşeceği artık anlaşılmış olmaktadır.

Sonuç olarak , böylece herhangi bir t tabanına göre geçerliliği kanıtlanmış bu teoremler yardımıyla, sayı sistemlerinin analizi (çözümlemesi) yapılırken, önemli sayılabilecek iki tartışma konusu geride bırakılmış olmaktadır. Böylece bir t_1 tabanına göre ifade edilmiş bir sayının, bir t_2 tabanına göre yazılabileceği artık kesin olarak bilinmektedir. Önemli bir bilğimiz de bunun ancak tek türlü gerçekleşeceğidir.

3. 4. İKİ TABANLI SAYI SİSTEMİ (Binary Sistem)

Konumuz için öncelikli ve Boole Cebiri için gerekli olan sayı sistemi ; rakamları 0 (sıfır) ve 1 (bir) den ibaret , iki tabanlı ($t = 2$) sayı sistemidir. Bu iki rakamın tekrarlı varyasyonlarıyla elde edilen sayılar, *Binary Sayı Sistemi* olarak da adlandırılan bu sistemin sayılarını oluştururlar. Ancak bu sayıların okunmasında, basamaklara özel adlar verilmiş olmadığı için, on'luk düzende olduğu gibi sayıların adları bulunmadığından, oldukça sıkıntı yaşanır. Sayının rakamlarının sıralanışına bakılarak, rakamlar *sıfır* ve *bir* diye sıralı olarak okunur. Örneğin, iki tabanlı bir sayı sistemine ait olan ki bu belirtilmiştir ;

$$1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ (2)$$

sayısını okuyabilmek için : [bir - sıfır - sıfır - sıfır - bir - bir] demek gerekmektedir. Bu, bir a doğal sayısının karşılığı olan sayı ise,

$$a = 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ (2) = u_5\ u_4\ u_3\ u_2\ u_1\ u_0\ (2)$$

olarak ifade ediliyor demektir. Burada, rakamların kuramsal olan ifadeyle karşılaştırılması yapılırsa,

$$u_5 = 1 , u_4 = 0 , u_3 = 0 , u_2 = 0 , u_1 = 1 , u_0 = 1$$

demektir. Bu açıklama, başta kuramsal olarak yapılan çalışmalara da bir açıklık kazandırmış olmaktadır. Orada soyut olarak, varsayıma dayalı görüşlerimizin ve buna bağlı kuramsal oluşumların karşılıklarını bu örneklerle somutlaştırmış olmaktadır. Genel ifadenin (1) ile verildiği şekilde

$$a = u_{n-1} \cdot t^{n-1} + u_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + u_2 \cdot t^2 + u_1 \cdot t + u_0 = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot t^i$$

olduğu anımsanırsa, $t = 2$ olduğundan ve $0 \leq u_i \leq t - 1 = 2 - 1 = 1$ koşulu için, bu sistemde u_i rakamlarının ancak 0 ve 1 olabileceği anlaşılmaktadır.

Örneğin , $1\ 0\ 1\ 1\ 1\ (2)$ çözümlenirse,

$$\begin{aligned} a = 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ (2) &= u_4.t^4 + u_3.t^3 + u_2.t^2 + u_1.t + u_0 = \\ &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

demektir.

Eğer bu sistemde bir sayı kesirliyse, onun ne şekilde çözümlenebileceği aşağıda açıklanacaktır. Ancak hemen belirtilmelidir ki bu tür sayılar artık bir *ondalıklı* sayı değildir. Çünkü bu deyim, sadece On'luk sistemde kullanılır. Hatta bu konuda çok ince bir düşünceyle, kesirli kısım On'luk sistemde virgöl ile ayrılırken, Binary Sayı Sisteminde ve diğerlerinde virgöl yerine *nokta* kullanılır ve buna *radiks noktası* adı verilir.

Kesirli bir sayı ikilik sistemde örneğin $1100.01_{(2)}$ görüntüsündedir. Çözümleme sırasında kesirli kısımda bulunan basamaklar için, taban sayısının negatif kuvvetleri kullanılır. Bu aşağıda örneklenmiştir :

$$1100.01_{(2)} = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 + 0.2^{-1} + 1.2^{-2} .$$

Bu husus On'luk düzende de gösterilmiş ve uygulanmış olup, kuramsal yaklaşımda herhangi bir fark bulunmamaktadır.

Bu tür sayıların incelenmesinde üç temel problem vardır. Bunlar

a) Çözümleme , b) Taban değiştirme , c) İşlemler (Toplama, çarpma)

olarak sıralanabilir. Buraya kadar olan çalışmalarda daha çok çözümleme üzerinde durulmuştur. Konu itibariyle *İkilik Sistem'* den söz edildiği için, öncelikle bu tabandaki sayılar için *taban değiştirme (dönüştürme)* problemleri incelenmektedir. Doğal olarak bunu da yine öncelikle On'luk sistemle karşılıklı olarak gerçekleştirip, daha sonra konuyu genelleştirerek, oluşan fikir ve yöntemlerden de yararlanmak suretiyle herhangi tabanlı sayılarda da bu uygulamaların nasıl yapıldığına şöyle bir değinilecektir.

Boole Aritmetiği deyimini belki ilk kez bu kitapta, İkilik Sistem (Binary Sistem) sayılarına özgü aritmetik için kullanılmıştır. Çünkü biliyoruz ki bu sayı sistemlerine geçiş modern mantıkla birlikte gerçekleşmiş ve gelişmiştir. Boole Cebirinin varlığı da bu sayı sisteminin varlığına koşuttur. Kullanacağı sayısı olmayan bir cebir düşünölemeyeceğine göre, George Boole herhalde cebirini kurmadan önce bu sayı konusunu çözümlemiş veya en azından kendi cebiri için uygulana- bilir hale getirmiştir. Öncelikle buradaki uyum, yani *dual sistem* içinde çözümleme işleri hem sayılarda, hem cebirde ve göreceğiz ki hem de fonksiyonlarda tam bir bütünlük ve koşutluk içinde gelişecektir. Bunun uygulama alanlarına geçildiğinde, *lojik devreler'* in de bu sisteme uyum sağlayacak şekilde düzenlemeleriyle çok ilginç işler yapılmış olduğu görülecektir.

Bu açıklamalar ışığında doğal olarak, konuya hem kavramsal boyut kazandırmak hem de uygulama alanlarını genişleterek işe çok daha geniş bir performans kazandırmak amacıyla bu kadarla yetinilmemiş ve başkaca sayı sistemlerinin de konu içine çekilmesi uygun görülmüştür. Hatta o kadar ki Oniki ve Onaltı ta-banlı sayı sistemlerinden bile söz edilmiştir. İşte bu tabandaki sayı sistemlerinin Boole Aritmetiği başlığı altında incelenmesi de yadırganmamalıdır. Çünkü egemen olan düşünce ve çözümleme biçimi kuramsal düzeyde bütün bu sistemlerde aynı olduğu için, genelleme yoluyla ortaya konan teorileri de kontrol etmiş olmak ve genel olgu içinde test etmiş olmak gibi bir faydayı gözardı etmemek lazımdır. Kaldı ki sayılar hakkındaki gelişmeler o kadar yenidir ki, yüzyıllardır sayıları kullanan insanlar, onun ne olduğunu anlamak ve tanımlamak çabasına ancak XIX. yüzyılın sonlarında girmişlerdir ki bunun öncüsü Peano, ilk bölümde de sözü edildiği gibi, Boole ile çağdaştır.

Burada tartışma konusu yapılabilecek bir ayrıntı da *kümeler* hakkındadır. Modern Mantık ve dolayısıyla tüm aksiyomları ona bağımlı olan Boole Cebiri, temelde *Kümeler Teorisi'* ni araç olarak bolca kullanır. Oysa bakıyorsunuz, özellikle XIX. yüzyıl matematikçileri çağdaş yorumlarında, kümeler teorisindeki gelişmelerinde modern mantıktan yararlanmaktadırlar. Burada adeta bir ikilem (kısır döngü) yaşanmaktadır. Ben iyimser bir yaklaşımla, zaman faktörünü bir başka boyut olarak görüp, birbirlerini zaman içinde tamamladıkları şeklindeki kanaatimi ifade etmek isterim. Konumuz ilerlediğinde görülecektir ki bu anlatım ve açıklamalar çok daha değer kazanacaktır. Ancak neresinden bakılırsa bakılsın, çağdaş yaklaşım ve konunun ortaya çıkmasından çok kısa sayılabilecek bir sürede teknolojik uygulamaların ortaya çıkışı, bu arada özellikle yüz-yılın matematikçisi kabul edilen **John Von NEUMANN'** ın *Sayısal Analiz (Nümerik Analiz)*' i kurmuş olması ve makina dilinin matematiğini oluşturması, konunun hızla gelişmesi için uygun ortamlar olarak düşünülmelidir.

3.4.1. İki'lik Düzendan On'luk Düzene Geçiş

İki'lik sistemde bir sayının, on'luk sistemde hangi sayıya karşılık geldiği sorusunun yanıtı aşağıda açıklanmıştır. Burada yapılması gereken iş, açılımı 10 luk düzenin basamaklarına göre hesaplamaktır. Bu amaçla düzenlenmiş örnekler aşağıdadır : (Burada X ile, sayının on'luk düzendeki karşılığı gösterilmiştir.)

$$\begin{aligned}
 X = 1\ 0\ 0\ 1_{(2)} &= 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 1.8 + 0.4 + 0.2 + 1.1 = 8 + 1 = 9 ; \\
 X = 1\ 1\ 1\ 1\ 1_{(2)} &= 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 1.16 + 1.8 + 1.4 + \\
 &\quad 1.2 + 1.1 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 ;
 \end{aligned}$$

$$X = 1100.01_{(2)} = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 + 0.2^{-1} + 1.2^{-2} = \\ 1.8 + 1.4 + 0.2 + 0.1 + 0.1/2 + 1.1/4 = 8 + 4 + 0,25 = 12,25.$$

Son örnekte ikilik düzende bir kesirli sayının çözümlemesi yapılmış olup, tam ve kesirli kısımları ayıran yerde *radiks noktası* görülmektedir :

$$1100 . 01 \\ \text{↯ radiks noktası}$$

3.4.2. On'luk Düzenden İki'lik Düzene Geçiş

Temel problemlerden biri olarak ele alınan *dönüşüm* işlemlerinde, On'luk düzendeki bir sayıyı İki'lik düzende ifade edebilmek için çeşitli yöntemler ve uygulama biçimleri bulunmaktadır. Aşağıda temel kavramları içeren kuramsal uy-gulamaya ve bir de benim düzenlediğim bir yönteme yer verilmiş olacaktır. Bir de *kalanlı bölme* işlemlerine dayalı bir yöntem açıklanacaktır. Kuşkusuz yön-temlerin çokluğu o konuda uygulama esnekliği ve rahatlığı yaratacaktır. Çünkü herhangi bir nedenle uygulama güçlüğüyle karşılaşıldığında, yöntem değiştire-bilmek için seçenekler vardır.

Bu çalışmalara başladığım zamandan bugüne kadar kullandığım ve tarafımdan düzenlenen yöntem aşağıda açıklanmıştır. Bu yöntemin üstün yönü, dönüşüm sonunda ulaşılması gereken sayıyı, ayrıca bir yoruma ve düzenlemeye gerek duyulmaksızın, okunabilir biçimiyle tam olarak görmektir. Genel ifadesiyle uy-gulama için bir çizelge oluşturulursa, aşağıdaki yapı ortaya çıkmış olmaktadır.

Dönüştürülecek Sayı	2^n	2^{n-1}	...	2^2	2^1	2^0
Bölme İşlemleri	u_n	u_{n-1}	...	u_2	u_1	u_0
.....						
.....						
K = 0	(K ile <i>Kalan</i> gösterilmektedir.)					

İki'lik sayıya dönüştürülmesi düşünülen ya da gereken sayı, çizelgede görüldü-ğü gibi sol-üst köşedeki yerine yazılır. 2 nin kuvvetlerine göre yapılacak sırala-ma da çizelgede ayrılan yerde yapılacaktır. Burada önemli olan n kuvvetinin ne olacağıdır. Bu ise hesaplama yoluyla , dönüştürülecek sayıya en yakın ve

onu geçmeyecek olan sayıyı belirleme esasına dayanmaktadır. 2 nin kuvvetlerine ait olan sayılar 1,2,4,8,16,32,64,128, ... şeklinde devam edeceklerdir. Burada belirleyici olan üst sınırdaki sayının ne olacağı önemlidir ki o da önce-den açıklanmıştır.

2 nin kuvveti için en solda oluşan sayı ile bölme işlemlerine başlanır. Bunlar ar-dışık olarak tekrarlanacak işlemler olacağından, çizelgede onlara *bölme işlem-leri* olarak genel bir yer bırakılmıştır. Buradaki sayının ve bu işlemlerin neler olacağını önceden görmek olanaklı değildir. Bunlar her problemde farklı şekil-de karşımıza çıkarlar. Bu işlemler sırasında *var olma (içinde olma) sayısı 1* ya da *0* dan farklı olamaz. Bunlar hangi 2.nin kuvveti için yapılmışsa onun altına gelecek şekilde yazılır. Ardışık sürdürülen işlemler, 2^0 sütunundan sonra tamamlanmış olacaktır. Bu anda mutlaka K (kalan) = 0 bulunmuş olacaktır. Böylece sıralı olarak $u_{n-1} \dots u_1 u_0$ ile gösterilen rakamlar belirlenmiştir ve bunlar İki' lik sisteme göre dönüşen sayıyı göstermektedir.

Bu açıklamaları ve yöntemin kullanılış biçimini pekiştirmek üzere aşağıdaki ör- nekleri inceleyelim. Bunlardan ilki *kesirli olmayan* diğeri ise *kesirli olan* bir sayı için düzenlenmiştir.

ÖRNEK . 96 sayısını İki Tabanlı Sayı Sisteminde ifade edelim :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c|cccccccc}
 96 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\
 \hline
 64 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 - 32 & & & & & & & \\
 \hline
 & 32 & & & & & & \\
 - 32 & & & & & & & \\
 \hline
 & 0 & & & & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

0 (= K). Çizelgeden , $96 = 1100000_{(2)}$ yazılacaktır.

ÖRNEK . 13,25 sayısını İki Tabanlı Sayı Sisteminde ifade edelim.

Burada, kesirli sayı olmasından ötürü ortaya çıkan basit bir düzenleme farkı görülecektir. Bu da *kesirli kısım* ile ilgili olacaktır. Sayının tam kısmı 13 için işlem ve düzenlemeler bir önceki örnekte olduğu gibidir. Ancak kesirli kısım 0,25 için 2 nin negatif üslerinin yer aldığı yeni sütunların çizelgeye eklenmesi gerekecektir.

Bu şekilde eklenecek sütunların sayısı, ondalık kısımdaki basamak sayısı kadar olacaktır. Bu örneğimizde bunun iki basamak olduğu görülmektedir. Öyleyse 2^0 dan sonra 2^{-1} ve 2^{-2} nin karşılığı olan sütunlar problemimizde yer alacaktır.

Bu açıklamalar ışığında, örneğimize ait dönüşüm işlemini aşağıdaki çizelgede görüldüğü şekilde gerçekleştirebiliriz :

13,25		$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$	$2^{-1} = 0,5$	$2^{-2} = 0,25$	
- 8		1	1	0	1	•	0	1
								↖ Radiks noktası
5,25								
- 4								
1,25								
- 1								
0,25								
- 0,25								
0								

Çizelgeden : $13,25 = 1101,01_{(2)}$ yazılacaktır.

Diğer bir yöntem, yine *kalanlı bölme* kavramına dayanmak üzere aşağıda açık-lanmaktadır. Bu da uygulamada, pratik bazı yaklaşımlarla kullanılabilecektir. Önce örneğimiz üzerinde çalışıp sonra da yöntem hakkında gerekli açıklamalar verilmiş olacaktır. 13 sayısını İki'lik düzende ifade edelim. Hep 2 ile bölerek,

	Tam kısmı	Kalan
$13 \div 2 =$	6	1
$6 \div 2 =$	3	0
$3 \div 2 =$	1	1
$1 \div 2 =$	0	1 ↑

Tam kısım 0 bulunduğu için bölme işlemi durmuştur. Şimdi *Kalan* sütununda biriken rakamları, aşağıdan yukarıya doğru sıralayarak, dönüştürülme sonrası ortaya çıkan sayı artık yazılabilir. Bu da

$$13 = 1101_{(2)}$$

olacaktır.

Bunların dışında, başkaca yöntemlerden söz etmek olanaklıysa da, burada verilmiş olanların uygulama için yeterli olduğu kanısıyla, aşağıda yapılan bu işlerin kuramsal açıklamasına geçilmiş olunmaktadır. Çünkü hangi yöntem kullanılırsa kullanılsın, sonuçta bu kuramsal açıklamalara koşut bir düzenlemedir.

Burada, örneklemeden güç alarak, açıklamaları daha rahat ve kolay izleyebilmek için kuramsal oluşumlar, örneğin 96 sayısı için yapılan çizelgeye göre ifade edilecektir.

96 sayısının , $t = 2$ (taban sayısı) için bir özelliği

$$t^7 = 2^7 = 128 > 96 > 64 = 2^6 = t^6$$

dır. Demek ki 96 dan büyük olmayan ve 2 nin kuvvetine uygun ilk sayı 64 dür. Öyleyse $t^6 = 64$ için, $96 = u_6 t^6 + a_1$ yazılacaktır ki burada a_1 kalanlı bölme kavramına göre $0 \leq a_1 < t^6$ demektir. $a_1 = ?$. Burada u_6 ancak **1** ve **0** olabilir. $t = 2$ olduğuna göre, ayrı ayrı hesap yapılırsa :

- 1) 0 için : $96 = 0 \cdot 2^6 + a_1 \rightarrow a_1 = 96 - 0 = 96 > t^6 = 2^6 = 64$;
- 2) 1 için : $96 = 1 \cdot 2^6 + a_1 \rightarrow a_1 = 96 - 64 = 32 < t^6 = 2^6 = 64$;

bulunur. Bunlardan ilkinde $a_1 < t^6$ koşulu gerçekleşmediğinden bu alınamaz. İkincisinde bu koşulun gerçekleştiği görüldüğünden yani $32 < 64$ olduğundan u_6 nın bu değeri, dönüşen sayının ilk rakamı olur ki bu da $u_6 = 1$ dir. Kalan ise 32 olarak belirlenmiştir. Bu bulgularımıza göre birinci adım sonunda,

$$96 = 1 \cdot t^6 + 32$$

yazılacaktır. Şimdi tamamen benzeri işlemleri Kalan = 32 üzerinde tekrarlamak gerekecektir. Sanki üzerinde çalışılan sayı 96 değil de 32 imiş gibi ... Öyleyse öncelikle

$$t^6 = 2^6 = 64 > 32 = 2^5 = t^5$$

koşulu gerçekleşeceğinden, $t^5 = 2^5 = 32$ için 2 nin 5. kuvvetine göre düzenlen- mesi gerekecektir. $32 = u_5 t^5 + a_2$ yazılacaktır. $t = 2$ için $t^5 = 2^5 = 32$ olduğundan u_5 ancak **1** ya da **0** olabileceğinden bunlar için ayrı ayrı hesaplamalarla

- 1) 0 için : $32 = 0 \cdot 2^5 + a_2 \rightarrow a_2 = 32 - 0 = 32 < t^5 = 2^5 = 32$;
- 2) 1 için : $32 = 1 \cdot 2^5 + a_2 \rightarrow a_2 = 32 - 32 = 0 < t^5 = 2^5 = 32$;

bulunur. Bu işlemler analiz edildiğinde, ilkinde istenilen koşulun sağlanmadığı, $(32 < 32)$; ikincisinde istenilen koşulun sağlandığı $(0 < 32)$ anlaşılır. Buna göre ikinci hesapta u_5 in değeri ikinci rakam olarak belirlenir ki bu da 1 dir. a_2 kalanına gelince, ikinci durumda onun da 0 olduğu görülmektedir. $a_2 = 0$ demektir. Bunun belirlenmesinin önemi, bir sonraki işlemin bu kalana göre düzenlenecek olmasındadır.

$t^5 < 0 < t^4$ olmak üzere, 96 sayısı $t^4 = 2^4 = 16$ ile bölündüğünde kalan a_3 ise buna göre

$$0 = u_4 \cdot t^4 + a_3$$

yazılacaktır. Burada u_4 ancak ve ancak 1 ya da 0 olabileceğinden, bunlara uyan iki halin ayrı ayrı hesaplanması gerekmektedir :

- 1) 0 için : $0 = 0 \cdot 2^4 + a_3 \rightarrow a_3 = 0 - 0 = 0 < t^4 = 2^4 = 16$;
- 2) 1 için : $0 = 1 \cdot 2^4 + a_3 \rightarrow a_3 = 0 - 16 = -16 < t^4 = 2^4 = 16$;

bulunacaktır. Birinci durumda koşulun sağlanmış $(0 < 16)$; ikinci durumda koşulun sağlanmamış $(-16, \text{negatif sayı olduğu için ; } a_i \in \mathbb{N} \text{ olması koşulu gereği olarak})$ olduğu görülmektedir. Öyleyse $u_4 = 0$ olur. Buna bağlı olarak da $a_3 = 0$ dır. Bu, $K = 0$ olmasından kaynaklanmıştır. Demek ki bundan sonraki işlemler ve tartışmalar, bu son işlemlerle tamamen benzer olarak gerçekleşecektir. Daha sonra bulunması gereken rakamların da 0 (sıfır) oldukları anlaşılmaktadır. Yani

$$u_3 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_0 = 0$$

olur. Artık 96 sayısı için İki'lik düzendeki karşılığı yazılabilecektir ki bu da

$$96 = 1100000_{(2)}$$

şeklinde gerçekleşecektir. Buradaki kuramsal açıklamalara göre diğer örnekleri incelemek de yararlı bir çalışma olacaktır. Bunları da okuyucu yapmalıdır.

3. 5. DİĞER SAYI SİSTEMLERİ

Bu tür sayı sistemlerinin incelenmesi, doğrudan bu kitabın konusu değildir. Ancak önceki çalışmalarımızda değinildiği gibi , kuramsal çalışmalarda, Varlık ve Teklik Teoremleri' nin incelenmesinde ve yorumlanmasında daima genel ifadeler kullanılmış ve sayı sistemleri bir bütün olarak ele alınmıştır. Bundan

doğan bir ortamda, İki Tabanlı Sayı Sistemi' nin yanısıra *Diğer Sayı Sistemleri*' nin de çalışmamız içinde yer alması yeğlenmiştir. Bu şekilde, kuramsal ilişki-lerin sadece On'luk ve İki'lik düzenlere ait olmadığı gösterilmiş olacağı gibi, konuyla bağlamli bir şekilde, sayıların bu özellikleri hakkında çok daha ayrıntılı bilgi sahibi olmak şansı ortaya çıkmış olacaktır. Kaldı ki hemen bir alt-bölümde işlemlerden söz ederken, çok daha geniş bir uygulama alanı oluşturmuş bulun-maktayız.

Diğer Sayı Sistemleri deyimi, tabanı $t = 3, t = 4, \dots, t = 9, t = 12, t = 16$ gibi $t > 1$ koşulunu sağlayan *Sistemler* için tek bir başlık oluşturmak amacı ile kullanılmıştır. Bu sistemler içinde bazıları özel adlar alırlar ki bunlardan ikisi, $t = 2$ için *Binary Sayı Sistemi* ya da *Dual Sistem*; $t = 10$ için *Desimal Sistem*' dir. Ayrıca $t = 8$ için oluşan sayı sistemine *Oktal Sistem*; $t = 16$ için oluşan sayı sistemine ise *Sedesimal Sistem* adları verilmektedir.

Bu tür sayıların incelenmesinde de, On'luk ve İki'lik düzendeki sayılar için oluş-an temel ilkeler gözönünde bulundurulacaktır. Ancak özellikle ve öncelikle şu temel bilgilerin verilmesinde yarar bulunmaktadır :

a°) Her sistem ancak ve ancak taban sayısı kadar rakam (şifre) içerebilir. Bun-

lar 0 dan başlayarak sıralanan rakamlardır ve On'luk düzenin rakamları kullanılır. Doğal olarak, taban t ile gösterildiğine göre, sistemdeki en büyük rakamın sayı değeri $t - 1$ ile belirlenir.

Örneğin üç tabanlı bir sistemde $t = 3$ olduğundan, $t - 1 = 3 - 1 = 2$ olup, demek ki bu sistemde en büyük şifre 2 dir. Öyleyse sistemin rakamları üç adet olup bunlar da **0, 1, 2** den ibarettir.

Örneğin beş tabanlı bir sistemde $t = 5$ olduğundan, $t - 1 = 5 - 1 = 4$ olup, sistemin, **0, 1, 2, 3, 4** olan 5 adet rakamı bulunacaktır.

b°) Sayıların çözümlenmesinde genel ifade değişmeyecek ve (1) ile belirtildiği şekliyle kullanılacaktır. Ancak sayının kesirli hali dikkate alınmalıdır.

c°) Sayının On'luk düzendeki karşılığı bulunmak istenirse, terimlerde oluşan sayıları onluk düzene göre hesaplamak yeterlidir.

d°) Bu sayılarda da basamakların özel adları olmadığı için, sayı okunurken, baştan başlanarak sadece rakamların adları ardışık olarak okunur.

Bu ilkeleri pekiştirmek ve açıklamak üzere, aşağıdaki örnekleri inceleyiniz :

ÖRNEK . 1 $21014_{(5)} = 2.5^4 + 1.5^3 + 0.5^2 + 1.5^1 + 4.5^0$

şeklinde çözümlenmiş olacaktır. On'luk düzendeki karşılığı ise, onluk sayı sis-temine göre hesaplamalar yapılarak,

$$\begin{aligned} 21014_{(5)} &= 2 \times 625 + 1 \times 125 + 0 \times 25 + 1 \times 5 + 4 \times 1 \\ &= 1250 + 125 + 5 + 4 = 1384 \end{aligned}$$

olarak bulunacaktır.

ÖRNEK . 2 $7610_{(8)} = 7.8^3 + 6.8^2 + 1.8^1 + 0.8^0$

şeklinde çözümlenmiş olacaktır. On'luk düzendeki karşılığı ise,

$$\begin{aligned} 7610_{(8)} &= 7 \times 512 + 6 \times 64 + 1 \times 8 = \\ &= 3584 + 384 + 8 = 3976 \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK . 3 $149_{(12)} = 1.12^2 + 4.12^1 + 9.12^0$

olarak çözümlenecektir. On'luk düzendeki karşılığı ise,

$$149_{(12)} = 1 \times 144 + 4 \times 12 + 9 \times 1 = 144 + 48 + 9 = 201$$

olur.

ÖRNEK . 4 Δ ile 10 ; ∇ ile 11 ; $\square$ ile 15 gösterildiğine göre, $6\square\Delta7\nabla_{(16)}$ sayısı ;

$$6\square\Delta7\nabla_{(16)} = 6.16^4 + \square.16^3 + \Delta.16^2 + 7.16^1 + \nabla.16^0$$

şeklinde çözümlenir. Bu sayının On'luk düzendeki karşılığı bulunmak istenirse, aşağıdaki işlemler yapılır :

$$\begin{aligned} 6\square\Delta7\nabla_{(16)} &= 6 \times 65536 + \square \times 4096 + \Delta \times 256 + 7 \times 16 + \nabla \times 1 = \\ &= 6 \times 65536 + 15 \times 4096 + 10 \times 256 + 7 \times 16 + 11 \times 1 = \\ &= 393216 + 61440 + 2560 + 112 + 11 = 457339 . \end{aligned}$$

olarak bulunacaktır.

3.5.1. Diğer Sayı Sistemleri Arasında Taban Değiştirme

Daha önceki alt-bölümde On'luk ve İki'lik Sayı Sistemleri arasında *dönüşüm ilişkileri* incelenmiştir. Orada konu edilen esaslar ve ilkeler saklı kalmak koşu- luyla, herhangi bir $t_{(1)}$ tabanlı bir sisteme göre yazılmış bir sayıyı, $t_{(2)}$ tabanlı bir diğer sisteme dönüştürmek için aşağıda açıklanan ve örneklenen ilkelerden yararlanılacaktır.

Diyelim ki üç tabanlı $[t_{(1)} = 3]$ bir sistemdeki bir sayıyı dört tabanlı $[t_{(2)} = 4]$ bir sistemdeki sayıya çevirmek (dönüştürmek) istiyoruz. Bunun için dolaylı bir yol izlenmesi gerekmektedir. Yani indirekt bir işlem yapılacak ve bu amaçla araya *On'luk Sistem* sokulacaktır. Öyle anlaşılıyor ki dönüştürülmek istenilen sayı önce On'luk düzende ifade edilecektir. Bu kez bu yeni sayı, $t_{(2)}$ tabanında bir sayı olacak şekilde işleme sokulacaktır. Bu şekilde aynı bir problemde, hem On'luk düzene geçiş hem de On'luk düzenden geçiş işlemleri birlikte uygulan-mış olacaktır. Şimdi bu amaçla düzenlenmiş örnekleri inceleyiniz :

ÖRNEK . 1 $31021_{(4)} = X_{(5)} \rightarrow X = ?$

$31021_{(4)}$ sayısı, öncelikle 10 luk düzende ifade edilmelidir.

$$31021_{(4)} = 3.4^4 + 1.4^3 + 0.4^2 + 2.4^1 + 1.4^0 = 3 \times 256 + 1 \times 64 + 2 \times 4 + 1 \times 1 \\ = 768 + 64 + 8 + 1 = 841$$

bulunur. Şimdi, On'luk düzendeki bu sayının 5 tabanlı sayı sistemine göre ifade edilmesi gerekmektedir. Bunun için de aşağıdaki çalışmayı izleyiniz.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 841 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ \hline - 625 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline 216 & & & & & \\ - 125 & & & & & \\ \hline 91 & & & & & \\ - 75 & & & & & \\ \hline 16 & & & & & \\ - 15 & & & & & \\ \hline 1 & & & & & \\ - 1 & & & & & \\ \hline 0 & (= K) & & & & \end{array}$$

Böylece incelenmekte olan X sayısının, $X = 11331_{(5)}$ olduğu belirlenmiş olur. Bu sonuçlara göre artık,

$$31021_{(4)} = 841 = 11331_{(5)}$$

olduğu yazılabilecektir.

ÖRNEK . 2 $\Delta = 10$, $\nabla = 11$ rakamlarını gösterdiklerine göre,

$$8\Delta 7\nabla_{(12)} = X_{(8)} \rightarrow X = ?$$

12 tabanlı sayı, On'luk düzene geçiş için çözümlenirse,

$$\begin{aligned} 8\Delta 7\nabla_{(12)} &= 8 \cdot 12^3 + \Delta \cdot 12^2 + 7 \cdot 12^1 + \nabla \cdot 12^0 \\ &= 8 \times 1728 + 10 \times 144 + 7 \times 12 + 11 \times 1 \\ &= 13824 + 1440 + 84 + 11 = 15359 \end{aligned}$$

olur. Şimdi bu sayıyı aşağıda gösterilen işlemler yardımıyla (öncekinden farklı olan yöntemi uygulayarak) 8 tabanlı sisteme göre ifade edelim.

	Bölüm	Kalan
$15359 \div 8 =$	1919	7
$1919 \div 8 =$	239	7
$239 \div 8 =$	29	7
$29 \div 8 =$	3	5
$3 \div 8 =$	0	3

Bölüm 0 (sıfır) bulunduğundan işlem durdurulmuştur. Şimdi aşağıdan yukarıya doğru sıralarsak, kalan sütununda oluşan rakamlar aradığımız sayıyı verecektir ki bu da $35777_{(8)}$ olarak görülmektedir. Artık

$$8\Delta 7\nabla_{(12)} = 15359 = 35777_{(8)}$$

yazılabilecektir. Bu sayı *üç-beş-yedi-yedi-yedi* diye okunur.

3.6. ON'LUK TABANA DÖNÜŞTÜRMEDE FARKLI YÖNTEMLER

Yukarıda herhangi bir tabandaki sayının On'luk düzene göre yazılmasına dair önerilen kuralın dışında, aşağıda açıklanmış olan farklı iki yöntemin oldukça iyi

iki algoritma oluşturdıkları ve uygulama yönüyle de elverişli bir çalışma sağla-yabilecekleri görülmektedir. Bu algoritmalar, herhangi tabanlı sayı düzenlerine uygulanabilirse de, konumuzla ilgisi nedeniyle burada öncelikle İki'lik düzen için bir inceleme ve örnekleme yapılmış olacaktır.

3.6.1. Tam Sayılar İçin

t ($t > 1 \wedge t \in \mathbb{N}$) tabanlı bir $a \in \mathbb{N}$ sayısının (1) ile verildiği şekilde bir çözümle-mesi yapılırsa, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için u_i ile sayının rakamları gösterildiğine göre,

$$a = u_{n-1}.t^{n-1} + u_{n-2}.t^{n-2} + \dots + u_2.t^2 + u_1.t + u_0$$

yazılacaktır. Bu sayı t ile bölünerek ifade edildiğinde kalan a_0 olsun. Öyleyse a sayısının bu açılımı bir başka türlü, bölen ve kalan cinsinden

$$a = t [u_{n-1}.t^{n-2} + u_{n-2}.t^{n-3} + u_3.t^2 + u_2.t + u_1] + u_0$$

şeklinde de ifade edilebilecektir. Bu bölme işlemleri ardışık olarak tekrarlanırsa bu düzene göre sonuçta

$$a = t \{t \dots [t (u_{n-1}.t + u_{n-2}) + \dots] + u_1\} + u_0$$

yazılabilecektir. Bu yapıya uygun uygulama nasıl gerçekleşecektir ? Bu da aşağıda açıklanmaktadır.

a tam sayısını temsil eden bu polinomun en sol basamağındaki rakam t ile çarpılarak, buna bir sonraki basamaktaki rakam eklenmelidir. Böylece ilk olarak parantez içindeki $u_{n-1}.t + u_{n-2}$ ifadesi elde edilmiş olacaktır. Şimdi bu toplamı t ile çarpar ve bir sonraki (sıradaki) rakamı yani u_{n-3} ü buna katarsak bir iç toplamı elde etmiş oluruz ve işlemlere böylece devam edilir. Son olarak u_0 da işleme sokulduktan sonra istenilen sonuca ulaşılmış olacaktır. Bütün bu işlemler on tabanlı sistem için yapılmış olacaktır.

Bu yöntemin ayrıcalığı, görülecektir ki işlem süresince çarpma işlemine sadece t taban sayısının girecek olmasıdır. Böylece t nin kuvvetlerini ayrıca hesaplamaya gereksinme yoktur. Aşağıdaki örnekler yöntemin açıklanmasına ve daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır.

ÖRNEK . 1 $243_{(5)} = X_{(10)} \rightarrow X = ?$

$$243_{(5)} = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 5 [2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0] + 3 = 5 [2 \cdot 5 + 4] + 3$$

demektir. Buradan, basit bir hesapla 73 olduğu bulunur. Böylece,

$$243_{(5)} = 73_{(10)} = 73 = X$$

yazılabilecektir. Ancak uygulamada bunun daha pratik bir çalışma şeklini önermek olanaklıdır. Aşağıdaki biçimsel düzenlemeyi inceleyiniz :

$$\begin{array}{rcll}
 243_{(5)} & \rightarrow & 2 & 4 & 3 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & 2 \cdot 5 + 4 = 14 & & \downarrow \\
 & & & 14 \cdot 5 + 3 = 73 & \rightarrow X = 73
 \end{array}$$

olur.

$$\text{ÖRNEK . 2} \quad 101101_{(2)} = X_{(10)} \rightarrow X = ?$$

$$\begin{aligned}
 101101_{(2)} &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
 &= 2 [1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0] + 1 \\
 &= 2 [2 [1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0] + 0] + 1 \\
 &= 2 [2 [2 [1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0] + 1] + 0] + 1 \\
 &= 2 [2 [2 [2 (1 \cdot 2 + 0) + 1] + 1] + 0] + 1 \\
 &= 2 [2 [2 [2 (2) + 1] + 1] + 0] + 1 \\
 &= 2 [2 [2 [5] + 1] + 0] + 1 \\
 &= 2 [2 [11] + 0] + 1 \\
 &= 2 [22] + 1 = 45
 \end{aligned}$$

bulunacaktır. Öyleyse $X = 45$ yazılacaktır. Bir de aşağıda görüldüğü şekilde pratik çözüm incelenmelidir.

$$\begin{array}{rcll}
 101101_{(2)} & \rightarrow & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 & & 1 \cdot 2 + 0 = 2 & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 2 \cdot 2 + 1 = 5 & & & & \\
 & & & & 5 \cdot 2 + 1 = 11 & & & \\
 & & & & & 11 \cdot 2 + 0 = 22 & & \\
 & & & & & & 22 \cdot 2 + 1 = 45
 \end{array}$$

Algoritma : İlk sayıdan başlayarak bir alta yaz ve iki ile çarp ve bir sonrakini ekle ve toplamı bul . Sonuncu rakama kadar devam et !

$$4125_{(6)} = X_{(10)} \rightarrow X = ?$$

$$\begin{aligned} 4125_{(6)} &= 4 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 = \\ &= 6 [4 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0] + 5 \\ &= 6 [6 [4 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0] + 2] + 5 \\ &= 6 [6 [4 \cdot 6 + 1] + 2] + 5 \end{aligned}$$

şeklinde çözümlenmiş olacaktır. Bunun bir de aşağıda düzenlendiği gibi pratik uygulaması incelenmelidir :

$$\begin{array}{cccc} 4125_{(6)} & \rightarrow & 4 & 1 & 2 & 5 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 4 \cdot 6 + 1 = 25 & & & \\ & & & 25 \cdot 6 + 2 = 152 & & \\ & & & & 152 \cdot 6 + 5 = 917 = X & \end{array}$$

3.6.2. Kesirli Sayılar İçin

a gibi t tabanlı ancak tam kısmı 0 (sıfır) olan bir kesirli sayının On'luk düzene dönüştürülmesi söz konusu edilirse, aşağıda açıklanan yöntemin uygulanması yeğlenmelidir. Yöntem şu şekilde uygulanacaktır :

İşleme en sağ basamakta bulunan rakamdan başlanacaktır. Bu rakam t taban sayısına bölünecek ve bir sonra gelen basamaktaki rakamla toplanacaktır. Bu şekilde elde edilen sayı yine t taban sayısına bölünecek ve bir sonraki (sıradaki) basamakta bulunan rakam eklenecektir. İşlemler ardışık olarak böylece sürdü-rülecek , radiks noktasına gelindiğinde durdurulacaktır.

Kesirli sayılar için oluşturulan bu algoritmayı uygulamada görmek için aşağıdaki örnekler incelenmelidir.

$$\text{ÖRNEK .1} \quad 0.4123_{(5)} = X_{(10)} \rightarrow X = ?$$

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| 1. işlem : $3 / 5 = 0,6$ | 2. işlem : $0,6 + 2 = 2,6$ |
| 3. işlem : $2,6 / 5 = 0,52$ | 4. işlem : $0,52 + 1 = 1,52$ |
| 5. işlem : $1,52 / 5 = 0,304$ | 6. işlem : $0,304 + 4 = 4,0304$ |
| 7. işlem : $4,0304 / 5 = X = 0,80608$ | |

bulunur. Sonuç olarak $X = 0,80608$ dir.

ÖRNEK . 2 $0.111001_{(2)} = X_{(10)} \rightarrow X = ?$

- | | |
|--|---|
| 1. işlem : $\textcircled{1} / 2 = 0,5$ | 2. işlem : $0,5 + \textcircled{0} = 0,5$ |
| 3. işlem : $0,5 / 2 = 0,25$ | 4. işlem : $0,25 + \textcircled{0} = 0,25$ |
| 5. işlem : $0,25 / 2 = 0,125$ | 6. işlem : $0,125 + \textcircled{1} = 1,125$ |
| 7. işlem : $1,125 / 2 = 0,5625$ | 8. işlem : $0,5625 + \textcircled{1} = 1,5625$ |
| 9. işlem : $1,5625 / 2 = 0,78125$ | 10. işlem : $0,78125 + \textcircled{1} = 1,78125$ |
| 11. işlem : $1,78125 / 2 = 0,890625 = X$ olarak bulunur. | |

ÖRNEK . 3 $0.00111_{(2)} = X_{(10)} \rightarrow X = ?$

- | | |
|---|--|
| 1. işlem : $\textcircled{1} / 2 = 0,5$ | 2. işlem : $0,5 + \textcircled{1} = 1,5$ |
| 3. işlem : $1,5 / 2 = 0,75$ | 4. işlem : $0,75 + \textcircled{1} = 1,75$ |
| 5. işlem : $1,75 / 2 = 0,875$ | 6. işlem : $0,875 + \textcircled{0} = 0,875$ |
| 7. işlem : $0,875 / 2 = 0,4375$ | 8. işlem : $0,4375 + \textcircled{0} = 0,4375$ |
| 9. işlem : $0,4375 / 2 = 0,21875 = X$ olarak bulunur. | |

Not : Bu örneklerde, rakamları izleyebilmek için, işaretli rakam kullanılmıştır.

Sayılardaki en sağ basamaktan başlayarak rakamların sırasını izleyiniz

...

3. 7. ON ' LUK DÜZENDEKİ BİR SAYININ DİĞER BİR TABANA GÖRE YAZILMASINDA FARKLI YÖNTEMLER

Önceki alt-bölümde, diğer tabanlarda ifade edilmiş herhangi sayıların On'luk düzene dönüştürülmesinde kullanılan değişik algoritmalar incelenmiştir. Bu kez karşıt problem olarak, On'luk düzendeki tam ya da kesirli sayıların herhangi tabanlı bir sayıya dönüştürülmesi için önceden incelenmiş olanlardan daha farklı bazı yöntemlerden söz edilecektir. Yöntemlerin sayıca çoğalması, karşılaşılabilecek durumlara göre, bizler için işlemsel bir seçenek oluşturmakta ve seçebilme oranında işlem yeteneğimiz artmaktadır.

3.7.1. Tam Sayılar İçin

On'luk düzendeki a tam sayısı, t tabanlı herhangi bir sistemde ifade edilmek istenilmektedir. a doğal sayısının (1) ile gösterilen çözümlemesi anımsanmalıdır. Aşağıdaki işlemleri ve açıklamaları izleyebilmek için burada bir kez daha ifade edelim :

$$a = a_{(10)} = u_{n-1} \cdot t^{n-1} + u_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + u_1 \cdot t + u_0$$

Burada sayıyı oluşturan rakamları belirleyebilmek için a sayısı öncelikle t ta-ban sayısına bölünür. Burada ifade edilen gerçekte,

$$\frac{a}{t} = u_{n-1}. t^{n-2} + u_{n-2}. t^{n-3} + \dots + u_2. t + u_1 + \frac{u_0}{t}$$

demektir. Eğer bölüm olarak elde edilen toplam b_0 ile gösterilirse, yani

$$b_0 = u_{n-1}. t^{n-2} + \dots + u_1$$

denirse, $1 / t = t^{-1}$ ile gösterilerek,

$$a . t^{-1} = b_0 + u_0. t^{-1} \quad \rightarrow \quad a = b_0. t + u_0$$

olur. Demek ki ilk bölme işlemi sonunda b_0 gibi bir tam sayı oluşacak ve u_0 toplama bir artı sayı olarak katılacaktır. Görülüyor ki burada u_0 , t tabanlı sayı-nın en sağ basamağındaki rakamdır. Bu belirlenmiş olmaktadır. Bu oluşan algoritmayı tam ve sağlıklı çalışır hale getirmek için, benzeri işlemlere b_0 ile devam edilmelidir.

$$\frac{b_0}{t} = u_{n-1}. t^{n-2} + \dots + u_3. t + u_2 + \frac{u_1}{t}$$

olur. Burada da tam sayı kısmına b_1 denirse, $1 / t = t^{-1}$ ile gösterilerek,

$$b_0 . t^{-1} = b_1 + u_1. t^{-1} \quad \rightarrow \quad b_0 = b_1 .t + u_1$$

yazılabilecektir. Böylece ikinci işlemde elde edilen u_1 sayısı t tabanlı sayının sağdan ikinci basamağında bulunan rakamı göstermek üzere belirlenmiştir.

İşlemlere ardışık olarak böylece devam edilirse, n . adım sonunda basamaklar-daki bütün rakamlar sırasıyla belirlenmiş olacak ve sonuçta n . adımda, sonlu olan sayılarla ilgilendiğimiz için, $b_n = 0$ olacaktır. Yukarıda açıklandığı şekilde oluşan algoritmanın, uygulamada nasıl kullanıldığı aşağıdaki örneklerle açıklık kazanmış olacaktır.

ÖRNEK . 1 $1024_{(10)} = X_{(5)} \rightarrow X = ?$

$$1024 = 1024_{(10)} = u_4.5^4 + u_3.5^3 + u_2.5^2 + u_1.5^1 + u_0.5^0$$

olur.

Amaç, yukarıda açıklanan algoritma yardımıyla u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 rakamlarını belirlemek olarak saptanmalıdır. Bunun için aşağıdaki işlemler yapılır :

$$\frac{1024}{5} = u_4 \cdot 5^3 + u_3 \cdot 5^2 + u_2 \cdot 5^1 + u_1 \cdot 5^0 + \frac{u_0}{5}$$

olup buradan tam sayı kısmı b_0 ile gösterilerek,

$$b_0 = u_4 \cdot 5^3 + u_3 \cdot 5^2 + u_2 \cdot 5^1 + u_1 \cdot 5^0$$

yazılırsa,

$$\frac{1024}{5} = b_0 + \frac{u_0}{5} \rightarrow 1024 = 5 \cdot b_0 + u_0$$

olur. Burada u_0 , 1024 sayısının 5 ile bölümünden ortaya çıkan *kalan*' dır. O halde

$$\frac{1024}{5} = 204 + \frac{4}{5} \rightarrow 1024 = 5 \times 204 + 4$$

demektir ki buradan $b_0 = 204$; $u_0 = 4$ oldukları belirlenir.

Bu kez işlemler b_0 üzerinde tekrarlanacaktır. Bölmeden elde edilen tam kısım b_1 ile gösterilirse ve kalan sıradaki rakam olarak u_1 olacağından, gerekli düzenle-melerden sonra,

$$\frac{204}{5} = 40 + \frac{4}{5} \rightarrow 204 = 5 \times 40 + 4$$

olarak, $b_1 = 40$; $u_1 = 4$ olacağı belirlenmiş olur.

$b_1 = 40$ için düzenlenecek işlemlerde bölümden elde edilen tam kısım b_2 , kalan da sıradaki rakam olarak u_2 ise,

$$\frac{40}{5} = 8 + \frac{0}{5} \rightarrow 40 = 5 \times 8 + 0$$

olur ki buradan da $b_2 = 8$; $u_2 = 0$ oldukları anlaşılacaktır. Böylece devam edilirse, sırasıyla,

$$\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} \rightarrow 8 = 5 \times 1 + 3 ;$$

$$\frac{1}{5} = 0 + \frac{1}{5} \rightarrow 1 = 5 \times 0 + 1$$

olarak, $u_3 = 3$ ve $u_4 = 1$ oldukları belirlenecektir. Sonuncu bölme işleminde tam kısım $b_4 = 0$ olduğundan işlemler bu aşamada durdurulmuştur. Böylece,

$$u_0 = 4, u_1 = 4, u_2 = 0, u_3 = 3, u_4 = 1$$

olur ki bunlar aranılan sayının rakamlarıdır. Öyleyse artık 1024 ün t = 5 tabanlı sayı karşılığı yazılabilecektir. Bu da

$$1024 = 1\ 3\ 0\ 4\ 4_{(5)}$$

demektir.

Burada oluşan işlem tarzının (algoritmanın) uygulanişına dair biçimsel bir düzenleme aşağıda gösterilmiştir. Bu yukarıdaki örnek için tekrarlanmıştır :

b_i	t	b_{i-1}	$kalan = u_i$
$a = 1024 \div 5$	$=$	$204 + 4 \div 5$	$= u_0$
$204 \div 5$	$=$	$40 + 4 \div 5$	$= u_1$
$40 \div 5$	$=$	$8 + 0 \div 5$	$= u_2$
$8 \div 5$	$=$	$1 + 3 \div 5$	$= u_3$
$1 \div 5$	$=$	$0 + 1 \div 5$	$= u_4$

Kalan sütunundaki rakamlar aşağıdan yukarıya doğru sıralı olarak yazılırsa 1024 sayısının 5 tabanlı sistemdeki karşılığı bulunmuş olacaktır ki bu da, yukarıda da ifade edildiği gibi,

$$1024 = 1\ 3\ 0\ 4\ 4_{(5)}$$

olur.

ÖRNEK . 2 $888_{(10)} = X_{(2)} \rightarrow X = ?$

İkinci algoritma uygulanarak çalışılırsa :

$a = 888 \div 2 = 444 + 0 \div 2 = u_0$	$27 \div 2 = 13 + 1 \div 2 = u_5$
$444 \div 2 = 222 + 0 \div 2 = u_1$	$13 \div 2 = 6 + 1 \div 2 = u_6$
$222 \div 2 = 111 + 0 \div 2 = u_2$	$6 \div 2 = 3 + 0 \div 2 = u_7$
$111 \div 2 = 55 + 1 \div 2 = u_3$	$3 \div 2 = 1 + 1 \div 2 = u_8$
$55 \div 2 = 27 + 1 \div 2 = u_4$	$1 \div 2 = 0 + 1 \div 2 = u_9$

$$888 = 1101111000_{(2)} = X \text{ bulunacaktır.}$$

ÖRNEK. 3 $A = 10$ ve $B = 11$ rakamlarını gösterdiklerine göre

$$11034 = X_{(16)} \text{ için } X = ? .$$

Pratik yöntem kullanılarak :

$$a = 11034 \div 16 = 689 + 10 \div 16 = A \div 16$$

$$689 \div 16 = 43 + 1 \div 16$$

$$43 \div 16 = 2 + 11 \div 16 = B \div 16$$

$$2 \div 16 = 0 + 2 \div 16$$

olur. Buradan,

$$X = 2B1A_{(16)}$$

yazılacaktır.

3.7.2. Kesirli Sayılar İçin

On'luk düzendeki kesirli bir sayıyı $a_{(10k)}$ yazarak ifade edelim. Burada özellikle, kesirli sayı denilince *tam kısmı sıfır olan sayı* anlaşılmalıdır. Bu şekildeki sayıların (on'luk düzenin sayısı olduğu için ondalıklı sayıların) herhangi bir t tabanına göre ifade edilmesinde, aşağıda açıklanan hususlar gözönünde bulundurulacaktır. t tabanına dönüştürülecek sayının çözümlemesi yapılırsa,

olacaktır. Burada algoritmayı oluştururken amaç, sırasıyla katsayıları belirleyecek hesap tekniğini ortaya çıkarmaktır.

Öncelikle u_{-1} katsayısını bulabilmek için, bunu yalnız bırakmak üzere, her iki yan t ile çarpılarak yazılırsa :

$$t \cdot a = u_{-1} + u_{-2} \cdot t^{-1} + u_{-3} \cdot t^{-2} + \dots + u_{-n} \cdot t^{-n+1}$$

olur. $t \cdot a < 1$ ise sadece kesirli kısım bulunacaktır ki o zaman $u_{-1} = 0$ olacaktır. Eğer $t \cdot a \geq 1$ ise bu çarpımın tam kısmı u_{-1} katsayısını (rakamını) belirlemiş olur.

$$b_{-1} = u_{-2} \cdot t^{-1} + u_{-3} \cdot t^{-2} + \dots + u_{-n} \cdot t^{-n+1}$$

ise

$$t \cdot a = a_{-1} + b_{-1}$$

demektir. Burada b_{-1} yine kesirli kısımdır. Bu kez benzeri işlemler b_{-1} üzerinde yapılacaktır. $t.b_{-1}$ çarpımı oluşturulursa,

$$t.b_{-1} = u_{-2} + u_{-3}.t + \dots + u_{-n} t^{-n+2}$$

olur. Burada $t.b_{-1} < 1$ ise $u_{-2} = 0$ olacaktır. $t.b_{-1} \geq 1$ ise tam sayı kısmı, u_{-2} rakamını belirtmiş olur. İşlemler ardışık olarak böylece sürdürülür. Ancak işlemin sona ermesi olanaklı olmayabilir. Bunun nedeni, t taban sayısının belirli sayıda-ki rakamlarla ifade edilemeyeşidir.

Yukarıda açıklanan hususları ve ortaya çıkacak hesaplama tekniğini bir algoritma haline getirerek, uygulama yönünü pekiştirmek üzere, aşağıdaki örnekler incelenmelidir.

ÖRNEK . 1 $0,176 = 0,176_{(10k)} = X_{(2)} \rightarrow X = ?$

Algoritmayı oluşturmak üzere aşağıdaki işlemler ardışık olarak sürdürülmelidir. Gerekli açıklamalar, işlemler arasında, yeri geldikçe yapılmış olacaktır.

$$\begin{aligned} a_{(10k)} = 0,176_{(10k)} &\rightarrow 0,175 \times 2 = 0,352 = u_{-1} + b_{-1} \\ 0,352 < 1 \text{ için} &\rightarrow u_{-1} = 0 ; b_{-1} = 0,352 \end{aligned}$$

olur. Bu kez işleme $b_{-1} = 0,352$ ile devam edilecektir :

$$0,352 \times 2 = 0,704 = u_{-2} + b_{-2} \rightarrow u_{-2} = 0 ; b_{-2} = 0,704$$

olur. Burada bu sona ulaşılırken, ilk adımda olduğu gibi yine $0,704 < 1$ koşulu dikkate alınmıştır. Bundan sonraki adıma $b_{-2} = 0,704$ ile devam edilecektir :

$$0,704 \times 2 = 1,408 = u_{-3} + b_{-3} \rightarrow u_{-3} = 1 ; b_{-3} = 0,408$$

yazılacaktır. Burada da $1,408 > 1$ koşulu dikkate alınmıştır. İşleme $b_{-3} = 0,408$ ile devam edilecektir :

$$0,408 \times 2 = 0,816 = u_{-4} + b_{-4} \rightarrow u_{-4} = 0 ; b_{-4} = 0,816$$

olur. Burada da yine $0,816 < 1$ koşuluna dikkat edilmiştir. İşleme $b_{-4} = 0,816$ ile devam edilecektir :

$$0,816 \times 2 = 1,632 = u_{-5} + b_{-5} \rightarrow u_{-5} = 1 ; b_{-5} = 0,632$$

olacaktır. Burada da $1,632 > 1$ koşulu dikkate alınmıştır. Bu işlemlere ardışık olarak devam edilecektir. Ancak işlemi burada durdurduğumuzu, yani basamak sayısının yeterli olduğuna karar verdiğimizizi düşünelim. Bu durumda, ilk belirlemelerimizden başlayarak bulunan u_{-n} rakamları sıralı olarak yazılırsa,

$$X = 0.00101\dots_{(2)}$$

bulunacaktır. Bu gösterimde, kesir kısmında ... ile gösterilen kısmı kullanmak bir zorunluluktur. Sayının bu yazılan rakamlarından sonra da devam etmek üzere geliştiğini (gelişebileceğini) ifade etmektedir. Bu tür sayılarla uğraş verirken sonuncu bir rakama ulaşamayacağı olasılığından yukarıda da söz edilmiştir. Yukarıdaki bulgularımız bir algoritma oluşturacak şekilde, sistematik bir düzen içinde yeniden sunulmuştur :

$$\begin{aligned} a_{(10k)} &= 0,176 \times 2 = 0,352 \rightarrow u_{-1} = 0 \\ 0,352 \times 2 &= 0,704 \rightarrow u_{-2} = 0 \\ 0,704 \times 2 &= 1,408 \rightarrow u_{-3} = 1 \\ 0,408 \times 2 &= 0,816 \rightarrow u_{-4} = 0 \\ 0,816 \times 2 &= 1,632 \rightarrow u_{-5} = 1 \\ 0,632 \times 2 &= 1,264 \rightarrow u_{-6} = 1 \\ 0,264 &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ X_{(2)} &= 0.001011 \dots \end{aligned}$$

olur. Burada, bir gösteri olsun diye, bir basamak daha görülecek şekilde fazla işlem yapılmış ve kesirli kısım bir basamak daha geliştirilmiştir. Bu algoritma yardımıyla, önceki işlemler daha da açıklık kazanmış olmaktadır.

$$\text{ÖRNEK . 2} \quad 0,41537_{(10k)} = X_{(16)} \rightarrow X = ?$$

Önceki örnekte oluşan algoritma gereğince işlemler yapılırsa :

$$\begin{aligned} a_{(10k)} &= 0,41537 \times 16 = 6,64592 \rightarrow u_{-1} = 6 \\ 0,64592 \times 16 &= 10,33472 \rightarrow u_{-2} = 10 = A \\ 0,33472 \times 16 &= 5,35552 \rightarrow u_{-3} = 5 \\ 0,35552 \times 16 &= 5,68832 \rightarrow u_{-4} = 5 \\ &\dots\dots\dots \\ X_{(16)} &= 0.6A55 \dots \end{aligned}$$

olur.

3.7.3. Negatif Sayılar İçin

Sayıların İki'lik sayı sisteminin elemanları (rakamları) **1** ve **0** ile gösterilmesi, teknik bakımdan çeşitli kolaylıklar sağlar. Eğer negatif sayıların gösterilmesin-de bu rakamların kullanılması bir zorunluluk ise, en büyük basamaktaki rakam- dan önce, işareti belirtmek üzere,

$$\begin{aligned} a &^{\circ}) \text{ Negatif sayılar için } 1, \\ b &^{\circ}) \text{ Pozitif sayılar için } 0 \end{aligned}$$

kullanılmalıdır. Ancak bu gösteriliş biçimi sakıncaları da birlikte içermektedir. Çünkü sonuç olarak aynı simgeler, farklı amaçlar için de olsa, aynı ifadede kullanılmış olmaktadır. Bu nedenle, konunun önemine dikkat çekmek için aşağıdaki açıklamalar dikkatlice izlenmelidir.

$$\begin{aligned} - 9_{(10)} &= 1 \ 1001_{(2)} \\ + 5_{(10)} &= 0 \ 0101_{(2)} \end{aligned}$$

Buradaki ifade biçimlerine dikkat edilirse, - işaretli sayı için, sadece işareti belirtmek üzere 1 ; + işaretli sayı için, sadece işareti belirtmek üzere 0 konulmuştur. Sonra da yanlarına (sağlarına) gelecek şekilde sırasıyla 9 ve 5 sayılarının İki'lik düzendeki karşılığı olan sayılar yazılmıştır. Sayılar yazılırken, işareti gösterenlerle gerçek sayıyı gösterenler arasında açıklık bırakılması bir yanlışlığı önlemek üzere bir yazış biçimi olarak kabul edilmelidir. Bu bir anlatım tarzı (notasyon) olmakla birlikte, pratikte bir uygulama biçimi olamaz. Bu nedenle bu işin uygulamaya dönük olarak gerçekleştirilmesi görüşü, yeni arayışları zorunlu kılmaktadır.

Negatif Sayılar'ın gösterilmesi için kullanılan iki yöntem aşağıda açıklanmıştır. Her iki yöntemin esası, *sayının komplementi (bütünleri)* kavramına dayanılarak açıklanabilecektir. Buna *Baz Komplement* ya da *B Komplement* denildiği de olmaktadır. Komplement kavramını kolayca anlayabilmek için önce On' luk düzene özgü açıklamalar verilmiş olmaktadır :

On'luk düzendeki her sayının bir komplementi vardır. Buna *Onlar Komplementi* denir ve $B = 10$ ile gösterilir. Bu komplement, sayıyı, sınırlanan rakam sayısındaki 10 nun kuvvetinden çıkarmakla elde edilecektir.

Örneğin, sınır sayısı olarak 10 nun kuvveti 2 ise,

$$7 \text{ nin On'lar Komplementi} = 10^2 - 7 = 100 - 7 = 93 ;$$

$$21 \text{ in On'lar Komplementi} = 10^2 - 21 = 100 - 21 = 79$$

demektir. Sınır sayısı olarak 10 nun kuvveti 3 ise,

$$64 \text{ ün On'lar Komplementi} = 10^3 - 64 = 1000 - 64 = 936 ;$$

$$415 \text{ in On'lar Komplementi} = 10^3 - 415 = 1000 - 415 = 585$$

demektir. On'luk düzen için oluşan bu kavram, İki'lik düzen için de vardır ve hatta bu düzende olup bitenler bizi daha çok ilgilendirmektedir. Burada da bu kez *İkiler Komplementi*'nden söz edilecektir. Bu kavramın tartışılmasında yukarıdaki bilgilerden yararlanılacaktır.

İkiler Komplementi ($B = 2$), sayıyı, sınırlanan rakam sayısındaki 2 kuvvetinden çıkarmakla elde edilir. Aşağıdaki örnek incelenmelidir :

$$1010_{(2)} \text{ in ikiler komplementi} = 10000 - 1010 = 0110_{(2)}$$

dir. Bunun pratik uygulaması şöyle gerçekleştirilir :

Bu ikiler komplementi, verilen sayının en küçük basamağından başlanarak (en sağdaki) sola doğru gidilirken rastlanılan ilk 1 aynen yerinde kalmak üzere alınır ; ondan sonra gelen 1 ler yerine 0, 0 lar yerine 1 konarak bulunur.

Bu açıklama doğrultusunda yukarıdaki örneği bir de bu yaklaşımla inceleyiniz :

1 0 1 0

↓

en sağ basamaktaki rakam (0 olduğu için aynen kalacak)

↓

sağdan sola giderken rastlanılan ilk 1 rakamı (yerinde kalacak)

↓

sola doğru gidilirken 1 den sonra gelen ilk rakam, 0 yerine 1 yazılır

↓

sola doğru gidilirken rastlanılan rakam ; 1 yerine 0 yazılır.

Böylece $1010_{(2)}$ nin komplementi $110_{(2)}$ olarak bulunacaktır. Bu, görülüyor ki yukarıdaki sonuç ile aynıdır.

Örneklerle de açıklanan bu kavramın kuramsal açıklaması ise şöyle yapılır :

$a_{(t)}$ sayısının komplementi $k_{(t)}$ ile gösterilirse, sayı ile komplementi arasında,

$$k_{(t)} = t^n - a_{(t)}$$

ilişkisi vardır. Burada t^n , n tane 0 ile daha üst kademede bir 1 den oluşmaktadır. Örneğin,

$$8_{(10)} = 1000_{(2)} \quad \rightarrow \quad 8 = 2^3 \quad \rightarrow \quad n = 3$$

de olduğu gibi ... Burada $n = 3$; 2 lik tabanda 8 in karşılığında üç tane sıfır bulunacağını belirtmektedir. Bir üst basamağa geçmek için 0 ların önünde bir tane 1 bulunacaktır.

$$10000_{(2)} = 16_{(10)} \quad \rightarrow \quad 16 = 2^4$$

demek olup, 16 nın komplement olması bu şekilde olanaklıdır. Yani $10000_{(2)}$ alınmalıdır.

Eğer sistemdeki bütün sayılarda n rakam sayısı sınırlanmış ise, daha üst kademede rakamlar dikkate alınmayacaktır. Bu şekilde sınırlamaya **Modülo t^n Aritmetiği** adı verilmektedir. Bir başka yaklaşımla, modüler aritmetiğin, t tabanlı bir sistemde uygulanabileceği anlatılmak istenilmektedir.

Örneğin, On'luk sistemde sınırlanan rakam sayısı $n = 1$ ise,

$$t^n = 10^1 = 10$$

olur. Aşağıdaki toplam

$$7_{(10)} + 9_{(10)} = 16_{(10)} \equiv 6 \text{ mod } 10$$

şeklinde ifade edilmektedir. Sınırlanan rakam sayısı $n = 3$ ise,

$$t^n = 10^3 = 1000$$

olur. Aşağıdaki toplam

$$375_{(10)} + 628_{(10)} = 1003_{(10)} \equiv 3 \text{ mod } 1000$$

olarak ifade edilecektir.

Yine genel ifadeye dönülürse, n rakam sayısı sınırlandırıldığında t^n ni oluşturan mod ' ların dikkate alınmaması gerekmektedir. Buna göre

$$k_{(t)} = t^n - a_{(t)} \quad \text{den} \quad k_{(t)} = - a_{(t)}$$

ilişkisine geçilir. Böylece n rakamlı negatif $a_{(t)}$ sayısı yerine geçmek üzere aynı sayıda rakamı bulunan pozitif $k_{(t)}$ sayısının kullanılabileceği anlaşılmaktadır. Böylece çıkarma işlemi yerine, çıkarılan sayının komplementini toplama sok-mak yeterli olacaktır. Doğal olarak burada, sınırlayan rakam sayısını aşan rakamı dikkate almamak gerekmektedir. Aşağıdaki örnek incelenirse,

$$54_{(10)} - 17_{(10)} = 37_{(10)}$$

ile bir çıkarma işlemi yapıldığı anlaşılmaktadır. Şimdi soru şudur : Aynı çıkar-ma işlemi, toplama işlemi yardımıyla nasıl gerçekleştirebiliriz ?

54 , 17 , 37 gibi sayılar için sınırlama sayısı, $10^2 = 100$ dür. O halde

$$k_{(t)} = - a_{(t)} \rightarrow k_{(t)} = 100 - 17 = 83$$

olur. Oysa $54 + 83 = 137$ olup baştaki 1 atılırsa 37 bulunur ki bu da çıkar-ma işlemiyle elde edilen sonuçtur. Burada pratik bir yaklaşımla 83 sayısı belirlenirken, 17 yi 100 e tamamlayan sayı olarak hesaplanabilir.

3. 8. İKİLİ SİSTEMDE SAYISAL İŞLEMLER (Toplama Ve Çarpma)

Konumuzun esasını oluşturmaları nedeniyle *sayısal işlemler'* in sadece İki'lik sistemde incelenmesi yeğlenmiştir. Burada temel işlemler *Toplama* ve *Çarpma* olup, gerekirse diğer işlemlerden de söz edilebilecektir.

Gerekli açıklamalar ve kuramsal oluşumlardan söz edilecek olmasına karşın konunun gelişmesi ve pekişmesi daha çok uygulama ağırlıklı olacaktır. Çünkü bu konu *işlem* sözcüğüyle zaten uygulamayı doğrudan çağrıştırmaktadır. Burada, iki tabanlı sayılar üzerinde çalışmalar yapılacak olması nedeniyle, önceki bilgi-lerimizi kullanarak, baştan itibaren sınırlı da olsa, On'luk sistemin bazı sayılarının İki'lik sistemdeki karşılıklarını bir tablo haline getirerek vermek, daha sonraki çalışmalarımız için yararlı bir hazırlık olacaktır. Bu amaçla aşağıdaki tablo hazırlanmıştır :

0 = 0	32 = 100000	64 = 1000000	96 = 1100000
1 = 1	33 = 100001	65 = 1000001	97 = 1100001
2 = 10	34 = 100010	66 = 1000010	98 = 1100010
3 = 11	35 = 100011	67 = 1000011	99 = 1100011
4 = 100	36 = 100100	68 = 1000100	100 = 1100100
5 = 101	37 = 100101	69 = 1000101	101 = 1100101
6 = 110	38 = 100110	70 = 1000110	102 = 1100110
7 = 111	39 = 100111	71 = 1000111	103 = 1100111
8 = 1000	40 = 101000	72 = 1001000	104 = 1101000
9 = 1001	41 = 101001	73 = 1001001	105 = 1101001
10 = 1010	42 = 101010	74 = 1001010	106 = 1101010
11 = 1011	43 = 101011	75 = 1001011	107 = 1101011
12 = 1100	44 = 101100	76 = 1001100	108 = 1101100
13 = 1101	45 = 101101	77 = 1001101	109 = 1101101
14 = 1110	46 = 101110	78 = 1001110	110 = 1101110
15 = 1111	47 = 101111	79 = 1001111	111 = 1101111
16 = 10000	48 = 110000	80 = 1010000	112 = 1110000
17 = 10001	49 = 110001	81 = 1010001	113 = 1110001
18 = 10010	50 = 110010	82 = 1010010	114 = 1110010
19 = 10011	51 = 110011	83 = 1010011	115 = 1110011
20 = 10100	52 = 110100	84 = 1010100	116 = 1110100
21 = 10101	53 = 110101	85 = 1010101	117 = 1110101
22 = 10110	54 = 110110	86 = 1010110	118 = 1110110
23 = 10111	55 = 110111	87 = 1010111	119 = 1110111
24 = 11000	56 = 111000	88 = 1011000	120 = 1111000
25 = 11001	57 = 111001	89 = 1011001	121 = 1111001
26 = 11010	58 = 111010	90 = 1011010	122 = 1111010
27 = 11011	59 = 111011	91 = 1011011	123 = 1111011
28 = 11100	60 = 111100	92 = 1011100	124 = 1111100
29 = 11101	61 = 111101	93 = 1011101	125 = 1111101
30 = 11110	62 = 111110	94 = 1011110	126 = 1111110
31 = 11111	63 = 111111	95 = 1011111	127 = 1111111

Bu tabloyu elbette genişletmek olanaklıysa da bu kadarıyla yetinilmiştir. İşlem-ler sırasında, gerektiği durumlarda bu tablodan yararlanılacaktır.

Boole Cebiri ve ona dayalı olarak ortaya çıkan ve geliştirilen uygulamalarda, daha sonra da görüleceği ve anlaşılabacağı gibi, *iki temel işlem toplama ve çarpma'dır*. Bu nedenle, konuya girilirken, bu iki operatörün üzerinde yoğunlaşılacağı ifade edilmiştir.

3.8.1. Toplama İşlemi

İki'li sistemdeki toplama işlemi, kavram olarak On'luk sistemdeki toplama işle- minden farklı bir uygulama değildir. Sağdan itibaren aynı sıradaki basamaklardaki rakamların sayısal toplamı (birikimi) *elde sayılar* da dikkate alınarak aynı sıradaki basamağa yazılmak suretiyle *toplama işlemi* gerçekleştirilir. Bunun On'luk sistemde ne şekilde yapıldığı herkesçe (hepimizce) bilinmektedir. İşte bu bilgilerimizi pratik bir anlayışla birleştirerek, İki'lik sistemde ne şekilde uygulanacağı aşağıda açıklanmış olacaktır. Ancak daha önce bir kuramsal çalışma yapmak konuya katkıda bulunacaktır.

Aynı t tabanında ifade edilmiş farklı iki sayı $a_{(t)}$ ve $b_{(t)}$ ise, diyelim ki çözümlenmiş ifadeleriyle aşağıda olduğu gibi verilmişlerdir :

$$\begin{aligned} a_{(t)} &= u_{n-1} \cdot t^{n-1} + u_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + u_2 \cdot t^2 + u_1 \cdot t + u_0 \\ b_{(t)} &= v_{n-1} \cdot t^{n-1} + v_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + v_2 \cdot t^2 + v_1 \cdot t + v_0 . \end{aligned}$$

Burada t nin kuvvetleriyle basamaklar temsil edilmektedir. İşte toplama işlemi- ni yapmak için t nin aynı kuvvetteki terimlerinin katsayılarını toplayarak, elde edilecek toplamı yine aynı t kuvvetinin bulunduğu basamağa yazmak gereke- cektir. Ancak burada iki özel durumu tartışmaya açmak gerekir. Bu ayrıntılar da aşağıda ayrıca incelenecektir. Ancak önce yukarıdaki ifadelerimizi örnekleyelim :

On'luk düzende 321 ve 442 sayılarının, kuramsal açıklamaya göre nasıl top- landıklarını görelim :

$$321 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 \quad \text{ve} \quad 442 = 4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

olarak çözümlenerek ifade edilebileceklerine göre

$$\begin{aligned} 321 + 442 &= [3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0] + [4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0] \\ &= (3+4) \cdot 10^2 + (2+4) \cdot 10^1 + (1+2) \cdot 10^0 \\ &= 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \\ &= 7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \\ &= 700 + 60 + 3 \\ &= 763 \end{aligned}$$

bulunarak işlem tamamlanır. Gerçekte bu işlem, pratikte, aşağıdaki gibidir :

321 Burada yapılan işi açıklamaya gerek yoktur.
 + 442 Ancak kuramsal açıklamayla karşılaştırmak üzere basamak kav-
 763 ramına dikkat edilmesi aşağıdaki açıklamalar için aydınlatıcı
 olur.

Şimdi bu uygulamadan da güç alarak yukarıda var olduklarını kabul ettiğimiz $a_{(t)}$ ve $b_{(t)}$ sayılarının toplamının ne şekilde gerçekleşeceği ifade edilmiş olacaktır .

$$\begin{aligned} a_{(t)} + b_{(t)} &= [u_{n-1}.t^{n-1} + \dots + u_1.t + u_0] + [v_{n-1}.t^{n-1} + \dots + v_1.t + v_0] \\ &= [u_{n-1} + v_{n-1}].t^{n-1} + \dots + [u_1 + v_1].t + [u_0 + v_0] . \end{aligned}$$

Burada iki durum tartışılmalıdır.

- a °) Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, basamaklardaki toplamların 10 u aşması hali ,
 b °) Basamaklardaki toplamların, herhangi sıradakiler için 10 u aşması hali.

$u_{n-1} + v_{n-1} < 10$ ise *elde artan* olmayacak ve bu koşulda *eldesiz toplam* gerçekleşecektir. Yukarıda seçtiğimiz örnek buna uygundur. Bu koşul doğal olarak her terimde aranacaktır.

Eğer, diğer terimleri de temsil etmek üzere $u_i + v_i$ toplamı *eldeli toplam* ise, işlem öncekinden farklı bir yorumu gerektirecektir. Elde nasıl olur ? Bunun yanıtı iki sayının toplamı $t = 10$ ya da $t > 10$ olduğu takdirde gerçekleşeceği doğrultusundadır. Yine hepimiz biliyoruz ki 10 u aşan değerden 10 çıkarılır ve kalan olması gereken yere yazılır. Çıkarılan 10, tabanın bir ile çarpımından ibaret olduğu için " *elde 1 var* " denir. Eğer çıkarılan örneğin 30 ise ; 30, tabanın 3 katı olduğundan " *elde 3 var* " denilecektir. Aşağıdaki iki örnek, elde toplamlar için düzenlenmiştir :

$\begin{array}{r} 879 \\ + 367 \\ \hline 1246 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4795 \\ + 9975 \\ \hline 14770 \end{array}$	Bu örneklerde On'luk düzenin sayılarıyla bu düzene göre toplama işlemleri yapılmıştır. Bunlar bizim için, sonraki çalışmalarımıza yol gösterici olacaktır.
--	---	--

Her iki örnekte de eldeli toplamlar vardır. İlkinde : en sağ basamakta $9+7 = 16$ olup $16 > 10$ ve 16 nın içinde bir tane 10 olduğundan bu toplam, 16 nın 10 atı- larak 6 yazılır ve atılan 10 için " *elde var 1* " denir. Bu " *elde 1* " bir sonraki ba- samakta yapılacak toplama katılır. Buna göre ikinci basamaklardaki sayıların toplamı, elde 1 ile birlikte $7+6+1 = 14$ olur. $14 > 10$ olduğundan 10 atılır ve 4 toplamın ikinci basamağına yazılır. Atılan 10, " *elde 1* " dir ve bir sonraki ba-

samaktaki toplama eklenecektir. Burada ise $8+3+1 = 12$ olur. Bu da eldeli sayı olup ancak toplam yapılacak basamaklar son bulunduğundan, eldeli olarak yerine yazılır. Böylece 1246 toplamına ulaşılır. Diğer örnekte, benzeri çalışma ve yorumları siz yapınız ! Ancak ilk basamaktaki toplamda $5+5 = 10$ olarak 10 atıldığında (elde 1 olduğunda) kalan 0 dır ki bu ayrıcalıklı duruma dikkat edilmelidir ($t = 10$ hali).

Bir farklı durum da, olsa olsa ; $a_{(t)}$ ve $b_{(t)}$ sayılarının basamak sayılarının aynı ol-mamasıdır. Bu, $m \neq n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_{(t)} &= u_{n-1}.t^{n-1} + u_{n-2}.t^{n-2} + \dots + u_1.t + u_0 \\ b_{(t)} &= v_{m-1}.t^{m-1} + v_{m-2}.t^{m-2} + \dots + v_1.t + v_0 \end{aligned}$$

çözümlemeleriyle gösterilmiş olsun. Bu, aşağıdaki örnek üzerinde de bir model olarak gösterilmiştir. $a_{(t)} + b_{(t)}$ toplamı, t nin aynı kuvvetleri için basamaklar karşılıklı geldiği sürece, önceden yapıldığı gibi, terimler üzerindeki toplamlar olarak gerçekleşecektir. Ancak bu kez $m \neq n$ olmasının doğal sonucu olarak, t nin belirli bir kuvvetinden sonra [$m > n$ ise $m-n$ den itibaren] karşılık olan basamak bulunmayacağından, bir öncekinin basamaklarında 0 olduğu düşünülerek işlem yapılacaktır. Burada da eldeli toplamlar, aynı uygulamayla , bir sonraki basamağa aktarılarak devam edilir.

$$\begin{array}{rcl} 418 & u_{n-1} = v_{m-3} & \text{olduğunu varsayalım. Öyleyse burada} \\ \underline{63740} & a_{(t)} + b_{(t)} \text{ toplamı şu şekilde gerçekleşecektir :} & \\ 64158 & & \\ a_{(t)} + b_{(t)} &= v_{m-1}.t^{m-1} + v_{m-2}.t^{m-2} + [u_{n-1} + v_{m-3}].t^{m-3} + \dots + [u_1 + v_1].t + u_0 + v_0 . & \end{array}$$

Bu açıklama ve hesaplama göre, örneğimizde görülen toplamın kuramsal yapısı tamamıyla ortaya konmuş olmaktadır.

$$\begin{aligned} 418 &= 4.10^2 + 1.10^1 + 8.10^0 \\ 63740 &= 6.10^4 + 3.10^3 + 7.10^2 + 4.10^1 + 0.10^0 \end{aligned}$$

olmak üzere, kuramsal çalışmaya koşut olarak toplam gerçekleştirilirse,

$$\begin{aligned} 418 + 63740 &= 6.10^4 + 3.10^3 + [4 + 7].10^2 + [1 + 4].10^1 + [8 + 0].10^0 \\ &= 6.10^4 + 3.10^3 + 11.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0 \rightarrow [11 = 10 + 1] \\ &= 6.10^4 + 3.10^3 + 1 \text{ (ve elde 1).} 10^2 + 5.10^1 + 8.10^0 \\ &= 6.10^4 + [3 + 1 \text{ (eldeden).}] 10^3 + 1.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0 \\ &= 6.1000 + 4.100 + 1.100 + 5.10 + 8.1 = 64158 \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

On'luk düzen için yeteri kadar açıklama yapıldığı düşünülerek ve kuramsal yapılarıdaki oluşumlar saklı kalmak üzere, artık İki'lik düzende toplama işlemlerini incelemek olanaklıdır.

Öncelikle şu basit toplamları yapmak ve bazı özel durumları tartışmak gerekmektedir. Bu amaçla *toplam tablosu* düzenlenmesi de olanaklıdır.

β ile Boole sınıfına giren sayılar (elemanlar) gösterildiğine göre $x, y \in \beta$ olmak üzere, yani x ve y ancak ve ancak 0 ile 1 değerlerini alabilen iki eleman olduklarına göre, aşağıdaki toplam tablosu düzenlenebilecektir :

x	y	$x + y$	Bir üst basamağa geçen	
1	1	0	1	$1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)} = 0_{(2)}$ ve elde $1_{(2)}$
1	0	1	0	$1_{(2)} + 0_{(2)} = 1_{(2)}$ eldesiz
0	1	1	0	$0_{(2)} + 1_{(2)} = 1_{(2)}$ eldesiz
0	0	0	0	$0_{(2)} + 0_{(2)} = 0_{(2)}$ eldesiz

Burada ilginç olan ilk durumdur. Boole Cebiri işlenirken görülecek ve kanıtlanacaktır ki $\forall x \in \beta$ için $x + x = x$ dir. Yani bu $1 + 1 = 1$ ve $0 + 0 = 0$ demek olacaktır. Cebir için bu şekilde gerçekleşen toplam, aritmetik olarak farklı gibi görülen bir sonuç vermektedir. Bunun bir açıklaması şu şekilde yapılabilir :

95. sayfamızdaki tabloda da görüldüğü gibi $0_{(10)} = 0_{(2)}$ ve $1_{(10)} = 1_{(2)}$ dir. Şimdi $1 + 1$ toplamını şöyle çözümleyelim :

$$1_{(10)} + 1_{(10)} = 2_{(10)} = 10_{(2)} \leftarrow [\text{tablodan}] \rightarrow 10_{(2)} = 1_{(2)} + 1_{(2)} .$$

Buradan, aritmetik olarak, eldeli toplam kavramını da katarak $1 + 1 = 10_{(2)}$ olduğu anlaşılır. Tablodaki diğer durumlarla ilgili olarak, ayrıca bir açıklamayı gerektirecek ayrıcalıklı bir yapı görülmemektedir. Ancak toplamların yorumu, yine $1 + 1$ de olduğu gibi yapılacaktır. Birini örneklemek istersek :

$$1_{(2)} + 0_{(2)} = 1_{(10)} + 0_{(10)} = 1_{(10)} = 1_{(2)}$$

olduğu görülür. Bu bilgi ve oluşumlardan hareket ederek, artık daha gelişmiş toplam problemlerine geçiş yapmak olanaklıdır.

Bu problemleri iki farklı yapıda ele alacağımız gibi (on'luk düzene koşut) daha

sonra *çıkarma işlemi'*nden de söz ederken bunun toplam yardımıyla nasıl yapılabileceği de tartışılacaktır. Bir yorumla, çıkarma işlemi, *Boole Aritmetiği* içinde toplamın bir parçası gibi görülerek, ayrı bir operatör olarak işleme sokulma-yacaktır.

$$\begin{array}{rcl} 32_{(10)} & \rightarrow & 100000_{(2)} \\ + 43_{(10)} & \rightarrow & + 101011_{(2)} \\ \hline 75_{(10)} & \rightarrow & 1001011_{(2)} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 108_{(10)} & \rightarrow & 1101100_{(2)} \\ + 91_{(10)} & \rightarrow & + 1011011_{(2)} \\ \hline 199_{(10)} & \rightarrow & 11000111_{(2)} \end{array}$$

Bu örnekler, On'luk düzendeki karşılıklarıyla birlikte İki'lik düzendeki sayıların toplama özelliklerini göstermektedir. Her iki toplam da, On'luk düzende elde-siz olmasına karşın, İki'lik düzendeki karşılıkları eldeli toplamlardır. İlkinde sadece son basamakta bir eldeli toplam varken, ikincisinde bu daha ilginç bir oluşum göstermektedir. Hele son basamaktaki, elde ile birlikte $1 + 1 + 1$ oluşumu nasıl yorumlanmalıdır? $1 + 1 + 1 = (1 + 1) + 1 = 10 + 01 = 11$ demektir. İşte 199 toplamı elde edilirken karşılığı İki'lik düzendeki sayının son basamak-larındaki toplamın oluşumu da bu şekilde gerçekleşmektedir.

Bunun bir başka yorumu da On'luk düzenle karşılaştırmalı olarak yapılabilir :

$$1_{(2)} + 1_{(2)} + 1_{(2)} = 1_{(10)} + 1_{(10)} + 1_{(10)} = 3_{(10)} = 11_{(2)} *$$

(*) 95. sayfadaki tabloya bakınız.

Bu yoruma göre, demek ki $1+1+1 = 3$ diyeceğimiz bir toplam oluşuyorsa, bu kez 3 ün İki'lik düzendeki karşılığı bulunup, yazılmalıdır. Bu da $11_{(2)}$ dir.

3.8.2. İşlemlere Özgü Özellikler

Bütün bu işlemler sırasında söylenmeyen ancak uygulanan bazı kurallar (aksiyomlar) vardır ki, bunlar bütün sayı sistemleri için geçerli olduğundan, ayrıca söy edilmemiştir. Örneğin yukarıda $a_{(t)} + b_{(t)}$ toplamı oluşturulurken, toplama için birleşme (assosiyatif) ve dağılma (distribütif) özellikleri kullanılmıştır. Bu gibi sayılar için, değişme (komütatif) özelliğinin varlığı da anımsanmalıdır. Bu özellikler aşağıda olduğu gibi ifade edilebilecektir.

$x, y, z \in \mathbb{N}$ ve $t > 1$ tabanlı bir sisteme ait sayılar olduğuna göre :

1°) Değişme Özelliği (komütativite) $x + y = y + x$; $x \cdot y = y \cdot x$

2°) Birleşme Özelliği (assosiyativite) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

3°) Dağılıma Özelliği (distribütivite) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Toplama ve Çarpma işlemleri için ifade edilmiş olan bu özellikler, ileride Boole Cebiri inşa edilirken ve uygulanırken sıkça kullanılacak ve bu özelliklerden yararlanılacaktır. Gerçekte bu özellikler, modern mantığın temel yasalarından ortaya çıkmışlardır.

3.8.3. Çıkarma İşlemi

Burada *Çıkarma İşlemi* bir zorunluluk olarak incelenmektedir. Çünkü bilinmektedir ki, aritmetikte çıkarma olarak adlandırılan işlem, cebirde farklı olarak yorumlanabilmektedir. Bu işleme cebirde, *negatif sayı ile toplama* ya da *eksi işaretli toplama* olarak bakılmaktadır ve aşağıda olduğu gibi görülmektedir :

$$x - y = x + (-y) .$$

Burada aynı işlem, eşitliğin solunda *çıkarmayla* ; eşitliğin sağında *toplamayla* temsil edilmiş olmaktadır ki işte yorum farkı budur.

Bu yaklaşımla, aşağıda yapılacak olan çalışmalar ve açıklamalar yardımıyla, bir çıkarma işlemini toplama işlemine dönüştürerek ifadeye katmanın nasıl olanaklı olabileceği araştırılacaktır ve tartışılacaktır. Ancak burada kullanılmak üzere, daha önce sözü edilmiş olan *komplement sayı* kavramı anımsanmalıdır.

$x, y \in \beta$ olmak üzere, toplamda olduğuna benzer bir tablo düzenleyelim :

x	y	$x - y$	Bir üst basamaktan alınan
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	0

$$\begin{aligned}
 1_{(2)} - 1_{(2)} &= 0_{(2)} \\
 1_{(2)} - 0_{(2)} &= 1_{(2)} \\
 0_{(2)} - 1_{(2)} &= 10_{(2)} = 1_{(2)} \text{ üstten alımlı} \\
 0_{(2)} - 0_{(2)} &= 0_{(2)}
 \end{aligned}$$

Burada ilginç olan $0 - 1 = 1$ bulunmasıdır. Oysa bu sonuç salt böyle oluşmamıştır. Yukarıda kısa bir açıklaması yapılmışsa da daha iyi bir açıklama aşağıda ayrıca bir örnekle birlikte verilmiştir :

$ \begin{array}{r} 22_{(10)} \rightarrow 10110_{(2)} \\ - 15_{(10)} \rightarrow -1111_{(2)} \\ \hline 7_{(10)} \rightarrow 111_{(2)} \end{array} $	Bu örnek de gözönünde bulundurularak $0 - 1 = 1$ için şu açıklama verilebilir. Tabloya dikkat edilirse, <i>bir üst basamaktan alınan</i> sütununda sadece
---	---

bu durum için 1 bulunmaktadır. Çünkü 0 dan 1 çıkarılamayacak ve böyle bir düzenlemeye gerek duyulacaktır. Yapılan, bir üst (önceki) basamaktan 1 alarak bu sayıya $10_{(2)}$ olarak bakmaktır ki bundan 1 çıkarılabilir.

$$10_{(2)} - 1_{(2)} = 1_{(2)} \rightarrow 2_{(10)} - 1_{(10)} = 1_{(10)} \rightarrow 1_{(10)} = 1_{(2)}$$

olarak bu döngü içinde, bu görülebilir. Burada dikkat edilmesi gereken, bir üst basamaktan 1 alınabilir mi ve alındığında sonraki çıkarma işlemleri nasıl sür-dürülebilir ? Bunu da örneğimizden izleyelim.

Önce bir üst basamaktan 1 alınabilmesi için o basamakta 1 olmalıdır. Eğer 0 varsa, bir daha üst basamağa gidilir ki bu da yeni bir yorumu gerektirir. Ve işler giderek karmaşıklaşır.

Örneğimizde, en sağdaki basamakta 0 - 1 olduğundan, ilk sayıda son iki basa-mak $01_{(2)}$ alınarak işleme sokulmuş ve yukarıda açıklanan işlem yapılmıştır. 1 alınan basamakta artık 1 in yerinde 0 var sayılmaktadır. O zaman yine 0 - 1 iş-lemi ortaya çıkar. Aynı yaklaşımla bir sonraki basamağa geçilir. Orada da aynı durum oluşur ve yine 0 - 1 işlemi görülür ki aynı şeyler yapılırsa bir önceki ba-samakta 0 olduğundan bu olanaklı değildir ve bir sonraki basamağa geçilerek oradaki 1 alınır ve bu kez $100_{(2)} - 11_{(2)}$ işlemi gerçekleşecek demektir. Bu ise On'luk düzendeki karşılıklarıyla,

$$100_{(2)} - 11_{(2)} = 1_{(2)} \rightarrow 4_{(10)} - 3_{(10)} = 1_{(10)} \rightarrow 1_{(2)} = 1_{(10)}$$

demektir. İşte çıkarmadaki en solda bulunan 1 de böyle bulunmuştur.

Bunlar açıklamalardır ve işlemlerin uygulanışında yol gösterici ilkeler ve pratik yaklaşımda çözümleyici çalışmalardır. Bunlardan esinlenerek, işlemleri doğru-dan sonuçlandıracak olgunluğa erişmek için, her zaman olduğu gibi bolca alış- tırma örnekleri yapılmalıdır.

Ancak şimdi, bu konudaki temel problem olarak, toplama yardımıyla çıkarma işleminin nasıl gerçekşebileceği tartışılacaktır.

İki'lik sayı sisteminde bu türlü bir işlem, çıkarılan sayının *ikiler komplementi* alınarak yapılır. İki'lik sistemde bir sayının komplementinin nasıl bulunacağı daha önce açıklanmışsa da burada bir örnek daha verilmektedir . Ancak çıkara-lacak sayı ile çıkarma yapılacak sayı aynı basamakta sayılar olarak düşünül-

melidir. Buna bakarak bir üst basamak oluşturulacaktır. Aşağıdaki örnek bunu açıklamada katkıda bulunacaktır :

$$\begin{array}{rcl}
 101111_{(2)} & b = 010111_{(2)} \rightarrow & k = 1000000 - 010111 = 101001 \\
 - 010111_{(2)} & a - b = 101111_{(2)} - 010111_{(2)} = & 011000_{(2)} \\
 \hline
 011000_{(2)} & a + (-b) = a + k = 101111_{(2)} + 101001_{(2)} = & 1\ 011000_{(2)} \\
 & = 011000_{(2)} = 11000_{(2)} & \uparrow \\
 & & \text{alınmayacak 1 (*)}
 \end{array}$$

(*) ile alınmayacak 1 e işaret edilmiştir.Çünkü komplement sayı bulunurken işleme bir üst derecede basamakla başlanılmış olup sonuçta da, sayılara ilişkin olmayan basamağın karşılığı olarak ortaya çıkan bu sayı dikkate alınmayacaktır. Bununla ilgi daha ayrıntılı açıklamalar , bu tür sayıların komplementlerinin bulunmasına ilişkin anlatım içinde yer almaktadır.

Bu şekilde çıkarma yerine toplama işlemini sokmanın nasıl olanaklı olduğu ye- terince açıklanmış olmaktadır. Konunun pekişmesi için aşağıya başkaca örnek- ler de konulmuştur :

ÖRNEK . 1 Çıkarmayla :

$$\begin{array}{rcl}
 10001 & \rightarrow & 17 \\
 - 1001 & \rightarrow & - 9 \\
 \hline
 1000 & \rightarrow & 8
 \end{array}$$

$$1001 \text{ in komplementi } \rightarrow 10000 - 01001 = 10111$$

Toplamayla :

$$\begin{array}{rcl}
 10001 & \rightarrow & 10001 \\
 1001 & \rightarrow & + 10111 \\
 \hline
 & & 1\ 01000 \rightarrow 1000 \rightarrow 8_{(10)} \\
 & & \uparrow \\
 & & \text{alınmayacak 1}
 \end{array}$$

ÖRNEK . 2

$$\begin{array}{rcl}
 1000011 & & \\
 - 11100 & & \\
 \hline
 ? & & \\
 \rightarrow 10000000 - 0011100 = 1100100 \text{ (komplement)} & & \\
 1000011 & & \\
 + 1100100 & & \\
 \hline
 1\ 0100111 & \rightarrow & ? = 100111 \\
 \uparrow & & \\
 \text{alınmayacak 1} & &
 \end{array}$$

3.8.4. Çarpma İşlemi

t tabanına göre ifade edilmiş bir doğal sayının, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere t^n ile çarpımı olan doğal sayı, verilen doğal sayının sağına n tane 0 (sıfır) yazılarak elde edilir. Bu sav, önce örnek üzerinde sayısal olarak, sonra da kuramsal olarak, aşağıda olduğu gibi açıklanabilecektir :

ÖRNEK . (On'luk düzenden) $\rightarrow 485 = 4.10^2 + 8.10^1 + 5.10^0$; $t = 10$
 $n = 2$ ($\in \mathbb{N}$) ise $t^n = t^2 = 10^2 = 100$ ile çarpma için :

$$\begin{aligned} 485 \times 100 &= 485 \times 10^2 = [4.10^2 + 8.10^1 + 5.10^0] \times 10^2 = \\ &= 4.10^4 + 8.10^3 + 5.10^2 = 4 \times 10000 + 8 \times 1000 + 5 \times 100 \\ &= 40000 + 8000 + 500 = 48500 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuç hepimiz tarafından beklenen bir sonuçtur ve yadırganmamıştır. Hatta pratik olarak bir algoritma oluşturulursa On'luk Sisteme özgü olan $10^2 = 100$ ile çarpılan 485 sayısının sağ yanına *iki tane sıfır* konulması savı, zaten yukarıda ifade edilmiş bulunmaktadır. Bu işlemler sırasında, önceden sözü edilmiş olan *dağılma özelliği* uygulanmıştır.

Kuramsal açıklaması aşağıda olduğu gibi yapılacaktır :

$$\begin{aligned} a_{(t)} &= u_{n-1}.t^{n-1} + \dots + u_1.t + u_0 \text{ sayısının } t^m \text{ ile çarpılması halinde :} \\ a_{(t)} . t^m &= [u_{n-1}.t^{n-1} + \dots + u_1.t + u_0] \times t^m \\ &= u_{n-1}.t^{m+n-1} + \dots + u_1.t^{m+1} + u_0.t^m + 0.t^{m-1} + \dots + 0.t + 0 \\ &= [u_{n-1} \ u_{n-2} \ \dots \ u_2 \ u_1 \ u_0 \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{m \text{ tane } 0}]_{(t)}. \end{aligned}$$

ÖRNEK .1 $4321_{(5)} \times 5^3 = ? \rightarrow 4321_{(5)} \times 5^3 = 4321000_{(5)}$ demektir.

ÖRNEK .2 $1001_{(2)} \times 2^2 = ? \rightarrow 1001_{(2)} \times 2^2 = 100100_{(2)}$ demektir.

Şimdi daha farklı bir çarpma özelliğini inceleyelim. Bu kez , herhangi bir tabana göre ifade edilmiş bir doğal sayının, tabandan daha küçük olan bir sayıyla çarpıldığı düşünülerek oluşturulan bu sava göre eldeli toplamalar da dikkate alınarak, aşağıda açıklandığı gibi bir oluşum gerçekleşecektir.

Burada öncelikle İki'lik Sistemin sayıları için problemin ele alınması ve incelenmesi yeğlenmektedir. Ancak konuya açıklık kazandırması ve kuramsal çalış-

maya katkısı nedeniyle, On'luk Sistemdeki benzeri işlemlerden ve hatta gerekirse diğer sistemlerden örnekler seçerek, yararlanılmaya çalışılmıştır.

Önce bu savı, On'luk düzene ait bir işlemde inceleyelim : $6 < 10 (=t)$ olarak,

$$\begin{aligned}
 75_{(10)} \times 6_{(10)} = ? &\rightarrow 75 \times 6 = [7.10^1 + 5.10^0] \times 6 = \\
 &= (7 \times 6).10^1 + (5 \times 6).10^0 \leftarrow \text{Dağılma Özelliği} \\
 &= 42.10^1 + 30.10^0 = [4.10 + 2] \times 10 + [3.10 + 0] \times 1 \\
 &= 4.10 \times 10 + 2 \times 10 + 3.10 \times 1 + 0 \times 1 \\
 &= 4.10^2 + (2 + 3).10 + 0 \\
 &= 4.100 + 5.10 \\
 &= 400 + 50 = 450_{(10)}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Oysa On'luk düzende $75 \times 6 = 450$ olduğunu pratik çarpma işlemiyle kolayca bulabiliyoruz. Öyleyse yapılmak istenilen, diğer sistemler için benzeri işlemlere ışık tutabilmektir.

Çarpma işlemlerinin yapılmasında çoğu kez *çarpım tablosu*'ndan da yararlanmak olanaklıdır. Bir uygulama olması için, On'luk düzene ve daha sonra kullanmak üzere İki'lik düzene ait çarpım tablolarını düzenleyelim :

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

×	0	1
0	0	0
1	0	1
x	y	x.y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Çarpma işlemi genel anlamda tanımlanırsa, aşağıya çıkarılan kuralın uygulanması gerekmektedir. Burada kural, $t > 1$ için herhangi t tabanlı sayı sistemi için verilmiş olacaktır. Uygulamada, özellikle iki tabanlı sistem için örneklenecektir.

Çarpmada Genel Kural : Çarpımı istenilen doğal sayılar altalta yazılır. Burada

her iki sayının aynı t tabanında olması esastır. Alta yazılan (ikinci) çarpanın birler basamağındaki rakam ile çarpılanın birler basamağındaki rakam çarpılır. Bulunan çarpım (çarpımdan elde edilen sayı) bu basamağa yazılır. İkinci adımda, bu kez alta yazılan sayının (çarpanın) ikinci basamaktaki rakamı çarpılanla çarpılıp bir önceki çarpımın altına, bir basamak sola kayacak şekilde yazılır. Benzeri işlemler ikinci çarpanın diğer rakamları için de tekrarlanarak, işlem tamamlanır. Bu şekilde oluşan ve sola kaymış şekilleriyle altalta gelen sayılar toplanır.

ÖRNEK . 1 On'luk sistemden bir örnek : $178_{(10)} \times 23_{(10)} = ?$

$$\begin{array}{r}
 178 \\
 \times 23 \\
 \hline
 534 \\
 + 356 \\
 \hline
 4094
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 178 = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \\
 23 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{olup,} \\
 178 \times 23 = [1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0] \times [2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0] = \\
 = (1 \times 2) \cdot 10^3 + (1 \times 3) \cdot 10^2 + (7 \times 2) \cdot 10^2 + (7 \times 3) \cdot 10^1 \\
 + (8 \times 2) \cdot 10^1 + (8 \times 3) \cdot 10^0 = \\
 = 2 \cdot 10^3 + [3 + 14] \cdot 10^2 + [21 + 16] \cdot 10^1 + 24 \cdot 10^0 = \\
 = 2 \cdot 1000 + 17 \cdot 100 + 37 \cdot 10 + 24 \cdot 1 \\
 = 2000 + 1700 + 370 + 24 = 4094
 \end{array}$$

Burada, seçilen sayılar için, iki tür çarpma işlemi de örneklenmiştir. İlki kuralın bir uygulaması olarak görülmektedir. Diğeri ise çözümleme yoluyla, toplamın ve çarpımın daha önce sözü edilen özelliklerinden yararlanılarak çarpma işlemi için nasıl gerçekleştirildiği görülmektedir. Özellikle dağılma özelliğinin uygulama da nasıl kullanıldığına dikkat edilmelidir. Basamakların kayarak yazılması karşılığı, çözümlemeli çalışmada, 10 nun kuvvetlerine göre terimleri bir araya getirirken sağlanmış olmaktadır. Çünkü 10 nun kuvvetleri, kuvvet sayısına bakarak, bizim basamak sayısını belirlememizi sağlamaktadır.

ÖRNEK . 2 $47_{(8)} \times 16_{(8)} = ?$

$$\begin{array}{r}
 47 \\
 \times 16 \\
 \hline
 352 \\
 + 47 \\
 \hline
 1042
 \end{array}$$

Altalta yazdığımız ve basamaklar düzeyinde çarpım işlemini başlattığımız takdirde, ilk işlem ikinci çarpanın en sağdaki basamağı ile ilk çarpanın ilk basamağını çarpmak gerekecektir.

$7_{(8)} \times 6_{(8)} = 2_{(8)}$ (ve elde 5 var) demektir. Açıklama : $7 \times 6 = 42 = 5 \times 8 + 2$

$$\begin{array}{ccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3}
 \end{array}$$

- ① : Elde sayı ; bir sonraki basamaktaki çarpıma eklenecek ;
 ② : $t = 8$ taban sayısı ;
 ③ : iki çarpımdan elde edilip basamağa yazılacak sayı .

İşleme devam edilirse, ikinci adımda 6×4 çarpımı yapılacaktır. Oysa bir önceki basamaktan da elde 5 vardır. Öyleyse işlem şöyle gerçekleşecektir :

$$[6_{(8)} \times 4_{(8)}] + 5_{(8)} = 24 + 5 = 29 = 3 \times 8 + 5$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 ① ② ③

- ① : Elde sayı ; ancak ilk rakam için çarpma tamamlandığından en solda yer alacak ;
 ② : $t = 8$ taban sayısı ;
 ③ : iki çarpımdan elde edilip basamağa yazılacak sayı .

Böylece 6'nın (ikinci çarpanın ilk basamağı) ilk çarpanın basamaklarına çarpım olarak nasıl dağıldığı ve ilk çarpma sonunda $352_{(8)}$ 'nin nasıl elde edildiği anlaşılmış olmalıdır. Çarpma işlemine, ikinci çarpanın ikinci basamaktaki rakamı $1_{(8)}$ ile devam edilecektir. Bununla 47'nin ilk basamağı çarpılacak ve elde edilen çarpımın ilk rakamı, altta ikinci sıraya, sola doğru bir hane kaydırılarak yazılacaktır. Böylece 7 sayısı elde edilecektir. Bu 8 ($= t$)'i aşmadığı için, diğer bir deyişle 7 rakamı 8 tabanlı sayı sisteminin rakamlar kümesine ait bir eleman olduğu için, burada elde aramadan, doğrudan çarpım elde edilmiş olacaktır. İkinci basamak çarpımında da 1 ile 4 çarpılarak 4 bulunacak ve bu da 8 tabanlı sistemin rakamlarından biri olduğu için elde aranmaksızın yerine yazılacaktır. Böylece ikinci sırada $47_{(8)}$ bulunacaktır. Bu şekilde altalta gelen, aynı basamaktan (burada 8) sayılar toplanırsa ki toplam kavramı daha önce işlenmiştir ; çarpımın ne olduğu belirlenecektir. Bu da ilginç bir işlemi gerektirmektedir. Çünkü

$$\begin{aligned}
 352_{(8)} + 47_{(8)} &\rightarrow 2 + 0 \text{ (kaymadan ötürü)} = 2 \\
 &\rightarrow 5 + 7 = 12 = 1 \text{ (elde sayı)} \times 8 \text{ (taban)} + 4 \\
 &\rightarrow \text{Çarpma tamamlandığı için : } 12 = 104_{(8)} \\
 &\rightarrow \text{Böylece çarpım : } 1042_{(8)} \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

ÖRNEK . 3 $10011_{(2)} \times 11110_{(2)} = ?$

İki tabanlı ($t = 2$) olan bu sisteme ait çarpım işleminin temel uygulamasında bir değişiklik olmamakla birlikte, artık eldelerin hesabında ve bir sonraki basamağa aktarılmasında 2 taban sayısına göre işlem yapılacaktır. Ancak

Basamak sayısı fazla olduğundan sonucu alırken yapılacak toplam ayrıca açıklanacaktır. Bir de her basamaktan elde edilen çarpımların yazılmasında, önceki örneklerde olduğu gibi basamak kaydırılarak yazılmasına özen gösterilmelidir.

$$\begin{array}{r}
 10011 \\
 \times 11110 \\
 \hline
 00000 * \\
 10011 \\
 10011 \\
 10011 \\
 + 10011 \\
 \hline
 000111010
 \end{array}$$

Yapılan bu çarpmanın nasıl gerçekleştiği, çarpma özellikleri yönünden , yukarıdaki açıklamalar dikkate alındığında fazlaca önemli değildir. İki'lik sistem için *çarpım tablosu* anımsanırsa , orada çarpma işlemleri net olarak açıklanmıştır . Burada ilginç olan çarpma düzeninden sonra yapılacak toplama işlemidir. Ayrıca * ile işaret edilmiş olan satırın, 0 ın çarpma işlemine girmesiyle ortaya çıkmış olduğuna dikkat edilerek, toplama bir katkısı olmamakla birlikte basamak kaymasına

neden olması sonucu, 0 ile yapılacak çarpımların yazılmasa da olabileceği ; ancak buna karşın bir sonraki çarpmaya geçilirken çift basamak kayma yapılması, pratik bir yaklaşım olarak uygun olabilecektir. Ayrıcalıklı olarak bu örnekte olduğu gibi 0, çarpanın son basamağında bulunuyorsa, bir sonraki basamaktan işleme başlayıp, toplama işlemi de bittikten sonra, önceden çarpma işlemine sokulmayan 0 a karşılık toplamın sonuna bir 0 eklenmelidir.

Buradaki toplama işlemlerinin incelikli olarak hesaplanması gerektiği vurgulanmışsa da bu toplama işleminin nasıl yapıldığı üzerinde durulmayacaktır. Okuyucu bununla, toplama ile ilgili bir ödev olarak, ilgilenmelidir.

Bu tür problemlerin bir alternatif işlem tekniği de, taban değiştirme kavramından yararlanarak, daha kolay işlem yapılacak başka bir tabana geçiş yapmaktır. Doğal olarak bunun için de ilk aklımıza gelecek olan *On'luk düzen* olacaktır. Yani çarpılması gereken sayıları On'luk düzende yazar ve bunları çarptıktan sonra sonucu yine ilk tabana dönüştürerek ifade edersek, o tabana ait çarpımı bulmuş oluruz demektir. Hemen yukarıdaki çarpma işlemiyle bu savı destekleyecek bilgiyi elde edebiliriz :

$$\begin{array}{rcl}
 10011_{(2)} & \rightarrow & 19_{(10)} \\
 \times 11110_{(2)} & \rightarrow & \times 30_{(10)} \\
 1000111010 & \rightarrow & 570 \quad \rightarrow \text{gerçekten de } 570_{(10)} = 1000111010_{(2)}
 \end{array}$$

dir.

Bu yöntemi daha karmaşık problemlerde tek çözüm tekniği olarak önermek de bir zorunluluktur. Bu da, farklı tabandaki sayılarla bir çarpma işleminin yapılması zorunluluğudur. Bu takdirde iki yol izlenebilecektir :

1°) Farklı tabanlarda verilmiş iki sayının çarpımını yapmak için, tabanca büyük olan, tabanca küçük olana dönüştürülerek, önce tabanları aynı kılınır ; yukarıdaki uygun yöntemlerden biri seçilerek çarpma işlemi gerçekleştirilir.

2°) Çarpma işlemine giren her iki sayı da, farklı tabanlarına göre 10 tabanlı sayı sistemine dönüştürülür ve çarpma işlemi bu sayılar için yapılır. Elde edilen sonuç, problemin istemine uygun tabana yeni bir dönüşüm yapılarak bulunmuş olur. Bu yöntemin bir uygulaması yukarıda verilmiştir. Aşağıda ise daha farklı bir uygulamayla açıklama pekiştirilmiş olmaktadır.

ÖRNEK . 1 $5471_{(9)} \times 2144_{(5)} = ?_{(10)}$

$$5471_{(9)} = 5.9^3 + 4.9^2 + 7.9^1 + 1.9^0 = 5 \times 729 + 4 \times 81 + 7 \times 9 + 1 \times 1 \\ = 3645 + 324 + 63 + 1 = 4033_{(10)}$$

$$2144_{(5)} = 2.5^3 + 1.5^2 + 4.5^1 + 4.5^0 = 2 \times 125 + 1 \times 25 + 4 \times 5 + 4 \times 1 \\ = 250 + 25 + 20 + 4 = 299_{(10)}$$

$$5471_{(9)} \times 2144_{(5)} = 4033_{(10)} \times 299_{(10)} = 1205867_{(10)} = 1205867$$

bulunur.

ÖRNEK . 2 $\Delta = 10$ gösterdiğine göre, $8\Delta 5_{(11)} \times 230_{(4)} = ?_{(7)}$

İşte bu örnekte, öncekinden farklı olarak, sonucun 7 tabanlı bir sisteme göre ifade edilmesi de istenilmiş bulunmaktadır. Öyleyse yapılacak iş, önceki gibi ya 10 luk sisteme göre çarpmayı yapıp sonucu 7 lik sisteme dönüştürmek ; ya da en küçük taban 4 olduğu için, 11 lik tabandaki sayıyı 4 lük tabana göre yazarak çarpma işlemini yaptıktan sonra, sonucu 7 lik tabana göre yazmaktır. Aşağıda her iki uygulama da verilmiştir :

Yol 1. (10 luk sisteme dönüştürerek)

$$8\Delta 5_{(11)} = 8.11^2 + \Delta . 11^1 + 5.11^0 = 8 \times 121 + 10 \times 11 + 5 \times 1 \\ = 968 + 110 + 5 = 1083_{(10)}$$

$$230_{(4)} = 2.4^2 + 3.4^1 + 0.4^0 = 2 \times 16 + 3 \times 4 + 0 \times 1 \\ = 32 + 12 + 0 = 44_{(10)}$$

$$8\Delta 5_{(11)} \times 230_{(4)} = 1083_{(10)} \times 44_{(10)} = 47652_{(10)} = 47652 \\ 47652 = 255633_{(7)}$$

bulunacaktır. (Burada, son satırdaki ara işlem okuyucuya bırakılmıştır.)

Yol 2. (En küçük basamaklı sayıya dönüştürerek ; burada $t = 4$)

$$8\Delta 5_{(11)} = 1083_{(10)} \text{ (yukarıda 1.yoldaki işlemde)} = 100323_{(4)}$$

olur. Böylece artık işlem $8\Delta 5_{(11)} \times 230_{(4)}$ yerine $100323_{(4)} \times 230_{(4)}$ ile gerçekleş- tirilecektir. Son çarpma işleminde her iki sayının da 4 tabanlı sistemde birer sayı olduğu görülmektedir. Bu işlem önceden önerilen yöntemlerden biri seçilerek yapılabilir.

$$100323_{(4)} \times 230_{(4)} \rightarrow \begin{array}{r} 100323 \\ \times \quad 230 \\ \hline 302301\downarrow \\ + 201312 \\ \hline 23220210_{(4)} \end{array} \rightarrow = 23220210_{(4)}$$

bulunur. Şimdi yapılacak iş bu sonucu 7 lik sisteme dönüştürerek yazmaktır ki ona ait işlemler de aşağıda gösterilmiştir. Ancak her ikisinde de ara işlemler gösterilmemiştir. Bunları okuyucu bir uygulama olarak yapmalıdır.

$$23220210_{(4)} = ?_{(7)} \rightarrow 23220210_{(4)} = 47652_{(10)} = ?_{(7)}$$

47652	$16807=7^5$	$2401=7^4$	$343=7^3$	$49=7^2$	$7=7^1$	$1=7^0$
- 33614	2	5	5	6	3	3
14038						
- 12005						
2033						
- 1715						
318						
- 294						
24						
- 21						
3						
- 3						
0						

Buradaki hesaplamalardan anlaşıldığına göre

$$47652_{(10)} = 255633_{(7)}$$

dir. Böylece, daha önce de açıklandığı gibi , 10 luk düzendeki bu sayı aracılığıyla, çarpımın 7 lik düzendeki karşılığı elde edil- miş olmaktadır ki bu da sonuçta

$$8\Delta 5_{(11)} \times 230_{(4)} = 255633_{(7)}$$

olarak bulunacaktır.

ÖRNEK . 3

$$1100011_{(2)} \times 21001_{(3)} = ?_{(2)}$$

Bir önceki örnekte olduğu gibi, farklı iki yoldan çözümlerin yapılabileceği düşünülmelidir. Bu kez bir seçenek olarak, 10 luk düzenden yararlanarak çarpma işleminin sonucunu bulma yolunda çalışılacaktır. Diğer yoldan çözümü, okuyucu bir alıştırmaya olarak yapmalıdır.

$$110011_{(2)} = 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^1 + 1.2^0 = 32 + 16 + 2 + 1 = 51_{(10)} ;$$

$$21001_{(3)} = 2.3^4 + 1.3^3 + 1.3^0 = 2 \times 81 + 1 \times 27 + 1 \times 1 = 190_{(10)}$$

oldukları belirlenir . Bilinmektedir ki

$$51 \times 190 = 9690$$

dır. Bu sonuçtan yararlanarak, bunu 2 lik düzende ifade ederek çarpımı buluruz. Gerekli ara işlemler yapılırsa,

$$9690 = 10010111011010_{(2)}$$

bulunacaktır. Bu sonuca bakarak artık çarpım için

$$110011_{(2)} \times 21001_{(3)} = 10010111011010_{(2)}$$

olduğu yazılabilecektir.

Bölme işlemleri konumuz için hiç de ilginç değildir. Kaldı ki Boole Cebiri için bu işlem türüne bir gereksinmemiz de olmayacaktır. Bu nedenle, ayrıca *Bölme İşlemi* üzerinde durulmamıştır.

BÖLÜM 4

BOOLE CEBİRİ

4. 1. GİRİŞ

George BOOLE (1815 - 1864) bir İngiliz matematikçisi ve mantıkçısı olup *Modern Mantık*' ın yanısıra *Boole Cebiri*' nin de kurucusu olmuştur. Bu gelişmeler yaşanırken elbette yalnız değildi. Örneğin **De Morgan** ve **Shannon** gibi meslektaşları da bu konulara katkıda bulunmuşlardır. Ancak Boole'un farklı olan misyonu, bu işte motor görevi yapmış olmasıdır. O'nun görüş ve düşünüş biçimiyle yönlenen bu cebir, daha sonraki uygulamaya alt yapı hazırlamış olmasıyla bile başlıbaşına konuşulmaya ve tartışılmaya değerde bulunmalıdır. Günümüzde ileri teknolojilerin uygulandığı hemen her ülkede, başta *elektronik* ve *bilgisayar bilimleri*'nde bu konuya olan gereksinme, direkt olarak ; diğer bir çok alanda ise bu konuları araç olarak kullananlar için indirekt olarak bilinmesi zorunlu konular haline geldiği gözardı edilemez bir gerçek olarak görülmektedir. Bu nedenle, denilebilir ki yer yer konu matematikçi ve mantıkçıları da aşmış bulunmaktadır. Ancak ne var ki, diğer matematik ve mantık konularında olduğu gibi, işin kuramsal çalışmalarını yapmak ve konuya ışık tutacak bilgileri derleyerek kullanıcılarına sunmak yine de matematikçilerin işi olarak görülmektedir. İşte bu kitap da, bir amacı bu olmak üzere, kendi katkılarımızı da yansıtarak konuya ilgi duyan herkesin yararına sunulmak üzere kaleme alınmıştır.

Boole Cebirinin temel anlayışı ve baz olarak kullandığı mantık, tamamen *önergeler mantığı* ile ve de *kümeler kuramı* ile özdeşleşmiştir. *Dual Sistemin* mantıktaki karşılığı, cebirsel yapı olarak tam anlamıyla *Boole Cebiri*'nde görülmektedir. Önceden de yeri geldikçe sözü edildiği ve özellikle **Bölüm 3** de incelendiği gibi, gerek kullandığı sayı sistemi (Binary Sistem) ve gerekse kullandığı operatörlerle, bu cebirin alt yapısının bir başka yönünün hazırlanmış olduğu da apaçık görülmektedir.

Boole Cebirinin çeşitli tanımları yapılmıştır. Çağdaş anlamda bu tanımlar artık *Aksiyomatik* olarak yapılmakta ve öngörülen aksiyomlar yardımıyla yapı ortaya

konulmaktadır. Kitabımızda, matematikçi ve mantıkçı **Huntington** tarafından 1904 yılında yapılmış olan tanım verilecektir. Ancak daha önce bazı temel kavramların oluşması çalışmalarına başlanacaktır.

4.2. BOOLİEN DEĞERLER

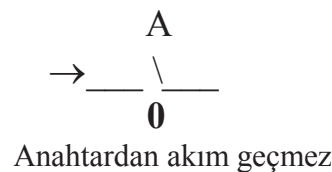
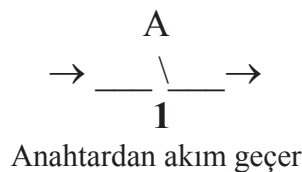
4.2.1. Basit Boolien Nicelik (Sabit ve Değişken)

Sadece iki değer alabilen uygun bir nicelik *basit boolien nicelik* olarak adlandırılır. Basit boolien nicelik **0** ve **1** değerlerini alabilecektir.

0 ve **1** sembol değerleri dışında, *Binary Sayı Sistemi'* nin de rakamlarıdır. Bu konuda ayrıntılı bilgiler bir önceki Bölümde verilmiştir. Bu rakamlar, bu tanım yardımıyla, β ile göstereceğimiz **Boole Cebiri**'nin de *rakamları* olmaktadır. Günlük yaşamımızda da örnekleri görülen bu rakamların sadece değerler olarak değil, ifade ettikleri anlam bakımından da değerlendirilmeleri gerekmektedir. Örneğin bir elektrikli aletin aç-kapa düğmesi yerinde çoğu kez 1 - 0 sembollerine rastlanılmaktadır ki bu 1 - 0'ın kullanılması, yukarıdaki açıklamanın bir sonucudur. Çünkü böyle bir alette bir ile sıfır, sıralı olarak "aletin çalıştığı" ve "aletin çalışmadığı" durumları temsil etmektedir. Alete akım gittiği 1 ile akım gitmediği 0 ile gösterilmektedir. El hesap makinalarında 0 ile 8 voltluk bir potansiyel mevcuttur. 0 voltun karşılığı ki hesap makinasının o anda çalışmadığını ifade etmek içindir. 8 voltun karşılığı ise, hesap makinasının o anda çalışır durumda olduğunu ifade etmek için (çalışmaya başlamasını temin etmek için) 1 ile gösterilen durumun sağlanması gerekir.

Bu açıklamalardan **0** ve **1** in, sadece rakamsal değerler değil, bir kavram oluşturacak şekilde görevlendirildikleri de anlaşılmaktadır. Boole Cebirinin uygulama alanına girmek üzere bu rakamlara verilen bu görevin bir açıklaması, aşağıdadır.

Bir devreden akım geçmesini sembolle **1** yazarak ; aynı devreden akım geçme-mesini sembolle **0** yazarak göstermek demek, burada *anahtar* adı verilen ve görüntü olarak buradaki şekillerle betimlenen sistemi gerçekleştirmek demektir.



A ile gösterilen ve *anahtar* adı verilen bu akım geçiş noktalarında, kapının yani A'nın *kapalı* ya da *açık* oluşu, sırasıyla **1** ve **0** kullanılarak gösterildiğinde *basit boolien nicelikler* bir gösterim aracı olmaktadır. İşte bu özellikleri nedeni ile bu iki değer, kullanım amacına uygun olarak ayrı ayrı değerlendirilmesi gerektirir ki bu da konu geliştikçe çok daha iyi anlaşılacaktır.

Basit boolien nicelikler *sabitler* ile *değişkenler*'in alabileceği değerler olup, β sınıfı içinde, sabitler a, b, c, ... gibi alfabenin ilk harfleri kullanılarak ; değişkenler ise x, y, z, ... gibi alfabenin son harfleri kullanılarak gösterilecektir. Bu gös-terim seçimi, adi cebirdeki gösterim tarzıyla aynı olmakla, bir ilkselliği olma-dığı için, üzerinde fazlaca durmayı gerektirmeyecektir.

4.2.2. Sıralama Bağıntısı

Bir basit boolien değişkenin alabileceği değerlerin sıralanması söz konusu edilebilecektir. Bu ilişki, alışılmış sembollerle $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ yazılarak gösterilebilecektir. 1 ve 0 boolien nicelikleri arasında,

$$1 > 0 \quad \text{ya da} \quad 0 < 1$$

şeklindeki ilişkiye *sıralama bağıntısı* denir. Eğer $x, y \in \beta$ ise bunlar arasında sıralama bağıntıları, çeşitliliğine göre :

$$x > y \quad , \quad x \geq y \quad , \quad x < y \quad , \quad x \leq y$$

yazış biçimleri kullanılarak ifade edilecektir.

4.2.3. Dualite

$$0 \Rightarrow 1 \quad \text{ya da} \quad 1 \Rightarrow 0$$

olarak tanımlanan bir basit boolien değişkenin değerler kümesinin bu şekilde bir oluşumu içermesi, bu kümenin *dual özelliği* olduğunu ifade ettiği gibi, bu ilişkiye de *dualite* denir. Bir boolien değişkenin duali $*$ sembolü kullanılarak gösterilir. $x \in \beta$ ise x in dualini göstermek için x^* yazılacaktır. Apaçıktır görülmektedir ki $x^* \in \beta$ dir. Bir işleme gerek duyulmaksızın yazılabilecek bir ilişki de

$$[x^*]^* = x$$

dir.

Dualite bir simetri bağıntısıdır. Yani x in duali y ise y nin duali de x dir.

$$x^* = y \Leftrightarrow y^* = x$$

demektir. Ayrıca dualitenin aşağıda ifade edilen bir özelliği daha vardır ki bu da dikkat çekicidir. Dualite sıralama bağıntısını ters çevirir.

$$x, y \in \beta \Rightarrow x > y \text{ ise } x^* < y^* \text{ ya da } x \geq y \text{ ise } x^* \leq y^*$$

demektir. Özel olarak, 0 in duali 1 ve 1 in duali 0 dır. Yani,

$$1^* = 0 \quad \wedge \quad 0^* = 1$$

dir.

4.2.4. Genel Boolien Nicelik

Herhangi bir kurala göre düzenlenebilen sınırlı ya da sınırsız bir küme E olsun. *Destek Küme* adı verilecek bu kümenin her elemanı bir basit boolien niceliktir. Bunların bir kurala göre bileşimleri, *Genel Boolien Nicelikler'* i oluşturur. Genel boolien nicelikler büyük harflerle $A, B, \dots$ ya da $X, Y, \dots$ ile gösterilirler. Bunlar önermeler mantığındaki *Önerme Polinomları'* nın karşılığı olan oluşumlardır. Bütün bileşenleri 0 olan bir genel boolien nicelik O ile, bütün bileşenleri 1 olan bir genel boolien nicelik ise I ile gösterilecektir.

4.3. İLK TANIMLAR

Matematiğin temel konularından biri olan *kümeler*'in hepsinin, oluşum yasa-sın-dan dolayı ortaya çıkan bir *cebirsel yapısı* vardır. Bunlar, kümenin elemanları arasındaki bir ya da daha fazla işlemler olarak tanımlıdır. Buna bir genel örnek, sayıların çeşitli topluluklarıdır. Örneğin, Tam Sayılar Kümesi, Reel Sayılar Kümesi gibi ...

Sayıları birleştirmede dört ana kural vardır : Toplama, Çıkarma, Çarpma, Bölme. Bölmeye ait bir ayrıcalıklı durum ayrıca belirtilmelidir : *0 ile bölme işlemi yapılamaz*. Buna ilişkin olarak aşağıdaki örneğin analizi, konuya oldukça açıklık kazandıracaktır.

$a = b$ olmak üzere aşağıdaki işlemlerin sıralı olarak yapıldığını görüyoruz ve sanki bir mucize gibi, sonuçta $1 = 2$ buluyoruz. Bu olabilir mi ?

Hipotezden :	$a = b$
Her iki yan a ile çarpılarak :	$a^2 = a.b$
Her iki yandan b^2 çıkarılarak :	$a^2 - b^2 = a.b - b^2$
Her iki yan çarpanlarına ayrılarak :	$(a+b)(a-b) = b(a-b)$
Her iki yan a-b ile bölünerek :	$a + b = b$
a yerine b yazılarak (hipotezden) :	$b + b = b$
Toplam yapılarak :	$2b = b$
b ile sadeleştirilerek :	$2 = 1$

bulunacaktır. Bunu doğal kabul etmemiz olanaklı değildir. Gerçekte bu bir *saçmalık*'tır. Öyleyse nasıl gerçekleştiği ve nedeni araştırılmalıdır. Dikkatli bir göz kolaylıkla bunun, *her iki yanın a-b ile bölünmesi* işlemi sonucu ortaya çıktığını görecektir. Çünkü hipotez olarak $a = b$ alınmış olması, bölme işlemi için ancak $a \neq b$ olması durumuna izin verecektir. Oysa yukarıda $a = b$ ye karşı $a-b$ ile yani $a-b = b-b = 0$ ile bölme işlemi yapılmıştır. İşte *0 ile yapılan bölme işlemi* sonucu bu saçma sonuca ulaşılmıştır. Demek ki *0 ile bölme* yapıldığı takdirde çıkacak sonucun doğru mu, yanlış mı ve hatta bu örnekte olduğu gibi saçma mı olup olmadığını anlamak olanaklı değildir. Öyleyse doğru olan *0 ile bölme işlemi* yapmamaktır. Yukarıda kümenin elemanlarına ilişkin bir özellik olarak ifade edilmek istenilen işte budur.

Kümeler teorisinde iki temel işlem, bilindiği gibi *kesişim* ve *bileşim*' dir. Buna benzer olarak, aksiyomatik tanıma geçmeden önce, *ikili işlem (dualite)* diye adlandıracağımız ve incelenmesi gerekli ve hatta zorunlu olan kavramları gözden geçirmek istiyoruz. $\otimes$ sembolü ile keyfi bir ikili işlem gösterilecektir. Bunun belki özel iki durumu *toplama* ve *çarpma* olabilir. Toplama ve çarpma, alışılmış semboller kullanılarak, sırasıyla $+$ ve $\cdot$ ile temsil edilecektir.

TANIM 1 . M kümesi üzerinde $\otimes$ ikili işlemi ; (a,b) şeklindeki eleman çiftleri- nin $c = a \otimes b$ olacak şekilde M nin bir c elemanını belirtmesidir.

ÖRNEK 1 . Rasyonel sayılar üzerinde *çıkarma işlemi* bir ikili işlemdir. Fakat aynı işlem, pozitif tam sayılar kümesi üzerinde ikili işlem değildir. Bundan baş-ka, çarpma, çıkarma ve bölme , ikili işlemlerin bilinen örnekleridir.

Bu kavramın genişletilmesi ve de ikili işlem denilince başkaca nelerin anlaşılması gerektiğini iyi kavrayabilmek için, aşağıdaki örneğin dikkatlice incelenmesi yerinde olacaktır. Çünkü bu örneklerde, ikili işlem $>$ ve $<$ olmak üzere, elemanları örnekte görülen bir kümede tanımlanmıştır.

ÖRNEK . 2 Elemanları $\emptyset, \Delta, \epsilon$ olan bir küme M olsun. İki ikili işlem, $>$ ve $<$, M üzerinde, aşağıdaki tablolar yardımıyla tanımlanmıştır :

$>$	$\emptyset$	Δ	ϵ
$\emptyset$	$\emptyset$	Δ	ϵ
Δ	Δ	ϵ	$\emptyset$
ϵ	ϵ	$\emptyset$	Δ

$<$	$\emptyset$	Δ	ϵ
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	Δ
Δ	$\emptyset$	Δ	ϵ
ϵ	$\emptyset$	Δ	ϵ

Bu tabloları okurken, örneğin birinci tabloda $a > b$ olarak, a nın bulunduğu satırda ve b nin bulunduğu sütundaki eleman bulunur. Burada a ve b , tablodaki üç elemandan biri olabilecektir. Buna göre, örneğin,

$$\begin{aligned} \epsilon > \Delta &= \emptyset & ; & \quad \Delta < \emptyset = \Delta \\ \epsilon > \epsilon &= \Delta & ; & \quad \emptyset < \Delta = \emptyset \end{aligned}$$

ikili ilişkileri yazılabilecektir. Siz de bu tablolardan, benzeri ikili ilişkiler kurunuz ! Hatta benzeri tablolar düzenleyerek, bu konudaki görüşünüzü artırınız.

Bu tür ikili işlemler arasında çoğu belirli basit denklikler veya kurallar, elemanter işlemlerle sağlanır. Bu işlemler sadece Boole Cebiri için değil, bütün matematik için de geçerlidir.

TANIM II . M kümesi üzerinde $\otimes$ ikili işlemi, $\forall a, b, c \in M$ için

$$a \otimes [b \otimes c] = [a \otimes b] \otimes c$$

dir. Buna *Assosiyatif (Birleşme) Özelliği* denir. Burada $\otimes$ ikili işlemi, özel olarak *toplama* ve *çarpma* için düzenlenirse :

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

yazılacaktır.

TANIM III . Bir $\otimes$ ikili işlemi M kümesi üzerinde , $\forall a, b \in M$ için,

$$a \otimes b = b \otimes a$$

özelliğini sağlıyorsa M üzerinde *Komutatif (Değişme) Özelliği* vardır denir. Burada $\otimes$ ikili işlemi, özel olarak *toplama* ve *çarpma* için düzenlenirse :

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

yazılacaktır.

TANIM IV . $\otimes$ ve $\oplus$, M kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem ise, $\forall a, b, c \in M$ için,

$$a \otimes [b \oplus c] = [a \otimes b] \oplus [a \otimes c]$$

oluyorsa, $\otimes$ işlemi $\oplus$ işlemi üzerine *distribütif* tir denir. Bu ilişki genel olarak *Distribütif (Dağılma) Özelliği* olarak adlandırılır.

Örnek olarak Kümeler cebirini alırsak, *arakesit (kesişim)* ile *birleşim* yukarıda- ki tanıma uyan iki kavramdır. Gerçekten de bu ikili işlemin yukarıda üç tanımda sözü edilen özellikleri vardır. Aralarında assosiyatif, komutatif ve distribütif özellikleri taşımaktadırlar.

Distribütif özelliğin toplam ve çarpım operatörleri için özel durumları inceleyirsek ; çarpımın toplam üzerine dağılımı,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

ve de toplamın çarpım üzerine dağılımı,

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

şeklinde gerçekleşecektir. Bu ikinci ilişki, diğer cebirlerde olmayan bir çeşit olarak karşımıza çıkmıştır. Bu dağılımın Boole Cebirine özgü bir yapısı vardır.

TANIM V . M kümesi içindeki ikili işleme göre, $\forall a \in M$ için,

$$a \otimes e = e \otimes a = a$$

özelliğini sağlayan bir **e** elemanı bulunabiliyorsa, buna *birim eleman* denir. Biliyoruz ki, toplama işlemi için birim eleman **0** ; çarpma işlemi için birim eleman **1** dir. Bunu,

$$a + 0 = a \quad ; \quad a \cdot 1 = a$$

yazarak ifade ederiz. Böylece toplama için $e = 0$; çarpma için $e = 1$ demektir.

4. 4. AKSİYOMATİK TANIM

Boole Cebirinin çeşitli tanımları arasından seçilmiş olan ve 1904 yılında **Hun-tington** tarafından yapılmış olan tanım aşağıdadır.

Bir β sınıfı, $+$ ve $\cdot$ ikili işlemlerine göre, aşağıdaki *postülalar'* ı gerçekliyorsa, β ye *Boole Cebiri* denir.

Postülat 1. (P_1) : $+$ ve $\cdot$ değişmeli (komutatif) ' dir.

Postülat 2. (P_2) : β de farklı iki birim elemanı vardır. Bunlar $+$ (toplama) ya göre 0 ; $\cdot$ (çarpma) ya göre 1 dir.

Postülat 3. (P_3) : Bu işlemlerden biri diğeri üzerine dağılımlı (distribütif) ' dir.

Postülat 4. (P_4) : β nin her a elemanı için $[\forall a \in \beta]$, yine β de olan öyle bir a' elemanı $[a' \in \beta]$ vardır ki

$$a + a' = 1 \quad \text{ve} \quad a \cdot a' = 0$$

olur.

Bu ikili işlemleri mutlaka $+$ ve $\cdot$ ile göstermek gibi bir zorunluluk yoktur. Bunların yerine yine aynı işlemleri temsil edecek başkaca sembollerin ; herhangi iki sembolün kullanılması da olanaklıdır. Bir küme $\otimes$ ve $\oplus$ işlemlerine veya $\cap$ ve $\cup$ ye göre benzeri postülatları gerçeklerse, böylece de bir Boole Cebiri tanımlanmış olabilir. İşte bu açıklamayla, Boole Cebirinin bir başka tanımı daha verilmiş olmaktadır. Bizim çalışmalarımız süresince, bu kitapta, alışılan ikili işlemler olarak, aksine söz edilmedikçe, $+$ ve $\cdot$ işlemleri kullanılacaktır.

Bu açıklama ve tanımdan çıkarılabilecek ilk sonuç, *kümeler cebiri'* nin bu postülatları sağlayan bir Boole Cebiri olduğudur. İşte bu özelliği nedeniyle ki kümeler kuramı, Boole Cebiri ile tam bir uyum içinde, işlevini yapmaktadır.

4. 5. İŞLEMLER

Bir cebir olarak, Boole Cebiri'nde de çeşitli işlemlerin tanımlanması ve özellik-lerinden söz edilmesi gerekmektedir. Bunların bazılarına, daha farklı amaçla da olsa değinilmiştir. Ancak bir bütünlük içinde, işlemlere özgü tanım ve açıkla-maların bilinmesi, hem bir zorunluluk ve hem de ileriye dönük çalışmalarımız için bir gereksinmedir. Burada bir husus daha dikkatimizi çekecektir. Bu da ortaya çıkan tanımlara bakarak modern mantıktaki karşılıklarını görmektir.

4.5.1. Bütünleyici

Bir basit boolien nicelik x olsun. Bunun *bütünleri* ya da *bütünleyicisi* olarak adlandırılan eleman x' ile gösterilir ; (P_4). Bu postülat'da a ile gösterilen basit boolien nicelik için ifade edilen tanımdan,

$$x + x' = 1 \quad \text{ve} \quad x \cdot x' = 0$$

yazılacağı anlaşılmaktadır.

Bütünler kavramı, modern mantığın *değilleme* kavramıyla karşılaştırılmalıdır. Orada bir p önermesini değillerken $\sim$ sembolü kullanılmış ve değillenmiş bir önerme $\sim p$ şeklinde gösterilmiştir. Modern mantığın ikili işlemleri olarak $\wedge$ ile $\vee$ tanımları ve bunlarla yazılmış ilişkiler anımsanırsa, bunlar arasında,

$$p \vee \sim p \equiv D \quad ; \quad p \wedge \sim p \equiv Y$$

olanlarına rastlanacaktır. İlkinin *totoloi'* yi , ikincisinin de *çelişme'* yi temsil et-tiği bilinmektedir. Bunlardan ve giderek daha sonra yapılacak tanımlardan hareketle, karşılaştırmalar yoluyla, Modern Mantık ile Boole Cebirinin birebir kesiştiğini görmek olanağımız ortaya çıkacaktır. Bu yaklaşım sadece ikili ilişkiler yönünden değil, mantık yasaları yönünden de test edilecek ve bu kesimde de ne kadar uyumlu bir yapının oluştuğu gözlenecektir. Elbette bunda fazlaca yadırganacak bir yön olmamalıdır. Çünkü aynı beynin süzgecinden geç-miş, temel felsefeleri değişmeyen iki yapı (stürüktür) oluşmuştur ki bunlar sistem bazında da birbirlerinin *bütünleri'* dirler. Burada temel felsefeye ilişkin baz, *dualite'* dir.

Mantık yasalarından hareketle, bütünler eleman için aşağıdaki temel ilişki kolaylıkla yazılabilecektir. Bunun mantıktaki karşılığı da yanında verilmiştir :

$$\text{Çift değilleme :} \quad (x')' = x \quad ; \quad \sim\sim p \equiv p$$

Bütünler elemanlar arasında, modern mantıkta rastlanılmayan bir ilişki olarak, sıralama bağıntısındaki özellikten söz edilebilir.

$\forall x, y \in \beta$ için x in bütünleri x' ; y nin bütünleri y' olduğuna göre, $x', y' \in \beta$ olup, $x > y \Rightarrow x' < y'$; $x < y \Rightarrow x' > y'$ demektir.

4.5.2. Toplama İşlemi

$\forall x, y \in \beta$ olmak üzere x ve y boolien niceliklerinin toplamı $x + y$ ile gösterilir ve aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanır. Daha doğru bir deyişle, toplam tanı-mından elde edilen sonuçlarla böyle bir tablo düzenlenebilecektir. Ayrıca bura- da tablonun farklı iki yoruma göre düzenlenişi de görülmektedir.

$+$	1	0
1	1	1
0	1	0

x	y	$x+y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tablodan : $1+1 = 1$; $1+0 = 1$; $0+1 = 1$; $0+0 = 0$ oldukları okunmaktadır.

Bu tablonun, sezgi ve çağrışım yoluyla, bir başka tabloya benzeşimi öngörülürse, bunun modern mantıkta *veya bağlacı* için düzenlenen tabloyla tamamen aynı olduğu söylenebilir. Şöyle ki, burada x ve y boolien niceliklerini p ve q gibi önermeler olarak görür, 1 yerine D , 0 yerine de Y yazdığımız düşünülürse, bu tablodan $\vee$ nın tanım tablosu ortaya çıkar. O zaman bu yaklaşımdan ve oluşumdan yararlanarak, $+$ işlemi ile $\vee$ bağlacı arasında bir kavram birliği oluşturmak olanaklı hale gelir. Ancak, sabırla diğer işlemlerdeki gelişmeleri de görerek, birlikte varılacak bir ortak oluşumla, *genelleme yapmak* olanaklıdır.

Burada uyarılması gereken bir husus, toplamdan elde edilen sonuçlar arasında

$$1 + 1 = 1$$

toplamının bulunmasıdır. Boole cebirinde bu toplam böyle gerçekleşmektedir. Bu daha sonra genel anlamda kanıtlanacaktır. Ancak *aritmetik toplam* olarak, daha önce öngörülen ve $1 + 1 = 10_{(2)}$ olarak kullanılan sonuç, bununla karıştırılmamalıdır. Bu sonuçlar arasındaki farkın nedeniyse, Boole cebirinde 1 ve 0 ın kullanım yerlerine göre, oluşturdukları kavram farkıdır. Çünkü görünüşleriyle içerikleri farklı olan 1 ler olarak düşünülmelidir. 0 için bunu, daha sonraki uygulamalarda ve kanıtlarda görüleceği gibi, bilinenlerden pek de farklı bir sonuç vermediğinden, ilksel (orijinal) bir durum olarak algılamak olanaklı değildir. Oysa 1 için bu sonuç başlangıçta şaşırtıcı görülmektedir.

$1 + 1 = 1 * \text{toplamı}$, matematikçiler kadar, konuyla ilgilenen pek çok kişinin de ilgisini çekmiştir. Sadece bu konuda çeşitli makaleler yazılmış ve bildiriler sunulmuştur. Eğer sizin de ilginizi fazlasıyla çektiyse, bunlardan bir örnek aşağıda verilmiştir. Bu makalenin bulunup okunması salık verilebilir.

4.5.3. Çarpma İşlemi

$\forall x, y \in \beta$ olmak üzere, x ve y boolien niceliklerinin çarpımı $x.y$ ya da xy yazı-larak gösterilir ve aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanır. Toplama işleminde de olduğu gibi, burada da gerçekte bu tabloların oluşumu, çarpma işlemlerinin or- taya koyduğu sonuçların birer yorumudur.

$\times$	1	0
1	1	0
0	0	0

x	y	$x . y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabodan : $1 \times 1 = 1$; $1 \times 0 = 0$; $0 \times 1 = 0$; $0 \times 0 = 0$ oldukları okunmaktadır.

Çarpmanın elde edilen bu sonuçlarının, alışılmış çarpım işlemlerinden farklı ol-maması, üzerinde başkaca tartışmayı gerektirmemektedir. Ancak burada da yine ortaya konan bu tablolarla, modern mantıkta *ve bağlacı* için oluşturulan tanım tablosuyla benzerliğine dikkat edilmelidir. Şimdi veya bağlacı (toplama işlemi) için yapılmış olan önerileri burada da yineleyelim. x ve y boolien niceliklerinin yerlerinde p ve q gibi önermeler bulunduğunu, 1 yerine D , 0 yerine Y konulduğunu varsayarsak, ortaya $\wedge$ bağlacının tanım tablosu çıkmış olacaktır. Demek ki buradan da, $.$ işlemiyle $\wedge$ bağlacı arasında bir kavram birliği olduğu anlaşılmış olacaktır.

4.5.4. Toplama Ve Çarpma İşlemlerine Ait Özellikler

Yukarıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerinin, aşağıda gösterilen özellikleri bulunduğu bilinmektedir : $\forall x, y, z \in \beta$ olmak üzere,

(*) Toygar AKMAN , **1+1 = 1 Tuhaf Bir Matematik**
Bilim ve Teknik Dergisi , Sayı 81 , 1974 , s. 35

- Komutatif Özellik : Toplamda	$x + y = y + x$
(Değişme Özelliği) Çarpmada	$x \cdot y = y \cdot x$
- Assosiyatif Özellik : Toplamda	$x + (y + z) = (x + y) + z$
(Birleşme Özelliği) Çarpmada	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- Distribütif Özellik : Birlikte	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
(Dağılma Özelliği)	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

Son ilişkilerde ayrıca bunlar sırasıyla,

a °) Çarpmanın toplama üzerine dağılımı,

b °) Toplamanın çarpma üzerine dağılımı

şeklinde de, işlem sırasına bakılarak adlandırılırlar. Benzeri özelliklerin modern mantıkta da bulunduğunu anımsayınız. Şimdi, toplama ve çarpma işlemlerini tanımladığımız sırada yaptığımız gibi, burada aynı önerilerle karşılıklı ilişkiler kurulursa, Boole Cebirinin temel bağıntılarıyla Modern Mantığın bu temel bağıntıları arasında nasıl benzerlikler bulunacağı gösterilmiş olacaktır.

x, y, z boolien nicelikleri karşılığı olarak p, q, r önermelerinin ; $+$ işlemi karşılığı olarak $\vee$ bağlacının , $\cdot$ işleminin karşılığı olarak $\wedge$ bağlacının alınacak olduğu öngörüldüğünden, yukarıdaki ilişkilerle karşılaştırılmalı olarak şunlar yazılabilir : lecektir :

$x + y = y + x$	$\rightarrow$	$p \vee q \equiv q \vee p$
$x \cdot y = y \cdot x$	$\rightarrow$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$x + (y + z) = (x + y) + z$	$\rightarrow$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	$\rightarrow$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$\rightarrow$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	$\rightarrow$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Modern Mantık ile ilgili açıklamalarımızda ve incelemelerimizde bu ilişkilerin bulundukları görülmektedir. Konu ilerledikçe, bu tür ilişkiler gittikçe çoğala-caktır. Bu yapı oluşturulduktan sonra, Boole Cebirinin kural olarak ortaya çıkan bu sonuçlarının doğrulukları, Modern Mantığın bu ilişkileri yardımıyla test edilecek ve doğrulukları kanıtlanmış olacaktır. Hatta ileride, bazı problemlerimizin çözümünde de bu kavram birliğini daha farklı yorumlayarak, bir yöntem gibi algılamak suretiyle, çözümlemelerde kullanılacaktır.

Dağılma Özelliğinin bir çeşidi daha vardır ki bu da *Distribütif Özelliğin İkinci*

Formülü olarak adlandırılmaktadır. Formül :

$$(x + y).(x + z) = x.x + x.z + y.x + y.z = x + x.y + x.z + y.z = x + y.z$$

dir. Bu da en az $1+1 = 1$ kadar enteresan bir sonuçtur. Adi cebirde karşılığı olmayan bir işlemdir. Ancak yukarıda, bunun mantıktaki karşılığının *veya'nın ve üzerine dağılımı* olarak açıklandığı görülmektedir (son ilişki).

4.5.5. De Morgan Formülleri

İki basit boolien nicelik x ve y ile bunların bütünleyenleri x' ve y' olduklarına göre,

$$(x + y)' = x' . y' \quad ; \quad (x . y)' = x' + y'$$

ilişkileri yazılabilecektir ki bunlara *De Morgan Formülleri* denir. Bunların bir açıklaması ve doğruluklarının test edilmesi, modern mantıktaki De Morgan denklikleri yardımıyla yapılabilecektir. Önceki çalışmalarımızda olduğu gibi, x ile y ye karşılık p ve q önermeleri, x' ile y' ye karşılık $\sim p$ ile $\sim q$, ayrıca ikili işlemlerin karşılığı olarak $+$ ya karşı $\vee$, $.$ ya karşılık $\wedge$ bağlaçları için

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad ; \quad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

denklikleri bulunur ki bunlar Modern Mantıkta görmüş olduğumuz De Morgan denkliklerinden başka bir şey değildir. Oysa bu denkliklerin doğruluğu yani mantık diliyle geçerli oldukları bilinmektedir.

4.5.6. Toplama Ve Çarpma Arasında Dualite

x ile y iki basit boolien nicelik olduğuna göre,

$$\begin{aligned} x + y \text{ nin duali } & x . y \quad ; \\ x . y \text{ nin duali } & x + y \end{aligned}$$

dir. Yine mantıktan anımsanacağı gibi, dualite ; $\wedge$ ile $\vee$ bağlaçlarının aralarında yer değiştirmesiyle elde edilen ifadelerin birbirine göre durumudur. Bunların herbirine diğerinin *duali'* dir denir. İşte burada da $\vee$ ile $\wedge$ bağlaçlarının karşılığı olan operatörler olarak $+$ ve $.$ işlemleri arasında, dualite tanımına uyan ilişkilerin düzenlenmiş olduğu görülmektedir ki, bu nedenle $+$ ve $.$ nin işlemsel özelliğiyle, birbirinin duali olduğu söylenebilecektir.

4.5.7. Birleşmiş Ayırma İşlemi

x ile y birer basit boolien nicelik olduklarına göre, bunlar arasında $\oplus$ sembolüyle bir işlem tanımlayarak $x \oplus y$ bileşimine, *birleşmiş ayırma işlemi* denir ve bu işlem aşağıdaki tablo (tablolar) yardımıyla tanımlanır.

$\oplus$	1	0
1	0	1
0	1	0

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tablodan : $1 \oplus 1 = 0$; $1 \oplus 0 = 1$; $0 \oplus 1 = 1$; $0 \oplus 0 = 0$ oldukları okunmaktadır.

Bu işlem, Modern Mantıktaki *Ya Da'lı Bileşim'* in karşılığıdır. Önceki gibi düşünülerek yapılacak düzenlemeler sonunda, bu tabloların Ya Da'lı bileşime ait tablo ile aynı olduğu görülecektir.

Bu işlem için aşağıdaki örnek, iyi bir açıklama oluşturacaktır :

$$\begin{aligned}
 \text{Tek Sayı} + \text{Tek Sayı} &= \text{Çift Sayı} \\
 \text{Tek Sayı} + \text{Çift Sayı} &= \text{Tek Sayı} \\
 \text{Çift Sayı} + \text{Tek Sayı} &= \text{Tek Sayı} \\
 \text{Çift Sayı} + \text{Çift Sayı} &= \text{Çift Sayı}
 \end{aligned}$$

Bu sonuçlar aritmetikten (sayılara ait özellikler olarak) bilinmektedir. Çift sayı-lar $\mathcal{C}$ ile ve tek sayılar $\mathcal{T}$ ile temsil edilirse, bu özellikler birer cebir ifadesi haline dönüştürüldüğünde,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} + \mathcal{T} &= \mathcal{C} \\
 \mathcal{T} + \mathcal{C} &= \mathcal{T} \\
 \mathcal{C} + \mathcal{T} &= \mathcal{T} \\
 \mathcal{C} + \mathcal{C} &= \mathcal{C}
 \end{aligned}$$

ilişkileri oluşur. Bu ilişkilerin tümünü kapsayan bir *doğruluk tablosu* düzenlenirse, aşağıda görülen tablo oluşacaktır ki bu da $\oplus$ sembolüyle tanımlanan işlemle tam bir uyum içinde olacaktır. Böylece Ya Da'lı bileşimin cebirdeki kar- şılığı da örneklenmiş olmaktadır.

$\oplus$	T	Ç
T	Ç	T
Ç	T	Ç

4. 6 . CEBİRSEL BAĞINTILARLA MANTIKSAL DENKLİKLER ARASINDAKİ BENZERLİK İLİŞKİLERİ

Yukarıda yapılan incelemeler şunu göstermiştir ki Boole Cebiri ile oluşan çeşitli ilişkilerin, mantıkta bir karşılıkları vardır. Aksiyomatik tanıma dayalı iki matematiğin, aksiyomları arasındaki benzeşimi yakalayarak, buradan yola çıkıp, aralarındaki ortak noktaları bularak, birleştirilebilmektir. İşte bu sağlanabildiği içindir ki, karşılıklı olarak, aşağıdaki benzeşim bağıntıları yazılabilecektir. Burada mantığın bağıntılarının, Boole Cebiri için baz oluşturduğu düşünülerek, öncelikle bunlar alınmış, cebirin bağıntıları bunlara göre düzenlenmiştir. Başta da bağıntı niteliği olmamakla birlikte, bazı temel notasyonlar karşılaştırılmıştır.

Mantıkta	Boole Cebirinde
D	1
Y	0
p , q , r , ...	x , y , z , ...
P , Q , R , ...	X , Y , Z , ...
$\sim p$	x '
$\vee$	+
$\wedge$	.
$\underline{\vee}$	$\oplus$
$p \vee q$	$x + y$
$p \wedge q$	$x . y$
$p \underline{\vee} q$	$x \oplus y$
$D \vee D = D$	$1 + 1 = 1$
$D \vee Y = D$	$1 + 0 = 1$
$Y \vee D = D$	$0 + 1 = 1$
$Y \vee Y = Y$	$0 + 0 = 0$
$D \wedge D = D$	$1 . 1 = 1$
$D \wedge Y = Y$	$1 . 0 = 0$
$Y \wedge D = Y$	$0 . 1 = 0$
$Y \wedge Y = Y$	$0 . 0 = 0$
$\sim D = Y$	$1 ' = 0$
$\sim Y = D$	$0 ' = 1$

$p \vee \sim p = D$	$x + x' = 1$	Totoloji
$p \wedge \sim p = Y$	$x \cdot x' = 0$	Çelişme
$p \vee p = p$	$x + x = x$	Denk güçlülük
$p \wedge p = p$	$x \cdot x = x$	" "
$\sim \sim p = p$	$(x')' = x$	Çift değilleme
$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$	$(x + y)' = x' \cdot y'$	De Morgan
$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$	$(x \cdot y)' = x' + y'$	"
$p \vee q = q \vee p$	$x + y = y + x$	Değişme Öz.
$p \wedge q = q \wedge p$	$x \cdot y = y \cdot x$	"
$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$x + (y + z) = (x + y) + z$	Birleşme Öz.
$\quad \quad \quad = p \vee q \vee r$	$\quad \quad \quad = x + y + z$	"
$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	"
$\quad \quad \quad = p \wedge q \wedge r$	$\quad \quad \quad = x \cdot y \cdot z$	"
$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	Dağılma Öz.
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	"
$p \vee (p \wedge q) = p$	$x + (x \cdot y) = x$	Soğurma Öz.
$p \wedge (p \vee q) = p$	$x \cdot (x + y) = x$	"
$D \vee p \vee q \vee r = D$	$1 + x + y + z = 1$	
$Y \wedge p \wedge q \wedge r = Y$	$0 \cdot x \cdot y \cdot z = 0$	
$p \vee Y = p$	$x + 0 = x$	Birim eleman
$p \wedge D = p$	$x \cdot 1 = x$	" "

Bu tablo elbette daha da genişletilebilir. Burada yazılan kadarının önemli bir kısmı önceden sözü edilen ve kanıtlanan ilişkilerdir. Bunlardan bir kaçı da bun-dan sonraki alt-bölümümüzün konusunu oluşturacaktır.

4.7. ÖNEMLİ TEOREMLER

TEOREM 1. Her iddia (önerme) ya da cebirsel özdeşlik (ilişki), Boole Cebiri- nin bir sonucu olarak çıkarıldıysa, yani β sınıfında bir oluşum ise, bu iddia, $+$ ve $\cdot$ işlemleri ile **1** ve **0** birim elemanları aralarında yer değiştirdiğinde de geçerli bir iddiadır.

Bu *dualite ilkesi* olarak bilinir.

Kanıt : Bu teoremin kanıtlanması, iki işlem ve iki özdeşliğe göre, postülasının simetriğinden kolayca yapılır. Eğer bir önerme veya cebirsel ifade, bir diğlerinden dualite ilkelerinin bir sonucu olarak bir kere uygulanması yoluyla elde edilmişse, ikinciye ilkinin *duali* denir. Aynı zamanda birinci de ikincinin dualidir.

Aşağıdaki teoremlerin herbiri iki dual önerme içerir. Bunlardan biri ayrıktır ; çünkü o kendisinin dualidir.

Teorem 1 den yararlanarak, dual iki önermeden sadece birinin kanıtlanmasının yeterli olduğu söylenebilecektir. Çünkü dualite ilkesi gereğince, dual iki önermeden birinin doğruluğu, diğerinin de doğruluğunu zorunlu kılar. Bu ilkeyi bu şekilde açıklamış olmamıza karşın, bunun bir gösterisini yapmış olmak için, Teorem 2 de ve yerine göre diğerlerinde her iki kanıt da verilmiş olacaktır.

Bu tür kanıtlar yapılırken atılacak her adım, başta konu için öngörölmüş aksi-yom ve postülatların , tanımların, özelliklerin ve daha önce kanıtlanmış önermelerin sıralı ve yerli yerinde kullanılmasıyla anlamlı olacaktır. Bu nedenle kullanılacak teoremlerin öncelikleri ve ardışık olarak sıralanmalarının bile önemi vardır. Özellikle de dualite ilkesi daima gözönünde bulundurulmalıdır.

Aşağıda sıralanmış olan önemli bazı teoremlerle ilgili olarak, daha önce bazı bilgiler verilmiş olabilecektir. Ancak bu ilişkilerin bir teorem olarak ifade edile-rek kanıtlarının verilecek olması yine de dikkat çekicidir.

TEOREM 2. $\forall x \in \beta$ için $x + x = x$ ve $x \cdot x = x$ dir.

<u>Kanıt :</u>	$x = x + 0$	$x = x \cdot 1$	P_2 den
	$= x + x \cdot x'$	$= x \cdot (x + x')$	P_4 den
	$= (x + x)(x + x')$	$= x \cdot x + x \cdot x'$	P_3 den
	$= (x + x) \cdot 1$	$= x \cdot x + 0$	P_4 den
	$= x + x$	$= x \cdot x$	

bulunur. Bu teoremin özel bir uyarlaması $x = 0$ ve $x = 1$ için yapılırsa,

ilkinden	$1 = 1 + 1$	ve	$0 = 0 + 0$
ikincisinden	$1 = 1 \cdot 1$	ve	$0 = 0 \cdot 0$

sonuçları elde edilmiş olacaktır ki özellikle, daha önce üzerinde ayrıca durulmuş olan ve ilksel özelliği bulunan $1 + 1 = 1$ iddiasının da varlığı böylece gös- terilmiş olmaktadır.

TEOREM 3. $\forall x \in \beta$ için $x + 1 = 1$ ve $x \cdot 0 = 0$ dır.

<u>Kanıt :</u>	$1 = x + x'$	$0 = x \cdot x'$	P_4 den
----------------	--------------	------------------	-----------

$$\begin{array}{lll}
= x + (x' \cdot 1) & = x \cdot (x' + 0) & P_2 \text{ den} \\
= (x + x')(x + 1) & = x \cdot x' + x \cdot 0 & P_3 \text{ ve Tanım IV den} \\
= 1 \cdot (x + 1) & = 0 + x \cdot 0 & P_4 \text{ den} \\
= x + 1 & = x \cdot 0 &
\end{array}$$

bulunur.

TEOREM 4. $\forall x, y \in \beta$ için $x + x y = x$ ve $x(x + y) = x$ dir.

Bu *soğurma özelliği* olarak daha önce sözü edilen ilişkinin, teorem olarak düzenlenmiş biçimidir.

$$\begin{array}{lll}
\text{Kanıt :} & x = 1 \cdot x & x = 0 + x \quad P_2 \text{ den} \\
& = (1 + y) \cdot x & = (0 \cdot y) + x \quad \text{Teorem 3 den} \\
& = 1 \cdot x + y \cdot x & = (0 + x) \cdot (y + x) \quad P_3 \text{ den} \\
& = x + x \cdot y & = x \cdot (x + y) \quad P_1 \text{ den}
\end{array}$$

bulunur.

TEOREM 5. $\forall x, y, z \in \beta$ için $x + x(yz) = x + (xy)z$ dir.

$$\begin{array}{ll}
\text{Kanıt :} & x + x(yz) = x \\
& = x(x + z) \\
& = (x + xy)(x + z) \\
& = x + (xy)z
\end{array}
\begin{array}{l}
\text{Teorem 4 den} \\
\text{Teorem 4 den} \\
\text{Teorem 4 den} \\
P_3 \text{ den}
\end{array}$$

olur.

TEOREM 6. $\forall x, y, z \in \beta$ için $x' + x(yz) = x' + (xy)z$ dir.

$$\begin{array}{ll}
\text{Kanıt :} & x' + x(yz) = (x' + x)(x' + yz) \quad P_3 \text{ den} \\
& = 1 \cdot (x' + yz) \quad P_4 \text{ den} \\
& = x' + yz \quad P_2 \text{ den} \\
& = (x' + y)(x' + z) \quad P_3 \text{ ve Tanım IV den} \\
& = [1 \cdot (x' + y)](x' + z) \quad P_2 \text{ den} \\
& = [(x + x')(x' + y)](x' + z) \quad P_4 \text{ den} \\
& = [xx' + xy + x'x' + x'y](x' + z) \\
& = [0 + x' + xy + x'y](x' + z) \\
& = x'(x' + z) + xy(x' + z) + x'y(x' + z) \\
& = x'x' + x'z + xyx' + xyz + x'yx' + x'yz \\
& = x' + x'z + 0 + xyz + x'y + x'yz \\
& = x' + xyz + x'(y + z + yz) \\
& = x' + xyz + x'[(yz)' + yz] \quad \text{De Morgan}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= x' + xyz + x' \cdot 1 = x' + xyz + x' && P_4 \text{ den} \\
 &= x' + xyz && [x' + x' = x'] \quad \text{olur.}
 \end{aligned}$$

TEOREM 7. $\forall x, y, z \in \beta$ için $+$ ve $\cdot$ ikili işlemleri *birleşmeli (assosiyatif)* dir.

Bu iddia toplam için : $x+(y+z) = (x+y)+z$ ve çarpım için $x.(yz) = (xy).z$ ilişki- lerinin var olduğunu ifade etmektedir.

Anımsanırsa, Boole Cebirinin Huntington tarafından yapılan aksiyomatik tanı-mında, β sınıfı içinde, Postülat 1 ile *komütatif* özelliğin varlığı ; Postülat 3 ile de *distribütif* özelliğin varlığı kabul edilmiş, ancak *assosiyatif* özelliğin bulunması bir zorunluluk olarak görülmemiştir. Bu teorem yardımıyla, β sınıfında bu özelliğin varlığı da gösterilmiş olmaktadır.

Kanıt : Burada sadece ilk ilişki için kanıt verilecektir. Önceden açıklandığı gibi, dualite ilkesi doğrultusunda, $+$ işlemi yerine $\cdot$ konulduğunda da elde edilecek sonucun doğru olacağı bilindiğinden, ikincisi bu yolla kanıtlanmış olacaktır. Önce $+$ için olan işlemin kanıtı yapılmıştır :

Teorem 5 ve Teorem 6 nın kanıtlanmış olan sonuçlarını bir kez daha yazarak, taraftara çarpıldıklarını öngörmüş olalım :

$$\text{Teorem 5 den : } x + x(yz) = x + (xy)z$$

$$\text{Teorem 6 dan : } x + x' + x(yz) = x' + (xy)z$$

$$(1) \quad [x + x(yz)][x' + x(yz)] = [x + (xy)z][x' + (xy)z]$$

demektir. Bu bağıntının birinci ve ikinci yanlarını daha sade bir şekilde ifade etmek olanaklıdır. Bunları göstermek üzere her iki yan için ayrı ayrı işlemler gerçekleştirelim ki bunlar da aşağıda görülmektedir :

$$\begin{aligned}
 1. \text{ yan için : } [x + x(yz)][x' + x(yz)] &= [x(yz) + x][x(yz) + x'] && P_1 \text{ den} \\
 &= x(yz) + x x' && P_3 \text{ den} \\
 &= x(yz) + 0 && P_4 \text{ den} \\
 &= x(yz) && P_2 \text{ den ;} \\
 2. \text{ yan için : } [x + (xy)z][x' + (xy)z] &= [(xy)z + x][(xy)z + x'] && P_1 \text{ den} \\
 &= (xy)z + x x' && P_3 \text{ den} \\
 &= (xy)z + 0 && P_4 \text{ den} \\
 &= (xy)z && P_2 \text{ den}
 \end{aligned}$$

olur. Bunlar (1) bağıntısının her iki yanına ait ifadeler olduklarından, yerlerine yazılırsa, (1) bağıntısı daha basit olarak ifade edilmiş olur ki o da

$$x (y z) = (x y) z$$

şeklinde görülecektir. Esasen gösterilmek istenilen de budur. Şimdi bundan hareket ederek, yukarıda açıklanmış olduğu gibi, $+$ ve $\cdot$ işlemlerinin aralarında bulunan *dualite ilkesi'*nden yararlanarak, bu ifadedeki $\cdot$ yerine $+$ konursa

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

bulunur ki bu da $+$ işlemi için *assosiyatif özelliği* temsil eden bağıntı olarak kanıtlanmış olur.

Bu iki sonucun bir özel durumu, aşağıda açıklandığı şekilde yorumlanabilir : xyz elemanlarının sıralı gruplaşmasında, gruplaşma şekli sonucu etkilemediğine (değiştirmedine) göre, x,y,z elemanları, ikili işlemlere göre aralarında nasıl gruplaşırlarsa gruplaşınsınlar toplam ya da çarpım değişmediğinden, anlamlı birer ifade olarak, parantezler kaldırılarak yazılacak xyz çarpımı ve $x + y + z$ toplamı yine assosiyatif özelliği temsil edecektir. Yani ,

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z = x + y + z \\ x (y z) &= (x y) z = x y z \end{aligned}$$

yazılabilecektir.

TEOREM 8. $\forall z \in \beta$ ise yine β sınıfında olan öyle bir z' elemanı vardır ki bu tek türlü belirlir.

z' nün, z nin *bütünleri* olduğu daha önce belirtilmiş ve Postülat 4 de de z' bütünler elemanının β sınıfında bulunduğu kabul edilmiştir. Burada teoremin iddiası, β sınıfı içinde ikinci bir z' bütünler elemanının bulunamayacağıdır. Bu teoreme , z' için *teklik teoremi* denilebilir.

Kanıt : β sınıfı içinde ikinci bir z' elemanının varlığını varsayalım. Böyle bir elemanı x ile ikincisini de y ile temsil edelim. Daha önceden biliyoruz ki

$$z + z' = 1 \quad \text{ve} \quad z \cdot z' = 0$$

dır (Postülat 4) . $z \in \beta$ olduğu gibi yine β de olan $x, y \in \beta$ için

$$z + z' = 1 \quad \text{ve} \quad z \cdot z' = 0$$

dan birlikte ifade edilerek, sıralı olarak toplam ve çarpım işlemleri için,

$$\begin{aligned} x + z &= 1 & \text{ve} & & y + z &= 1 \\ x \cdot z &= 0 & \text{ve} & & y \cdot z &= 0 \end{aligned}$$

oldukları yazılabilecektir. Burada x ve y elemanlarının farklı iki eleman olama- yacakları gösterilecektir. Aşağıdaki işlemleri izleyelim :

$x = 1 \cdot x$	P_2 den
$= (y + z) \cdot x$	Hipotezden
$= x \cdot y + x \cdot z$	P_3 ve P_1 den
$= x \cdot y + 0$	Hipotezden
$= x \cdot y + y \cdot z$	Hipotezden
$= y (x + z)$	P_3 ve P_1 den
$= y \cdot 1$	Hipotezden
$= y$	P_2 den

bulunur ki x ve y ile temsil edilen bütünler elemanların gerçekte bir tane olacağı anlaşılmaktadır. Demek ki

$$\begin{aligned} z + x &= z + z' = 1 \\ z + y &= z + z' = 1 \end{aligned}$$

olarak $x = y$ dir. Bu da $z' \in \beta$ nin tek türlü belirleneceğini ifade eder.

TEOREM 9. $\forall x \in \beta$ için $(x')' = x$ dir.

Kanıt : P_4 den ; $x + x' = 1$ ve $x \cdot x' = 0$ olup bu

$$(x')' = x$$

olması için gerek ve yeter koşuldur. Teorem 8 e göre, başka hiç bir eleman bu özelliğe sahip olamaz.

TEOREM 10. Herhangi bir Boole Cebirinde $1' = 0$ ve $0' = 1$ dir.

Kanıt : Teorem 3 e göre $1 + 0 = 1$ ve $1 \cdot 0 = 0$ dır. Ayrıca Teorem 8 e göre

x için sadece bir x' elemanı bulunacağından, bu ilişkilerden,

$$1' = 0 \quad \text{ve} \quad 0' = 1$$

yazılacaktır.

4.8. ÖRNEKLER

ÖRNEK 1. x ve y birer basit boolien nicelik olmak üzere,

$$xy(x' + y') = 0$$

olduğunu gösteriniz !

Yanıt : $xy(x' + y') = xyx' + xyy'$ (Dağılma özelliği)
 $= xx' \cdot y + x \cdot yy'$ (Komutatif özellik)
 $= 0 \cdot y' + x \cdot 0$ (P_4 den)
 $= 0 + 0$
 $= 0$

bulunur. Aynı problem De Morgan ilişkileri yardımıyla da yanıtlanabilir. Buna ilişkin çözüm yolu da aşağıda verilmiştir :

De Morgan formülü olarak $x' + y' = (xy)'$ ilişkisinin varlığı bilinmektedir.

$$xy(x' + y') = xy + (xy)' = 0$$

olur (Teorem 3 den). Siz de benzeri çalışmalarla

$$xy + x' + y' = 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

ÖRNEK 2. x,y,z birer basit boolien nicelik olduklarına göre

$$x(y + z) = xy + xz$$

eşitliğinin dualini yazınız.

Yanıt : Toplama ve Çarpmaya göre dualite tanımlarından hareketle

$$x + yz = (x + y)(x + z)$$

olduğu yazılacaktır. Gerçekte bu problem (örnek), dağılma özelliklerinden biri bilindiğine göre, dualite yardımıyla, diğerinin nasıl elde edileceğini gösterir.

ÖRNEK 3. Aşağıdaki mantık ifadelerini Boole Cebiri için düzenleyiniz. Bunun için, önceden öngörülen karşılılıkları anımsayınız !

$$\text{a) } p \wedge \sim q \quad ; \quad \text{b) } \sim p \vee q \quad ; \quad \text{c) } D \wedge [p \vee (\sim q \vee p)] \quad ; \quad \text{d) } D \vee [Y \wedge D]$$

Yanıt : a) $x \cdot y'$; b) $x' \oplus y$; c) $1 \cdot [x + (y' \oplus x)]$; d) $1 + [0 \cdot 1]$

4.9. ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

$\forall x, y, z \in \beta$ için aşağıdaki işlemleri yapınız :

1. a) $x \cdot (x + y) = x$; b) $x + (x \cdot y) = x$
2. a) $x + y = (x' \cdot y')'$; b) $x \cdot y = (x' + y')'$
3. a) $x \cdot (x' + y) = x \cdot y$; b) $x + (x' \cdot y) = x + y$
4. $x \cdot y' = 0 \Leftrightarrow x \cdot y = x$
5. $[y \cdot x = z \cdot x \wedge y \cdot x' = z \cdot x'] \Rightarrow y = z$
6. $[x + y = x + z \wedge x' + y = x' + z] \Rightarrow y = z$
7. $x = 0 \Leftrightarrow y = (x \cdot y') + (x' \cdot y)$ [*Poretzky yasası*]

$\forall x_1, \dots, x_n \in \beta$ için aşağıdaki kuralları kanıtlayınız :

1. $x \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = xy_1 + xy_2 + \dots + xy_n$
2. $x + (y_1 \dots y_n) = (x + y_1) \cdot (x + y_2) \dots (x + y_n)$
3. $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)' = x_1' \cdot x_2' \dots x_n'$
4. $(x_1 \cdot x_2 \dots x_n)' = x_1' + x_2' + \dots + x_n'$

BÖLÜM 5

BOOLE FONKSİYONLARI

5. 1. TANIM

Sabit deyimi, herhangi tek bir sembol veya belirli tek bir eleman için kullanılır. Örnek olarak, 0 ve 1 sabitlerdir. Değişkenler ise x, y, z, ... ile gösterilen, belirtilmemiş herhangi bir eleman yerine kullanılır. *Boole Fonksiyonu* ile de, sonlu sayıdaki semboller kümesinin *toplama* (+) ; *çarpma* (.) ; *bütünleyen* (') işlemleriyle olan bir topluluğu ya da bileşimi (kombinasyonu) anlaşılabacaktır.

Örneğin, yukarıdaki tanıma uyan bir Boole fonksiyonu ,

$$\begin{aligned} & (a' + b') \cdot c + a \cdot b' \cdot x + 0 \\ & (x + y + z') \cdot (y + z) \\ & x' + x \cdot y \cdot z \end{aligned}$$

gibi benzeri görüntülerde olabilecektir. Bu örneklerde, x,y,z değişkenleri ; a, b, c bilinmeyen sabitleri ve 0 da bilinen bir sabiti temsil etmektedir.

Boole Fonksiyonları, ayrıntıları ileride görüleceği gibi, bu örneklerin dışında, düzenli *formlar* oluşturularak incelenir. Buna, uygulama alanına geçildiğinde başkaca nedenlerle gereksinme olduğu gibi, modern mantıkta olduğu gibi Boole cebirinin de *dual içeriği*, yine böyle bir *ikili sistem* oluşturulmasını adeta öngörmektedir. Bu fonksiyonların standart biçimleri,

a °) *Ayırıcı Normal Formda Fonksiyon*

b °) *Birleştirici Normal Formda Fonksiyon*

olarak adlandırılmaktadırlar. Bunlar sadece *biçimsel düzenleme* yönünden veri-len adlardır ki hemen aşağıda açıklanmaya başlanacaktır.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \beta$ olmak üzere, β sınıfına ait n tane değişken arasında kurulmuş olan özel bazı fonksiyonlar olarak görülürler ki, bunların yukarıda adlandırılan

biçimleri, ya *toplamların çarpımları* ya da *çarpımların toplamları* şeklinde ifade edilebilecektir. Burada her değişken, yerine göre, (') işlemini bulundurabilir. Örneğin, ayırıcı normal formda fonksiyonlar ; $x, y, z \in \beta$ olduğuna göre,

$$x y \ ; \ x' y z + x y z' \ ; \ x + y z$$

görüntüsünde ; birleştirici normal formda fonksiyonlar ise,

$$x + x' + y \ ; \ (x + y) (x + y' + z)$$

görüntüsünde olacaktır. Burada değişken sayısı, fonksiyonların niteliğini deşış-tirmemektedir. Bu örnekleri n deşışkenli bir Boole Fonksiyonu için de çoğalta- biliriz. Buna bağılı olarak Boole Fonksiyonları genellikle, F ya da f ile gösterilirler. Ancak çoğı zaman deşışkenlerin de belirtilmesi gerektiğinde bir fonksiyon $F(x)$, $F(x,y)$, $F(x,y,z)$, $F(x_1, \dots, x_n)$ şeklinde ifade edilmiş olacaktır.

5. 2. SHANNON TEOREMİ

Boole Fonksiyonunun standart biçimlerini incelemeye geçmeden önce, önemli sayılabilecek bir teoremin gözden geçirilmesi yararlı olacaktır. Bu *Shannon Teoremi* olarak adlandırılmakta ve aşağıda olduğu gibi ifade edilmektedir :

$\forall x, y, z, \dots \in \beta$ olmak üzere,

$$(1) \quad f(x, y, z, \dots) = [x + f(0, y, z, \dots)] [x' + f(1, y, z, \dots)]$$

$$(2) \quad f(x, y, z, \dots) = x \cdot f(1, y, z, \dots) + x' \cdot f(0, y, z, \dots)$$

dir. Bu teoremler, bu eşitliklerin her iki yanından aynı fonksiyonun elde edildiğı gösterilerek kanıtlanmaktadır.

$x = 1 \Rightarrow x' = 0$ ve $x = 0 \Rightarrow x' = 1$ alındığına göre, (1) de bu değerler ko-nursa şu sonuç alınır :

$$f(1, y, z, \dots) = [1 + f(0, y, z, \dots)] [0 + f(1, y, z, \dots)] .$$

Burada, daha önceki bilgilerimizden yararlanarak,

$$1 + f(0, y, z, \dots) = 1$$

$$0 + f(1, y, z, \dots) = f(1, y, z, \dots)$$

yazılacaktır. Bunlara göre,

$$\begin{aligned} f(1,y,z,...) &= 1 \cdot f(1,y,z,...) \\ f(1,y,z,...) &= f(1,y,z,...) \end{aligned}$$

bulunur ki teorem kanıtlanmış olur.

$x = 1$ ve $x' = 0$ için yapılan bu değerlendirmede olduğu gibi bu kez $x = 0$ ve $x' = 1$ için de tekrarlanırsa, bu kez her iki yandan hareket edildiğine göre,

$$f(0,y,z,...)$$

bulunduğu görülecektir.

Bu teoremin kanıtlanmasında kullanılabilecek ikinci bir yol da aşağıda açıklanmıştır. Bu da ilginç bir çalışma olarak kayıtlarımızda bulunmalıdır : (1) eşitliği üzerinde dağılma özelliği uygulanırsa,

$$f(x,y,z,...) = x \cdot x' + x \cdot f(1,y,z,...) + x' f(0,y,z,...) + f(1,y,z,...) f(0,y,z,...)$$

olup burada $x \cdot x' = 0$ dir. x,y,z arasında bir özellik olarak,

$$(3) \quad (x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$$

$$(4) \quad x y + x' z + y z = x y + x' z$$

ilişkileri vardır. Bunların varlığını okuyucu bir çalışma olarak yapmalı ve görmelidir. Dikkat edilirse, gerçekte bunlar birbirinin duali olan eşitliklerdir. Bu ise, önceden konuyla ilgili tartışmalarımız anımsanırsa, birinin kanıtlanmasının, her ikisinin kanıtlanmış olması için yeterli olduğu anlamına gelecektir.

(3) ve (4) ile ifade edilen eşitliklerin varlığı bu şekilde söz konusu edildiğine göre problemimize dönüldüğünde, son ifadenin

$$f(x,y,z,...) = x \cdot f(1,y,z,...) + x' \cdot f(0,y,z,...) + f(1,y,z,...) f(0,y,z,...)$$

şeklini aldığı görülerek, (4) ile karşılaştırıldığında, x ve x' nün çarpanları olarak, $f(1,y,z,...)$ bu ifadedeki y nin yerinde olarak, $f(0,y,z,...)$ da bu ifadedeki z nin yerinde olarak düşünüldüğünde, tam bir uyum olduğu ve buna göre sonucun eşitliğin ikinci tarafından ibaret olması gerektiği anlaşılarak,

$$f(x,y,z,...) = x \cdot f(1,y,z,...) + x' \cdot f(0,y,z,...)$$

bulunacaktır ki, bu sonuç da teoremin iddiasından başka bir şey değildir.

5. 3. AYIRICI NORMAL FORM

Boole sınıfı içinde, x_j ve x_j' elemanlarının bir fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^m f_i \left[\prod_{j=1}^n x_j, x_j' \right]$$

şeklinde düzenlenmişse, buna *Ayırıcı Normal Form* denilmektedir. Bu biçimsel düzen içinde bir Boole Fonksiyonu tanımlandığına gör buna da *Ayırıcı Normal Formda Fonksiyon* adı verilmektedir.* Bu tür fonksiyonlar, bir çalışma düzeni içinde **dnf** sembolüyle de gösterilmektedirler. Bu dipnotta açıklanmıştır. Biz de yeri geldikçe ya da gereksinme oldukça bunu kullanacağız.

Yukarıda tanımlanan form ya da fonksiyon ile anlatılan, $\prod$ operatörü ile x_j , x_j' değişkenlerinin ($j = 1,2,...,n$) için çarpımlarından oluşan bir yapıdır. Bu değişik yapıların herbiri i indisiyle düzenlenmiş bir başka operatör tarafından yeniden yapılandırılmaktadır. $i = 1,2,...,m$ ve $m \leq 2^n$ olmak üzere f_i ile temsil edilen bu fonksiyon, $\sum$ operatörü altında bu tür çarpımlardan oluşan tek tek ifadelerin toplamlarını düzenleyerek fonksiyonu ortaya koyacaktır. İşte yukarıda *çarpım-ların toplamı* şeklinde ifade edilen bileşim şekli budur. Bu fonksiyonun doğal olarak bazı özellikleri vardır ki bunların en başta geleni, bu fonksiyonda benzer terimlerin bulunamayacağıdır. Yani birbirinin aynı olan iki terim bulunamaz. Çünkü Boole Cebirinden biliyoruz ki, $x + x = x$ ve $x \cdot x = x$ dir. Ayrıca 0 ve 1 in, n değişkene göre ayırıcı normal şekilde oldukları söylenebilir.

Boole fonksiyonlarıyla ilgili olarak, bazı önemli özellikleri de içeren bir teorem aşağıda verilmiştir ; inceleyelim :

TEOREM. Boole sınıfında, sabit bulundurmayan bir fonksiyon, ayırıcı normal formda bir fonksiyondur.

Kanıt : İçinde sabit bulundurmayan, n tane keyfi değişkenin bulunduğu bir fonksiyon F ile gösterilmiş olsun. Eğer F fonksiyonu, X ve Y fonksiyonlarının $(X + Y)'$ ve/veya $(X Y)'$ şeklindeki ifadelerini içeriyorsa, De Morgan For -

(*) Ayırıcı Normal Form = Disjunctive Normal Form = dnf

mülleri uygulanarak bunlar sırasıyla X' , Y' ve/veya $X' + Y'$ şeklinde ifade edilebileceklerdir. Gerekli olduğu zaman da, bu işlemlere ardışık olarak devam edilir. (') ile ilgili işlemler, yalnız bir tek x_j' değişkeninde görülünceyedek ardışık işlemler yapılır. Ayrıca (.) üzerinde (+) nın distribütif olma özelliği kullanılarak, F fonksiyonu bir polinom şekline sokulabilir, yani düzenli bir biçim alması sağlanabilir.

Şimdi bir özel durum olarak, herhangi bir t_i teriminin x_j ve x_j' yü bulundurmadığını düşünelim. Bu terim $x_j + x_j'$ ile çarpılabilir. Çünkü biliyoruz ki çarpma için birim eleman 1 dir ve esasen $x_j + x_j' = 1$ dir. Demek ki bu işlem yardımıyla F de bulunmayan değişken, bu fonksiyona böylece sokulabilir. Yani, bu şekilde, $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere x_j ve x_j' değişkenlerinin her terimde bulundurulması sağlanmış olacaktır. F fonksiyonu, eşdeğer bir fonksiyonla, ancak biçimsel yönden istenildiği gibi düzenlenmiş bir şekilde yer değiştirmiş olacaktır. Eğer bu çalışma sırasında eş terimler ortaya çıkarsa, önceden konu edilen ilke uyarınca ve $x + x = x$; $x . x = x$ oldukları anımsanarak, bir sadeleştirme yapılması olanaklıdır.

ÖRNEK . $F = (x y' + x z)' + x'$ fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonu ayırıcı nor-mal formda ifade edelim.

$ \begin{aligned} F &= (x y' + x z)' + x' \\ &= (x y')' . (x z)' + x' \\ &= [x' + (y')'] [x' + z'] + x' \\ &= [x' + y][x' + z'] + x' \\ &= x' x' + x' z' + y x' + y z' + x' \\ &= x' + x' + x' y + x' z' + y z' \\ &= x' + x' y + x' z' + y z' \end{aligned} $	De Morgan De Morgan Çift Değilleme Dağılma Özelliği Komutatif Özelliği ve $x.x = x$ den $x + x = x$ den
--	---

bulunur ki fonksiyon istenilen şekli almıştır.

ÖRNEK. $f = x y$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyona, burada görülmeyen bir z değişkenini dahil etmek istiyoruz. Bu aşağıdaki işlemler yardımıyla olanaklıdır.

Yeni değişken z olsun. Biliyoruz ki $z + z' = 1$ dir. Diğer taraftan, çarpmanın birim elemanı 1 olduğu için $1 . f = f$ dir. Öyleyse,

$$f = x y \rightarrow f . 1 = x y . 1 \rightarrow f = x y (z + z') \rightarrow f = x y z + x y z'$$

olarak fonksiyon bu yeni değişkenle ve eskisiyle eşdeğerde olmak üzere biçim değiştirmiş olmaktadır. Son işlem sırasında dağılma özelliğinin uygulandığı görülmektedir.

ÖRNEK. $G = x' y z + x y z + x' y z' + x y z'$ fonksiyonu veriliyor. Bunun ayırıcı normal formda bir fonksiyon olduğu (tanımdan hareketle) görülmektedir. Önceki örneklerin aksine bazı problemlerde de fonksiyonun sadeleştirilmesi istenebilmektedir. Hatta ileride bu kavram başlıbaşına bir konu olacaktır. Şimdi bu fonksiyonu en sade biçimde ifade etmek isteyelim. Bu amaçla aşağıdaki işlemler yapılacaktır ; izleyelim :

$$\begin{aligned}
 G &= x' y z + x y z + x' y z' + x y z' \\
 &= (x' + x) y z + (x' + x) y z' && \text{Dağılma özelliği} \\
 &= 1 \cdot y z + 1 \cdot y z' && x + x' = 1 \text{ den} \\
 &= y z + y z' && 1 \text{ in birim eleman olmasından} \\
 &= y (z + z') && \text{Dağılma özelliği} \\
 &= y \cdot 1 && z + z' = 1 \text{ den} \\
 &= y && 1 \text{ in birim eleman olmasından}
 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, sonuç olarak

$$G = x' y z + x y z + x' y z' + x y z' = y$$

demektir. G fonksiyonu bu derece sadeleşebilmiştir.

5. 4. TAM AYIRICI NORMAL FORM (BİRİNCİ KANONİK ŞEKİL)

Tam ayırıcı normal formda 2^n tane terim varsa buna *Tam Ayırıcı Normal Form* ya da *Birinci Kanonik Şekil* denir. Bu tanımdan çıkacak diğerk bir sonuç, n tane değişken için yazılmış olan böyle bir fonksiyonda her terimde her değişken, kendisiyle ya da bütünleriyle temsil edilecektir. Bu özellikteki bir fonksiyona da *Tam Ayırıcı Normal Formda Fonksiyon* ya da *Fonksiyonun Birinci Kanonik Şekli* denilecektir. Yukarıdaki son örneğimizdeki G fonksiyonu tam olarak bu özellikte bir fonksiyondur. Görülüyor ki x,y,z değişkenleri her terim-de çarpanlar halinde bulunmakta ve her değişkenden bir tanesi bu çarpanlardan biri olarak yer almış olmaktadır. Bir önceki alt-başlık içinde ifade edilmiş olan teorem bu fonksiyonun yapılanmasına ışık tutmaktadır. Oradaki ilkelerden hareket edilerek, bir fonksiyon bu biçimde ifade edilebilecektir. Ayrıca bu konuda aşağıdaki teoremin incelenmesi konumuza önemli katkılarda bulunacaktır.

Bu teoremin kanıtlanmasını kolayca yapabilmek için, herhangi bir x_j ve x_j' nin katsayısının tam ayırıcı normal forma özdeş olacağını varsayacağız. Bu şu de-mektir. Fonksiyonun görülen terimlerinin katsayısı 1, görülmeyen terimlerinin katsayısı 0 dır. Esasen yukarıda terim sayısının, n değişken sayısı olmak üzere, 2 nin n .kuvveti kadar olacağı düşüncesi ve tanımı bu temele dayanmaktadır. Yoksa her ayırıcı normal formda bir fonksiyonun bütün olası terimlerini görmek gibi bir yaklaşım yanlış olduğu gibi, bütün fonksiyonlar birbirinin aynı ya da benzeri olacak demektir. İşte bu yaklaşımla denilebilir ki, bu tür bir fonksiyonun 1 e özdeş olması, fonksiyonun işlevsel geçerliliğinin kanıtıdır ki 1 de buradaki terimlerin katsayısı olarak görülmektedir. Çarpanlara ayırma işlemi yardımıyla x_j değişkeni yok edilebilir. Bu işlem diğer değişkenleri yok etmek için de ardışık olarak uygulanabilir ve sonuçta fonksiyon 1 e indirgenmiş olur. Bu açıklamalar ışığında, teoremi ifade edelim ve kanıtlayalım :

TEOREM. n değişkenli bir *tam ayırıcı normal formda*, terimlerin herbiri key- fi fakat belirli bir tarzda değerlendirilerek 0 veya 1 ile gösterilirse, tam bir terimin değeri 1, diğerlerinin 0 olur.

Kanıt : $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin alabileceği değerler sırasıyla $a_1, a_2, \dots, a_n$ olsun. Tam Ayırıcı Normal Formda, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\forall x_i$ için

$$a_i = 1 \Rightarrow x_i \quad ; \quad a_i = 0 \Rightarrow x_i'$$

kullanalım. Bu şekilde seçilmiş bir terim, n tane 1 in çarpımıdır. O halde bu da 1 dir. Ayırıcı Normal Formun diğer terimlerinde en az bir 0 çarpanı buluna-caktır. Öyleyse bunlar 0 dır.

Sonuç 1. Bu teoremden iki fonksiyonun eşitliğine dair şu önemli sonucu çıkarabiliriz : Eğer karşılıklı gelen ayırıcı normal formları aynı terimleri bulunduru-yorlarsa, bu iki fonksiyona *eşittir* denir.

Eğer terimleri birbirinin aynı ise, iki fonksiyonun eşit oldukları apaçıktır. Aksi-ne iki fonksiyon eşitse, her değişkenin değeri, her türlü seçimde aynı olmalıdır. Özel olarak, 0 ve 1 değerler kümesi için aynı değerde oldukları varsayılabilir. Teoremin ifadesinden 0 ve 1 için terimlerin tek türlü değerlendirilebileceği olanaklı görülmektedir. O halde *normal formlar* aynı terimleri içerir.

Sonuç 2. Boole Cebirinde bir özdeşlik kurabilmek için, 0 ve 1 in bütün kombi-nezonlarıyla, her fonksiyonun değerini belirlemek yeterlidir. Bir fonksiyonun

değeri, fonksiyondaki değişkenlerin alabilecekleri değerlerin sonucuna göre belirlenir. Bu ise, bu türlü bir değerlemenin, bir tablo yardımıyla gerçekleştirilebileceğini akla getirmektedir. Özellikle *devre tasarımı*nda bu yöntem, Boole Fonksiyonunun belirlenmesi bakımından çok elverişli ve kullanılışlıdır. Bu tür bir tablo verildiğinde, sezgi ve araştırma yoluyla ve ayrıca yukarıda verilmiş olan tanımlar, özellikler ve teoremler de gözönünde bulundurularak, fonksiyon yazılabilir. Her koşul kümesi için, buna karşılık gelen ve ayırıcı normal formda olan bir terim bulunur. Bu terimlerin toplamı fonksiyonu belirler.

Fonksiyonun tablo yardımıyla belirlenmesi işi, başlıbaşına bir konu olarak, uygulanmasındaki inceliklerle birlikte daha ileride ele alınacaktır. Hatta bu yöntemi farklı alanlarda da kullanma düşüncesi egemendir. Bu nedenle, buna dair çalışmalarımızı biraz erteleyerek, daha önce diğer formu gözden geçirmek ve bu form için de uygulama alanı olacak tablo düzenleme işini birlikte analiz etmek suretiyle, bir işi iki kere anlatmadan yapmakla daha ekonomik davrandığımızı düşünebiliriz.

5. 5. BİRLEŞTİRİCİ NORMAL FORM

Bundan önce inceleme konusu yapılmış olan Ayırıcı Normal Form'dan farklı olarak, bir *Boole Fonksiyonu*' nun bir ifade biçiminin de *Birleştirici Normal Form* olduğu önceden de belirtilmiştir. Dual sistemi tamamlayan bu yapılanma biçimi, *toplamların çarpımı* şeklinde (slogan halinde) özetlenmiştir. Bu form da yerine göre, kullanma açısından, yararlanılabilecek bir yapısal düzenlemedir.

Boole sınıfında x_j ve/veya x_j' 'nün bir fonksiyonu,

$$\prod_{i=1}^m f_i \left[\sum_{j=1}^n x_j, x_j' \right]$$

olacak şekilde verilmişse, buna *Birleştirici Normal Form* ve bu yapıya uygun olarak tanımlanmış fonksiyona da *Birleştirici Normal Formda Fonksiyon* denilecektir.* Bu tür fonksiyonlar kısa olarak, yani sembolik anlamda **cnf** yazılarak da gösterilebilmektedir. Yeri geldiğinde, bu sembol kullanılacaktır.

Bu yapılanmanın içeriğinde, esas itibarıyla x_j ve/veya x_j' elemanlarının $\sum$ operatörünün gösterdiği işlem doğrultusunda bir takım toplamlar oluşturacakları anlaşılmaktadır. $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, n değişken için bu kombinasyon, çeşitli

(*) Birleştirici Normal Form = Conjunctive Normal Form = cnf

kombinasyonların oluşmasına olanak tanıyacaktır. İşte bu türlü oluşan toplulukların Π operatörü içinde toplanması, onların birer *çarpan* olduklarını açıklamak için yeterlidir. Bu kavramı genişletirken, bir taraftan da, Ayırıcı Normal Form için oluşan kavramların, bu forma adaptasyonu düşünülmelidir.

TEOREM. Sabit bulundurmeyen her Boole Fonksiyonu, Birleştirici Normal Formda bir fonksiyondur.

Ayırıcı Normal Form için incelenmiş ve önerilmiş olan teoremin, sadece yapısal fark gözönünde tutularak tekrarlanmış olmasından başka bir özelliği yoktur. Bu nedenle ayrıca *kanıtlanması* gibi bir çaba içinde olunmayacaktır. Sadece aşağıdaki örnek kanımca bu açıklamaya katkıda bulunabilecektir.

ÖRNEK. $F = (x y' + x z)' + x'$ fonksiyonunu, birleştirici normal formda yazınız.

Görüldüğü gibi bu örnekteki F fonksiyonu, diğer form incelenirken, ilk örnek için seçilen F fonksiyonudur. İstenileni gerçekleştirmek için aşağıdaki işlemleri yapmak gerekecektir ; izleyelim :

$ \begin{aligned} F &= (x y' + x z)' + x' \\ &= [(x y')' \cdot (x z)'] + x' \\ &= [x' + (y')'] [x' + z'] + x' \\ &= [x' + y] [x' + z] + x' \\ &= [x' + x' + y] [x' + x' + z] \\ &= [x' + y] [x' + z] \end{aligned} $	De Morgan Çift Değilleme Dağılma Özelliği $x' + x' = x'$ den
---	--

olur ki bu da fonksiyonun **cnf** halidir.

5. 6. TAM BİRLEŞTİRİCİ NORMAL FORM (İKİNCİ KANONİK ŞEKİL)

n değişkenli bir birleştirici normal formda 2^n tane terim bulunuyorsa, buna *Tam Birleştirici Normal Form* ve bu yapıdaki bir Boole Fonksiyonuna ise *Tam Birleştirici Normal Formda Fonksiyon* ya da *Fonksiyonun İkinci Kanonik Şekli* denir.

TEOREM. n değişkenin her birine keyfi fakat belirli bir tarzda 0 veya 1 değerleri verilirse, tam birleştirici normal formun tam bir çarpanı 0 değerini, diğer çarpanlarıysa 1 değerini alacaktır.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin alabilecekleri değerler sırasıyla $a_1, a_2, \dots, a_n$ ise, $\forall x_i$ için, $(i = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere,

$$a_i = 0 \Rightarrow x_i \quad ; \quad a_i = 1 \Rightarrow x_i'$$

olarak alınırsa, çarpanlardan biri 0, diğerleri 1 olur ki uygun çarpan 0 olanıdır. Sonuçta fonksiyon 0'a eşittir.

SONUÇ. İki fonksiyonun eşit olabilmesi, ancak ve ancak n değişkenli birleştirici normal formların eşit olabilmesiyle olanaklıdır.

ÖRNEK . $F = (x' + y)(x' + z')$ $= (x' + y + 0)(x' + 0 + z')$ $= (x' + y + z z')(x' + y y' + z')$ $= (x' + y + z)(x' + y + z')(x' + y + z')(x' + y' + z')$ $= (x' + y + z)(x' + y + z')(x' + y' + z')$	Toplamada 0'ın birim e. olm. $z z' = 0, y y' = 0$ dan Dağılma özelliği
--	--

bulunur. Görüldüğü gibi son şekliyle fonksiyon Tam Birleştirici Normal Form'dadır. Son işlemdeyse, birbirleriyle aynı olan $x' + y + z'$ çarpanlarından biri elemine edilmiştir. Çünkü biliyoruz ki $X \cdot X = X$ dir. Ayrıca bu husus bir ilke halinde önceden sunulmuştur.

Gerçekte bu örnekteki fonksiyon, önceden Tam Ayırıcı Normal Form içinde de incelenmiş olan $(xy' + xz)' + x'$ fonksiyonunun düzenlenmiş bir biçimidir. Daha önce bu fonksiyonun Ayırıcı Normal Formda düzenlenmesi yapılmıştır. Görülüyor ki burada da aynı fonksiyonun Birleştirici Normal Formda düzenlenmesi yapılabilmektedir.

5. 7. FONKSİYONUN BÜTÜNLEYENİ

Bir Boole Sınıfına ait bir fonksiyon f ise, bunun bütünleyeni de, değişkenlerde olduğu gibi yine $(')$ ya da $(-)$ sembollerinden biri kullanılarak gösterilecektir. Bu kitapta, önceki uygulamalarımızda olduğu gibi, ilk sembolün kullanılması yeğlenecektir. Yani bir f fonksiyonunun *bütünleyeni* f' ile gösterilecektir. Buna *Bütünler Fonksiyon* da denilebilmektedir.

Fonksiyonun bütünleyeni, her iki form için değişmeyen bir anlatımla tanımlanacaktır. Çünkü burada, formların iç yapılarının değişmeyecek olması esastır. Bu oluşumda, hangi formda olursa olsun, tam anlamıyla benzeşen teoremler anım-

sanırsa, her ikisinde de sadece 2^n tane terimin varlığından söz edilmektedir. Bu fonksiyonlarda farklı olan biricik etken, *birim eleman'* ın değişmiş olmasıdır. Oysa bütünler fonksiyon da ilk fonksiyonla aynı biçimsel düzen içinde olacak ise demek ki birim elemanın bu sonuç üzerinde etkisi bulunmayacaktır. Şimdi bütün bu açıklamalardan sonra fonksiyonun bütünleyeninin tanımına geçilebilir.

Bir $f \in \beta$ fonksiyonu, ister Tam Ayırıcı Normal Formda (dnf) ya da ister Tam Birleştirici Normal Formda (cnf) olsun, n tane değişken için kurulu olduğu varsayımına göre, en fazla 2^n tane terim bulunduracaktır. Kuşkusuz bu terimlerin katsayılarının 1 ya da 0 oluşuna göre, bunların bir kısmı *görülecek* bir kısmıysa *görülmeyecek*'tir. Görülen terimler (çarpanlar) f fonksiyonuna ait ise, görünmeyen terimler (çarpanlar) da *fonksiyonun bütünleyeni*'ni oluşturacaklardır. Bu tanıma göre f de olan terimler (çarpanlar) f' de ; f' de olan terimler (çarpanlar) f de bulunamayacaktır. Buna göre, terimler itibariyle $f + f' = 2^n$ adet olacaktır.

Aşağıdaki örnekler, verilmiş bir fonksiyonun bütünleyeninin nasıl bulunacağını yeterince açıklamış olacaktır.

ÖRNEK. $F = (x+y')(x'+y)$ fonksiyonunun bütünleyeni $F' = (x+y)(x'+y')$ dir. Çünkü F fonksiyonun x ve y gibi iki değişken içermesi $2^n = 2^2 = 4$ farklı çarpanın bulunması gerektiğini anlatmaktadır. Bu temel sayıya göre, bu çarpanların neler olabileceğini sıralayalım : $x + y$; $x + y'$; $x' + y$; $x' + y'$. Şimdi bunlardan hangilerinin F de bulunduğu bakalım : 2. ve 3. sü fonksiyonu oluşturan çarpanlardır. Öyleyse geriye kalanlar, bütünler fonksiyonu oluştururlar. Buna göre $F' = (x + y)(x' + y')$ bulunur. Bu da yukarıdaki ile aynı sonuçtur.

Bu tür çalışmanın daha pratik uygulamaları bulunabilir. Böyle bir çalışma aşağıda gösterilmiştir.

ÖRNEK. $F = x y z' + x y' z' + x' y' z'$ fonksiyonunun bütünleyeni nedir ?

$n = 3$ olup, dnf için $2^n = 2^3 = 8$ farklı terim oluşacaktır. Bunları F de olanlar F de olmayanlar olarak sütunlayıp sıralarsak F' kendiliğinden ortaya çıkmış olur. Burada pratik bir yaklaşım da x, y, z değişkenlerine göre sekiz çeşidi oluştururken, *durum tablosu* yazılışındaki kuraldan yararlanmaktır. Bu da 8 in yarısı olarak önce x in 4 olumlu sonra da 4 olumsuz durumunu sıralamak, sonra y için yine ikili bölüştürmelerle önce olumlu sonra olumsuzlarını sıralamak ve son olarak benzeri işleri z için yapmaktır.

	<u>Terimler</u>	<u>F de olanlar</u>	<u>F de olmayanlar (F ' de bulunacaklar)</u>
1)	$x y z$	-	$x y z$
2)	$x y z'$	$x y z'$	-
3)	$x y' z$	-	$x y' z$
4)	$x y' z'$	$x y' z'$	-
5)	$x' y z$	-	$x' y z$
6)	$x' y z'$	-	$x' y z'$
7)	$x' y' z$	-	$x' y' z$
8)	$x' y' z'$	$x' y' z'$	-

Şimdi kolayca,

$$F' = x y z + x y' z + x' y z + x' y z' + x' y' z$$

olduğu yazılabilecektir. Burada terimler sayısı bakımından bir test yapılırsa, F in 3 terimden oluşması, $F + F' = 2^3 = 8$ ilkesinden hareketle F ' nün 5 terimden oluşmasını gerektirecektir ki bu da bulunan F ' fonksiyonunun terim sayısıdır.

5. 8. TANIM TABLOSU

Boole Fonksiyonlarının tanımlanması çeşitli şekillerde gerçekleştirilebilmektedir. Bunlardan biri de *Tanım Tablosu'* nun düzenlenmesidir. Bu tablonun esası, doğruluk değer tablosunun ilkeleriyle çakışmaktadır. Bu nedenle, önceden hayli bilgi sahibi olduğumuz bu kavramdan yararlanmak, açıklamalarımız için kolaylık sağlayacaktır. Tabloda, önermelerin yerlerinde *değişkenler*, önerme polinomu ya da standart biçim yerinde de *fonksiyon* yazılmış bulunacaktır. Böyle bir tablo örneği aşağıda görülmektedir.

<u>x</u>	<u>y</u>	<u>z</u>	<u>f(x,y,z)</u>	Bu tablo ile tanımlanan f fonksiyonunun <i>formu (biçimi)</i>
1	1	1	1	Demek oluyor ki, fonksiyon tablo yardımıyla burada olduğu
1	1	0	0	gibi tanımlandığı takdirde , her iki formu da içermektedir.
1	0	1	0	İşte bu yaklaşım, tablo ile tanım yapmanın, probleme biraz
1	0	0	0	daha genel bakmanın bir yolu gibi görülmektedir.
0	1	1	1	
0	1	0	1	Bu tablodan yararlanarak, fonksiyon
0	0	1	0	
0	0	0	1	a) Tam Ayırıcı Normal Formda (dnf), b) Tam Birleştirici Normal Formda (cnf)

ifade edilebilecektir. Bunun için gerekli açıklamalar aşağıda yapılmıştır. Ancak ilke olarak gözetilmesi gereken en önemli husus, bu yolla fonksiyonların ancak *Tam* olmaları hali yazılabilmekte (tanımlanabilmekte) dir.

a) Tam Ayırıcı Normal Formda Fonksiyon için : Bu fonksiyonda iç işlem *çarpma*'dır. Çarpmanın *birim elemanı* 1 dir. Öyleyse tabloda $f(x,y,z) = 1$ olan satırlar seçilecek ve x,y,z değişkenleri için sıralanan değerlere bakarak, bu satırlardaki 1 ler için değişkenin kendisi, 0 lar için değişkenin bütünleyeni alınarak bunların çarpımları oluşturulacaktır. Bu işlem 1 olan her satır için yapıldıktan sonra, bu şekilde elde edilen çarpanların toplamı fonksiyonu verecektir.

Bu açıklamaları örneğimize uygulayalım :

Tablomuzda fonksiyonun 1 olduğu satır numaraları : 1, 5, 6 ve 8 dir. Bu satırlar için çarpanlar yazılırsa, sırasıyla : $x y z$; $x' y z$; $x' y z'$; $x' y' z'$ olur. Bunların yazılış kuralı yukarıda açıklandığı gibi olup, okuyucu bir de bunlar üzerinde kontrol yapmalıdır. Şimdi fonksiyon,

$$f(x,y,z) = x y z + x' y z + x' y z' + x' y' z'$$

şeklinde ifade edilmiş olacaktır.

b) Tam Birleştirici Normal Formda Fonksiyon için : Bu fonksiyonda iç işlem *toplama*'dır. Toplamanın *birim elemanı* 0 dir. Öyleyse tabloda $f(x,y,z) = 0$ olan satırlar seçilecek ve x,y,z değişkenleri için sıralanan değerlere bakarak, bu satırlardaki 0 lar için değişkenin kendisi, 1 ler içinse değişkenin bütünleyeni alınarak bunların toplamları oluşturulacaktır. Bu işlem 0 olan her satır için yapıldıktan sonra oluşan terimler, çarpanlar halinde ifade edilerek fonksiyon ortaya konmuş olacaktır.

Bu açıklamaları örneğimize uygulayalım :

Tablomuzda fonksiyonun 0 olduğu satır numaraları, sırasıyla : 2, 3, 4 ve 7 dir. Bunlar için oluşan terimler yazılırsa, $x' + y' + z$; $x' + y + z'$; $x' + y + z$; $x + y + z'$ bulunacaktır. Bunların yazılışlarının kurala uygunluğu, kontrol edil-melidir. Bunların çarpımları oluşturulursa,

$$f(x,y,z) = (x + y + z')(x' + y + z)(x' + y + z')(x' + y' + z)$$

olur.

Yukarıdaki örnek bazı özelliklerin ipuçlarını vermektedir. Tanım tablosuna bakarak, fonksiyonun formlara göre nasıl yapılar oluşturacakları ; 1 ve 0 sayıları rına bakarak seçilen forma göre kaç çarpan ya da terim içerecekleri ; biri için yazıldığında yazılmayanlar için fonksiyon yeniden düzenlendiğinde bunun ilkinin bütünleri olacağı ; bu tablo yardımıyla formlar arasında değişimlerin gerçekleştirilmesinin olanaklı olduğu ; aynı bir fonksiyonun her iki formda da ifade edilebileceği ; özel durumlar dikkate alınırse tablonun iki özel durumunda ancak bir cins fonksiyonun yazılabilesine izin vereceği tesbitlerimiz olarak sıralanabilir.

Burada sözü edilen iki özel durum tabloları aşağıda verilmiş olup, inceleyelim :

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Tablo 1

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Tablo 2

Bu iki tablonun fonksiyonu tanımlayan değerleri sadece 1 ve sadece 0 olduğu içindir ki bir özel durum göstermektedirler. Tablo 1 ile tanımlanan fonksiyon ancak *Tam Ayırıcı Normal Formda* ; Tablo 2 ile tanımlanan fonksiyon ise ancak *Tam Birleştirici Normal Formda* ifade edilebilecektir. Görülüyor ki bunların diğer formda ifade edilebilme şansları hiç yoktur. Niçin ? Çünkü her iki halde de $f(x,y,z)$ fonksiyonunun *bütünler fonksiyonu* yazılamaz. Ayrıca bu fonksiyonlar, birim eleman esas alındığı için, kendine özgü formda yazıldığında 2^n tane terim ya da çarpanı içermiş olacaklardır. Yani fonksiyonu *tam olarak* temsil edeceklerdir.

Bu iki yapılanma, mantık açısından değerlendirilirse, yine modern mantığın ve Boole Cebirinin karşılıklıklarını anımsayarak, Tablo 1 in bir *Totoloji tablosu* ; Tablo 2 nin ise bir *Çelişme tablosu* olduğu görülmektedir. Demek ki burada da uç noktalardaki bu iki özel durum, fonksiyon yapılanmasındaki özel durumları temsil etmiş olmaktadır. Şimdi bu tablolara göre fonksiyonları yazalım :

Tablo 1 ile tanımlanan $f(x,y,z)$ fonksiyonu ,

$$f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' ;$$

Tablo 2 ile tanımlanan $f(x,y,z)$ fonksiyonu ,

$$f(x,y,z) = (x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z)(x'+y+z')(x'+y'+z)(x'+y'+z')$$

şeklinde ifade edilmiş olacaklardır. Görülüyor ki her ikisinde de olması gereken terimlerin (çarpanların) tamamı vardır.

Bu çalışma sonunda ortaya konabilecek önemli bir sonuç, bu özel durumlar dikkate alındığında, her fonksiyonun bütünleyeninin yazılamayacağıdır. Ancak bu sonuç da sadece bu fonksiyonlara özgüdür.

Tablo ile tanım gerçekte şu anlama gelmektedir. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu belir-lenen formların dışında rastgele bir yapıda da verilse, $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin alacağı değerlere karşın fonksiyonun alacağı değerler hesaplanabileceğinden, bu yolla bir tanım tablosu düzenlenmesi olanaklı olur. Tablo ortaya çıktıktan sonra ondan, amacımıza uygun bir şekilde yararlanılabilecektir. Bu amaçla düzenlenmiş aşağıdaki örneği inceleyelim :

ÖRNEK. 1. $f(x,y) = y(x+y) + (xy)'$ fonksiyonu veriliyor. Bunun tanım tablosunu düzenleyelim. Tablodan yararlanarak, fonksiyonu, a) Tam ayırıcı normal formda ; b) Tam birleştirici normal formda ; ifade edelim :

Değişkenler x ve y olarak $n = 2$ olduğundan $2^2 = 4$ olarak buna karşı gelen değerlendirmeler yapılacaktır. Bunlar aşağıdadır :

	x	y	$f(x,y)$
$f(x,y) = f(1,1) = 1(1+1) + (1.0)' = 1.1 + 0' = 1 + 1 = 1$	1	1	1
$f(x,y) = f(1,0) = 0(1+0) + (1.1)' = 0.1 + 1' = 0 + 0 = 0$	1	0	0
$f(x,y) = f(0,1) = 1(0+1) + (0.0)' = 1.1 + 0' = 1 + 1 = 1$	0	1	1
$f(x,y) = f(0,0) = 0(0+0) + (0.1)' = 0.0 + 0' = 0 + 1 = 1$	0	0	1

Bu sonuçlardan yararlanarak düzenlenmiş tablo üstte görülmektedir. Bu, problemimizdeki fonksiyonunun tanım tablosudur. Tablo yardımıyla fonksiyon a) ve b) de istenilen formlarda yazılabilecektir.

a) Fonksiyonun 1 değerini aldığı satırlar dikkate alınınca fonksiyon Tam

Ayırıcı Normal Formda ifade edilebilecektir.

$$f(x,y) = x y + x' y + x' y'$$

b) Fonksiyonun 0 değerini aldığı satır dikkate alınarak fonksiyon Tam Birleştirici Normal Formda ifade edilebilecektir.

$$f(x,y) = x' + y$$

Bu sonuçlardan bir başka türlü yararlanılabilecektir. Daha önce iki fonksiyonun eşitliğinden söz edilmiştir. Şimdi buna yeni bir tanım getirmek olanağı vardır :

Tanım : *Tanım tabloları aynı olan iki fonksiyon eşittirler.*

Şimdi bu yeni tanımdan hareket ederek,

$$f(x,y) = y(x + y) + (x y')' = x y + x' y + x' y' = x' + y$$

olduğu yazılabilecektir.

Bu eşitliklerin varlığı, önceki örneklerimizde de yapıldığı gibi, bir takım hesaplamalar yoluyla gösterilebilir. Nitekim bunun biri aşağıdadır :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y(x + y) + (x y')' \\ &= y x + y y + [x' + (y')'] \\ &= x y + y + x' + y \\ &= x y + y + x' \\ &= (x + 1) y + x' \\ &= 1 \cdot y + x' \\ &= x' + y \end{aligned}$$

dir. Bu fonksiyonun Tam Birleştirici Normal Formdaki ifadesidir. Diğer formdaki ifadesi de iç düzenlemeler yardımıyla kolayca elde edilebilir. Aşağıda izliyoruz (yukarıdaki sonuçtan devam ederek) :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x' + y \\ &= x' (y + y') + (x + x') y \\ &= x' y + x' y' + x y + x' y \\ &= x y + x' y + x' y' \end{aligned}$$

olup bu da fonksiyonun Tam Ayırıcı Normal Formdaki ifadesidir.

ÖRNEK. 2. $f(x,y,z) = x(y' + z) + z'$ fonksiyonu veriliyor. Tanım tablosunu düzenleyerek fonksiyonu **dnf** ve **cnf** için ifade edelim.

Değişkenler x,y,z olarak $n = 3$ olduğundan, $2^3 = 8$ durum vardır. Bunların her-biri için fonksiyon hesaplanacaktır :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(1,1,1) = 1(1' + 1) + 1' = 1(0 + 1) + 0 = 1 + 0 = 1 \\ f(x,y,z) &= f(1,1,0) = 1(1' + 0) + 0' = 1(0 + 0) + 1 = 0 + 1 = 1 \\ f(x,y,z) &= f(1,0,1) = 1(0' + 1) + 1' = 1(1 + 1) + 0 = 1 + 0 = 1 \\ f(x,y,z) &= f(1,0,0) = 1(0' + 0) + 0' = 1(1 + 0) + 1 = 1 + 1 = 1 \\ f(x,y,z) &= f(0,1,1) = 0(1' + 1) + 1' = 0(0 + 1) + 0 = 0 + 0 = 0 \\ f(x,y,z) &= f(0,1,0) = 0(1' + 0) + 0' = 0(0 + 0) + 1 = 0 + 1 = 1 \\ f(x,y,z) &= f(0,0,1) = 0(0' + 1) + 1' = 0(1 + 1) + 0 = 0 + 0 = 0 \\ f(x,y,z) &= f(0,0,0) = 0(0' + 0) + 0' = 0(1 + 0) + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

x	y	z	f(x,y,z)	olur ki bu sonuçlara göre düzenlenmiş tanım tablosu yan tarafta görülmektedir.
1	1	1	1	
1	1	0	1	Artık tablodan yararlanarak, fonksiyonu istenilen form- larda ifade etmek olanağı vardır :
1	0	1	1	
1	0	0	1	
0	1	1	0	a) dnf için : Tabloda 1 değerinin bulunduğu satırlara bakarak ;
0	1	0	1	
0	0	1	0	
0	0	0	1	f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz' + x'y'z'
				b) cnf için : Tablodaki 0 değerinin bulunduğu satırlara bakarak ;

$$f(x,y,z) = (x + y' + z')(x + y + z')$$

oldukları yazılacaktır.

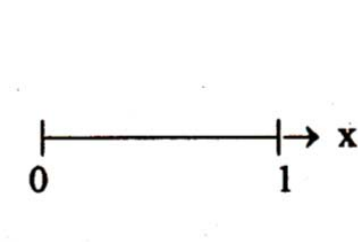
5. 9. FONKSİYONUN GRAFİK İLE GÖSTERİLİMİ

Bir Boole Fonksiyonu, ona özgü yaklaşımlarla, *grafik yöntemler* kullanılarak betimlenebilir ve hatta tanımlanabilir. Bunların çeşitleri ve nasıl kullanıldıklarına dair yeteri kadar bilgi aşağıda verilmiş olacaktır.

5.9.1. Analitik Gösterilim

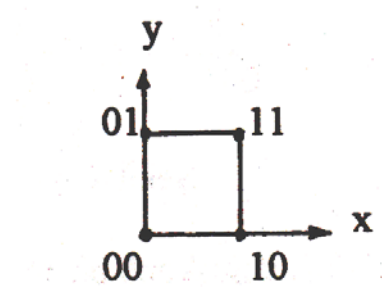
Bir Boole Fonksiyonunun değişken sayısına bağlı olarak bu gösterilimi, daha çok *doğru noktaları işaretlemek* şeklinde yapılır. Bu gösterimlerin sembolik yapıları aşağıdaki şekillerde görülmektedir.

F tek değişkenli fonksiyon ise
 $n = 1$ hali , $F(x)$



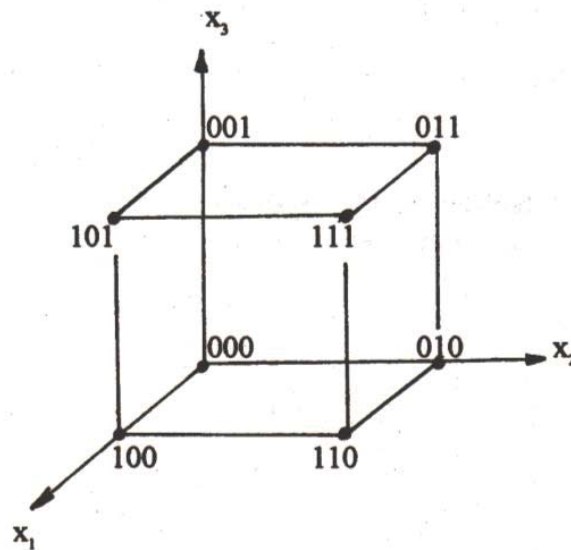
Şekil 1

F iki değişkenli fonksiyon ise
 $n = 2$ hali , $F(x,y)$



Şekil 2

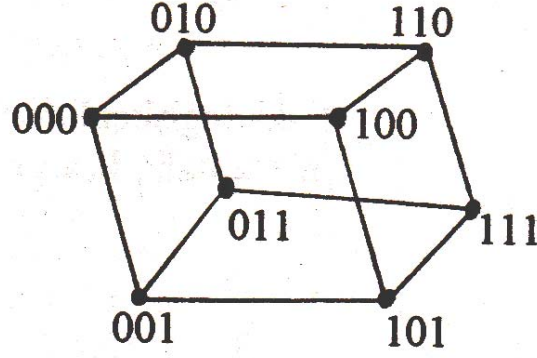
F üç değişkenli fonksiyon ise
 $n = 3$ hali , $F(x_1, x_2, x_3)$



Şekil 3

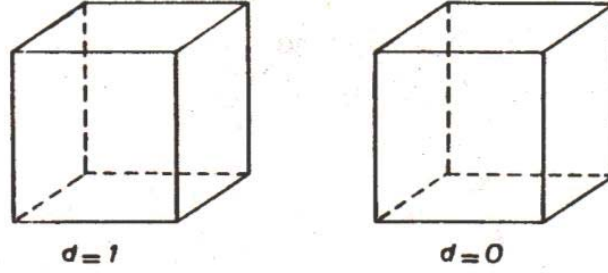
$n = 3$ için elde edilen grafik gösterimdeki şekile (şekillere) *hiperküp (hyper-cube)* denilmektedir.

F üç değişkenli fonksiyon ise
 $n = 3$ hali , farklı bir gösteriliş



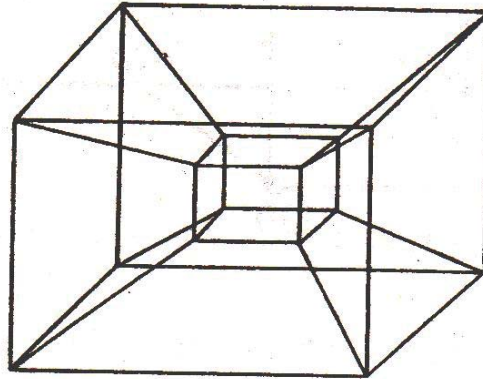
Şekil 4

F dört değişkenli bir fonksiyon ise
 Birim eleman esas alınarak, farklı bir gösterilim (kübik)



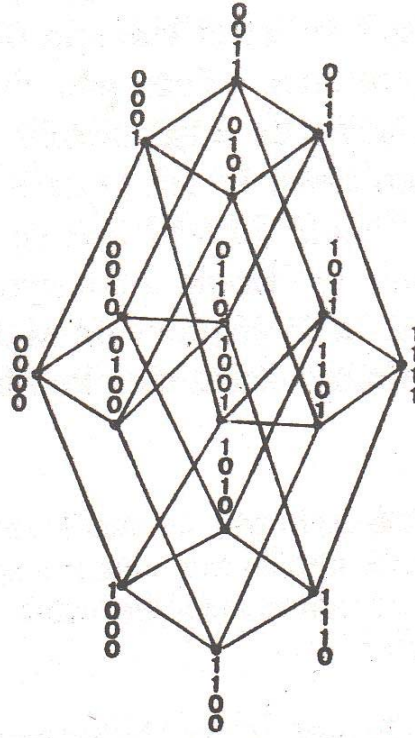
Şekil 5

F fonksiyonu dört değişkenli ise
 $n = 4$ hali , $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$



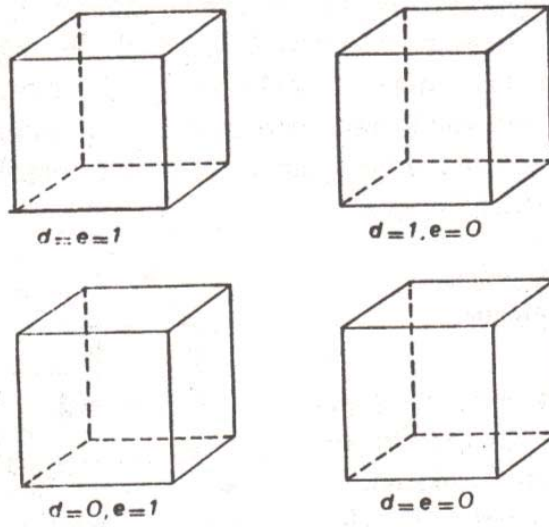
Şekil 6

F dört değişkenli bir fonksiyon ise
 $n = 4$ hali , farklı bir gösteriliş



Şekil 7

F fonksiyonu beş değişkenli ise
 $n = 5$ hali ; birim eleman esas alınarak özel bir gösterilim



Şekil 8

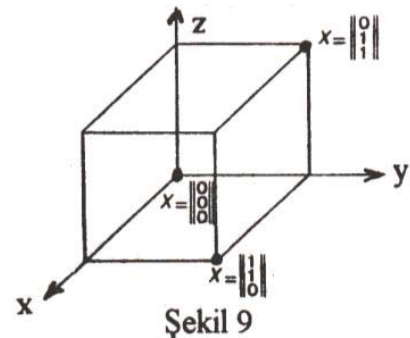
Yukarıdaki gösterim biçimlerinde farklı yaklaşımlar sergilenmiştir. Özellikle değişken sayısı arttıkça gösterim gücüğü palyatif bazı yaklaşımları zorunlu hale getirmektedir. Bizim değinmiş olduğumuz $n = 4$ olması halindeki her bir gösterim farklı bir açıklamayı gerektirmektedir. Örneğin Şekil 6 daki gösterimde, sonuncu bileşen dıştaki küb için 1 ve içteki küb için 0 dır. Diğer bileşenlerin herbiri, üç boyutlu uzaydaki gösterimde olduğu gibi dıştaki ve içteki kübün üzerinde bulunurlar. Bu şekil için şöyle de düşünülebilir. Köşeleri ilişkilendirilmiş içiçe iki kübün toplam köşeleri sayısı 16 dır. Oysa dört değişken için du-rumların sayısı da 16 dır. Öyleyse burada *bire-bir eşleme* sözkonusudur ki bu biçimsel düzenleme, dört değişkenli bir Boole Fonksiyonunu betimleyebilecek- tir. Örneğin Şekil 7 de izlenmesi ya da çözümlenmesi daha kolay bir gösteriliş biçimi yer almaktadır. Bu hiperküpte, sekiz tane küb bulunduğunu görebiliyor musunuz ?

Uyarı : Bu gibi sembolik çalışmalarda, küb deyimiyle, geometrik anlamda, biçimsel yönden düzgün bir küpten çok, ona benzeyen ancak idealde öyle olması düşünülen bir şekilden söz edilmektedir. Buradaki şeklimizde de sözü edilen küplerin hiçbiri düzgün değildir. Biz , onları , öyle gördüğümüzü söylemiş oluyoruz.

Şekil 8 de daha ilginç bir tarz kullanıldığı görülmektedir. Şekildeki d ve e seçil-miş iki değişkenin alacağı değerleri göstermektedir. Üstteki iki küb $d = 1$ için, alttaki iki küb $d = 0$ için ; soldaki iki küb $e = 1$ için, sağdaki iki küb $e = 0$ için düzenlenmiştir. Bu şekil 5 değişkenli bir fonksiyonu betimlemek için kullanılacaktır. Oysa biliniyor ki beş değişken için $2^5 = 32$ durum söz konusudur. Bu şekildeki dört tane kübün köşeleri sayısı da 32 dir. Böylece *bire-bir eşleşme* olur ki bu sistem beş değişkenli bir Boole Fonksiyonunu temsil edebilir. Fonksiyon bu yolla grafik olarak tanımlanırken, seçilecek iki değişken d ve e nin aldığı değerler için ayrılacak, diğer üç değişken için bu dörtlü kombinasyona göre durumu, uygun olan kübde işaretlenecektir. Kuramsal olarak böylece çözüldüğü varsayılan ve ifade edilen bu gösteriliş biçiminin, pratik yönüyle ne kadar kullanılışlı olduğu tartışılabilir.

Burada bir fonksiyonu temsil eden (tanımlayan) bir grafik verilmiştir.

X ile gösterilen fonksiyonda bulunan bileşenlerin bulunduğu köşelere • şeklinde bir işaret konulduğu görülmektedir. Fonksiyon ancak bu işaretli yerlerdeki değerleri alabile-



Şekil 9

cektir ki bunlar da şekilde birer sütun matris (vektör) olarak gösterilmiştir. Şimdi bunlara bakarak, X fonksiyonunu, Tam Ayırıcı Normal Formda bir fonksiyon olarak ifade edersek ; değişkenlerin x, y, z olduğu şekilde görüldüğüne göre :

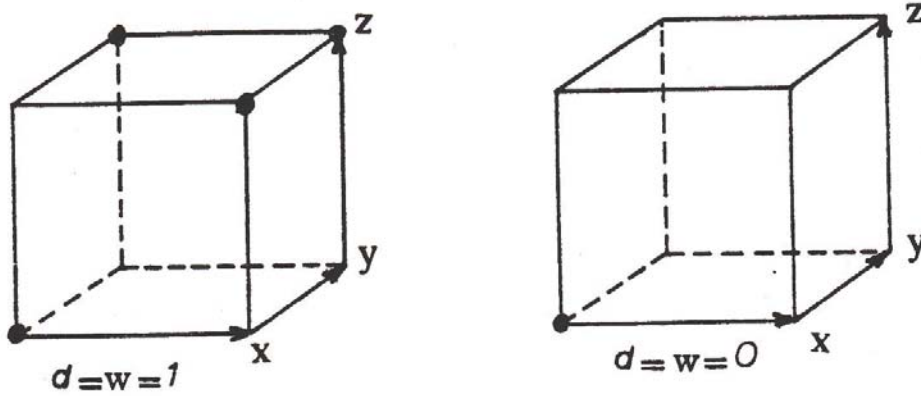
$$X = x y z' + x' y z + x' y' z'$$

fonksiyonunu gösterdiği anlaşılmış olmaktadır. Doğal olarak bunun ters problemi için çözüm düşünülürse, bu kez değişken sayısına bağlı olarak, yukarıdaki sistemlerden biri seçilerek, fonksiyonun Tam Ayırıcı Normal Formda olduğuna göre hareket ederek, her bileşene uyan nokta belirlenecek ve bu, • gibi, siyah bir nokta olarak işaretlenecektir. Fonksiyon bu şekilde betimlenmiş olacaktır. Aşağıda bunu açıklamak üzere bir örnek verilmiştir.

ÖRNEK .

$$Y = wxyz + wxy'z + wx'y z + wx'y'z' + w'x'y'z'$$

fonksiyonu veriliyor. Dört değişkenli bu fonksiyonun grafikte gösterimini (tanı-mını) elde etmek üzere Şekil 5 deki düzeni kullanalım. Bu sistemde birim ele-manı, örneğin w için kullanalım. İşte bu iki kübün $d = w = 1$ için birincisi ; $d = w = 0$ için ikincisi kullanılacak olup, ilk kübün diğer köşeleri x, y ve z ye göre, fonksiyondaki bileşenlere bakarak • ile işaretlenecektir. Bu açıklamalara uyan grafik gösterilim aşağıdadır.



Şekil 10

5.9.2. Venn Gösterilimi

Venn çizimi (diyagramı) daha çok kümeler teorisinde kullanılan bir yöntem olup önceki açıklamalarımızdan anımsanacağı gibi, modern mantığın dual sis-

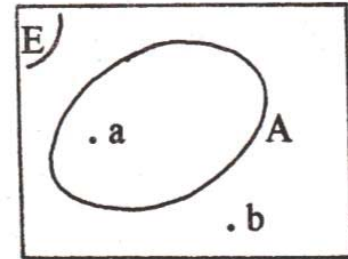
temi içindeki yaklaşımı, kümeler teorisiyle tam bir uyum göstermektedir. Oysa bir önceki konumuzun işlenmesi sırasında da modern mantığın tümüyle Boole Cebiriyle uyum içinde olduğu belirtilmiştir. İşte bu iki ilke birlikteliği, geçişme özelliğinde olduğu gibi, kuramsal oluşumlarda da bunun uygulanmasıyla, kümeler kuramının bazı kural ve yöntemlerini Boole Fonksiyonlarının tanımında ya da bir işleminde kullanmak olanağını bize sağlamış olmaktadır.

Özet olarak Venn çiziminin kullanım amacını ve özelliklerini açıklayarak, konumuz için kullanılabilir olduğu gösterilmeye çalışılacaktır. Bu amaçla örnekleme sırasında, küme problemleri yanısıra, Boole Cebirinin ya da Boole Fonksiyonunun bir problemi incelenebilecektir.

Venn çizimi, işleme görgüyü kattığı için, sezgisel erkimizle çözümlemeye çalıştığımız bir problemi anlamak çabasına bir başka boyut kazandırmaktadır. Böyle bir çalışma, basit çizgilerin ne kadar anlamlı olabileceğini ve o derecede de önemli kazançlar sağladığını göstermesi bakımından oldukça ilginçtir.

Venn çizimi üç temel öğeden oluşur : *Evren'* i temsil eden bir dikdörtgen, *küme'* yi temsil eden ve *bakla* ya da *pabuç* adı verilen kapalı düzgün bir eğri ve *eleman'* i temsil eden bir nokta ... (Şekil 11)

Evren genellikle E ile, kümeler alfabenin büyük harfleriyle, elemanlar da alfabenin küçük harfleriyle gösterilirler. Şekil 11 de bir E evreninde verilmiş bir A kümesinin Venn çizimi görülmektedir. Bu çizimde a ve b elemanlarının yerlerine göre,



$$a, b \in E \text{ için } a \in A \text{ ve } b \notin A$$

Şekil 11

yazılacaktır. Burada aynı zamanda $A \subset E$ dir. E de olup A da olmayan elemanlar varsa (bu örnekteki b elemanı gibi) bu elemanların olduğu küme A'nın bütünleyeni (ya da bütünleri) olan küme olup $\sim A$ ya da A' ile gösterilir. Buna göre, aşağıdaki iki işlem tanımlanır :

$$A \cap A' = \emptyset \quad ; \quad A \cup A' = E$$

Kümeler kuramının iki temel işlemi *Kesişim (Arakesit)* ve *Bileşim'* dir. Bunlar yukarıda kullanılan sembollerle, sırasıyla $\cap$, $\cup$ ile gösterilirler. Bu sembollerin mantıktaki karşılıkları yine sırasıyla $\wedge$ ile $\vee$ dir. Oysa Boole Cebirinde de bu

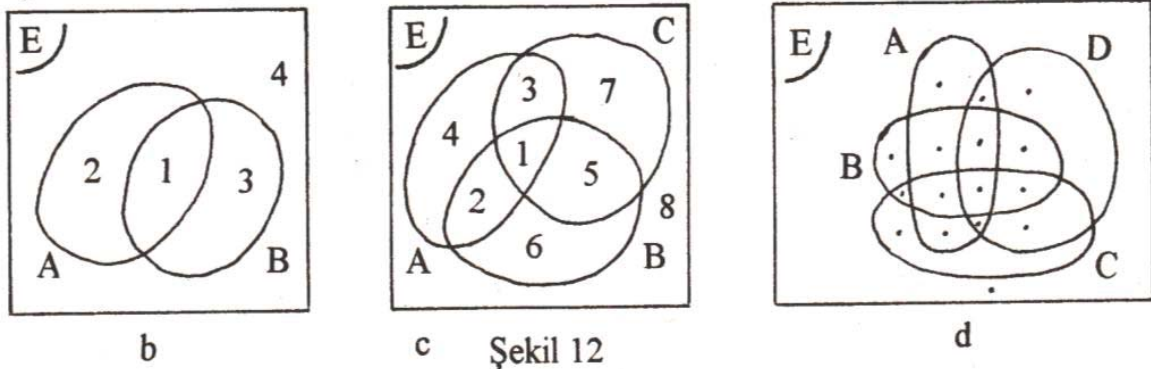
iki operatörün karşılıklarının yine sırasıyla ($\cdot$) ve ($+$) oldukları söylenmiştir. İşte böylece Boole Cebirinin operatörleriyle kümeler kuramının temel işlemleri arasında köprü kurulmuş oldu. Şimdi denilebilir ki kümeler kuramının çeşitli özellikleri Boole Cebirine yansıtılabilecektir. Oysa bu, çok önceden yapılmış oldu. Bu konuda tekrarlardan kaçınmak için sadece kitabımızdaki ilgili sayfa numarasını vererek, bir adresleme yapmış olacağız .*

Bu ikili işlemler (dual sistem içinde) aşağıdaki bileşimleri temsil ederler :

<u>Kümelerde</u>	<u>Mantıkta</u>	<u>Boole Cebirinde</u>
$A \cap B$	$P \wedge Q$	$a \cdot b$ ya da $x \cdot y$
$A \cup B$	$P \vee Q$	$a + b$ ya da $x + y$

İşte görülüyor ki bunların karşılaştırılması artık kolayca olanaklıdır. Bu kavram pekiştigiğine göre, hem kümeler kuramında hem de modern mantıkta kullanılan ve uygulanan bir yöntem olarak Venn çizimi (diyagramı) Boole Cebirinde ve dolayısıyla Boole Fonksiyonlarının incelenmesinde niçin kullanılmasın ? İşte bu yaklaşımla burada, bu kavramdan nasıl yararlanılabileceğimiz açıklanmaya çalışılacaktır.

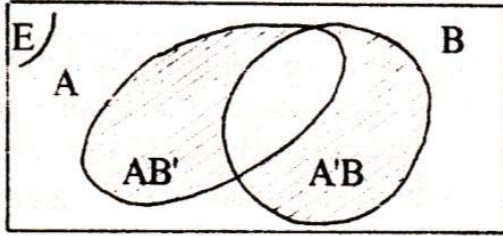
Venn çiziminde kullanılan sistemin bir özelliği de her kümeyi temsil eden halkayı, diğerlerini de kesecek şekilde evrene dahil ettikçe, oluşan bölgelerin sayısının, 2^n kuralıyla tam bir uyum göstermesidir. Aşağıda görülen şekillerde sırasıyla $n = 1$ için 2 bölge ; $n = 2$ için 4 bölge ; $n = 3$ için 8 bölge ve $n = 4$ için 16 bölge olduğu görülmektedir. n arttıkça bölgelerin sayısının 2 kuvvetlerine göre artacağı anlaşılmaktadır. Bunlardan $n = 4$ için olanına kadar çizimle gösterilmiştir. Bunlarda oluşan bölgeler de numaralanarak, yukarıdaki sava uygunluğu ayrıca belirtilmiştir.



(*) Bkz. Sayfa 99 , 100 ve 122

Venn çizimi yardımıyla nasıl bir betimleme yapılabilecektir ; onu inceleyelim. Önce konuyu iki değişkenli bir fonksiyon üzerinde tartışalım. Şekil 12 b de de görüldüğü gibi A ve B gibi iki küme için dört bölge oluşmuştur. Bu bölgelerin birbirinden *ayrık bölgeler* olarak düşünüldüğü gözönünde tutulursa, bunlar *minimum alanlar* olurlar. İşaretlenmiş olan 1,2,3,4 no.lu bölgelerin, sınır çizgileri dışında ortaklıkları yoktur. Ayrıklık budur. Öyleyse her bölge birbirinden bağımsız düşünülecektir. Bu türlü düzenlenmiş bir Venn çiziminde dört bölgede oluşan terimler yukarıda sıralanmış bölge numaralarına karşılık gelmek üzere $A.B$; $A.B'$; $A'.B$; $A'.B'$ şeklinde gerçekleşir.

ÖRNEK . 1 . $f(A,B) = A B' + A' B$ fonksiyonunun Venn çizimi aşağıdadır .

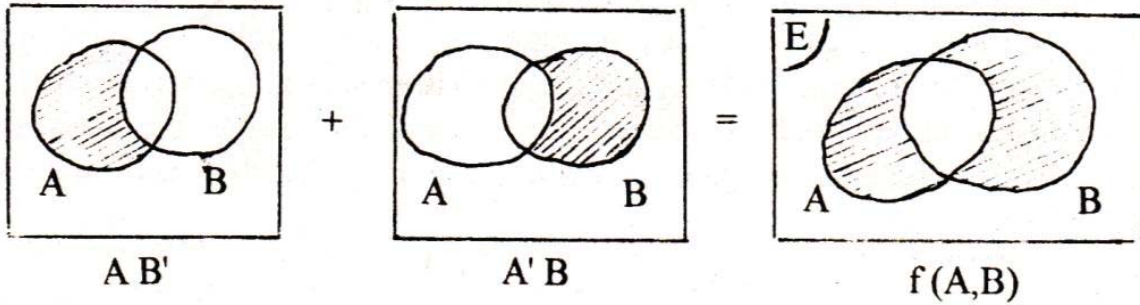


Şekil 13

Şekilde fonksiyonu temsil eden bölgeler taralı olarak gösterilmiştir. Burada her bölgenin birbirinden *ayrık* olarak değerlendirildiği görülmektedir.

Burada $A B'$ ile A da olan B de olmayan ; $A' B$ ile de B de olan A da olma-

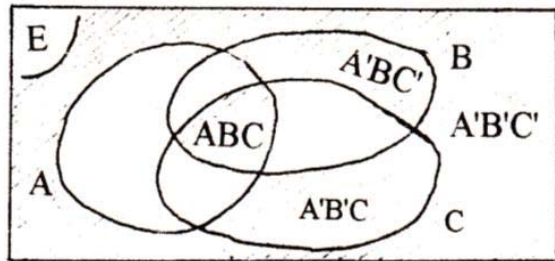
yan elemanlar gösterilmiş olmaktadır ki bu şekilde tanımlanan Boole fonksiyonun bir Venn diyagramı oluşmuştur. Bu betimlenin Venn çizimi açısından bir yorumu aşağıda olduğu gibi yapılabilir ki bu da işin *işlemsel* yönünü açıklar.



Şekil 14

ÖRNEK . 2. $f(A,B,C) = A B C + A' B C' + A' B' C + A' B' C'$ fonksiyonu için Venn çizimini düzenleyelim.

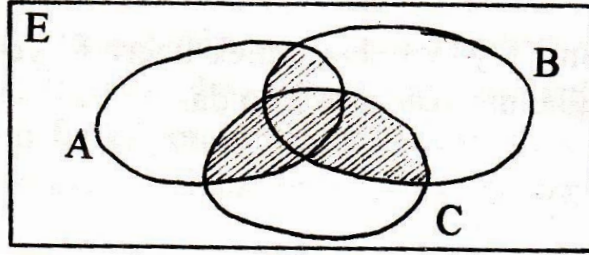
Burada üç kümeyle bir Boole fonksiyonu betimlenmiştir. 8 bölgeden 4 ü şekilde taralı olarak gösterilmiştir ki bunlar fonksiyonda görülen terimlere karşı gelen bölgelerdir. Okuyucu, bir önceki örnekte olduğu gibi, bu böl-



Şekil 15

gelerde oluşan durumları yorumlayabilmelidir. Boole fonksiyonun Venn çizimi ile gösterilmesi daha iyi anlaşılmış olacaktır. Bir de aksine bir örnekleme olması bakımından aşağıdaki örneğin incelenmesi yararlı olacaktır.

ÖRNEK. 3. Aşağıdaki Venn çizimi ile tanımlanan Boole fonksiyonu nedir ?



Şekil 16

Venn çizimindeki taralı olarak görülen bölgelerde fonksiyon tanımlanıyor, kümeler A,B,C ile gösterildiğine ve bunların bölgeler için ayrıcı normal formda oluşan biçimleri bilindiğine göre, taralı bölgelere ait bileşenler toplam halinde ifade edilirse, fonksiyon ortaya çıkmış olacaktır. Bu ise,

$$f(A,B,C) = A B C + A B C' + A B' C + A' B C$$

şeklinde ifade edilecektir.

5.10. FORMLARIN BİRBİRİNE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Yukarıda tanımlanmış ve çeşitli özelliklerinden söz edilmiş olan *ayırıcı normal formda fonksiyon* ile *birleştirici normal formda fonksiyon* arasında bir **dönüşüm ilişkisi** bulunduğu görülmüş ve bu, bir bakıma saptanmıştır. Burada, bu işin nasıl gerçekleşebileceği açıklanacaktır. *İkili (dual) Sistem*, bu işin nasıl yapılabileceğine dair ipuçları vermektedir. Çünkü bu dönüşüm işi de ancak iki aşamada gerçekleşebilecektir.

Genel olarak *çift değilleme yasası* kullanılır. f , β sınıfında bir fonksiyon ise,

$$f = [f']'$$

olduğu bilinmektedir. Algoritmayı oluştururken, buradaki (') işlevlerinin neler olduklarının tanımlanması gerekmektedir. f' ile önce *De Morgan yasası* uygulanır. Böylece form nitelik değiştirir. Bu kez diğer *değilleme* ile fonksiyonun *bütünleyeni* yazılır ki böylece fonksiyon diğer forma dönüşmüş olur. Burada her iki formun dönüşümü için ortak bir algoritma oluşturulmuş bulunmaktadır. Bu şekilde, fonksiyonun formları arasında bir öncelikten söz edilmiş olmayacaktır.

ÖRNEK .1 . $f(x,y) = x y + x' y + x' y'$
fonksiyonunu diğer formda yazalım.

$f = [f']'$ kuralından yararlanarak , De Morgan uygulanırsa,

$$f' = [x y + x' y + x' y']' = (x y)' . (x' y)' . (x' y')' = (x' + y')(x + y')(x + y)$$

olur. Şimdi ikinci (') operatörü için, yani $[f']'$ yü elde etmek üzere f' ye ait bütünler fonksiyon yazılırsa, dönüşüm sağlanmış olacaktır ki o da,

$$f = [f']' = x' + y$$

dır.

ÖRNEK. 2. $F(x,y,z) = x y z + x' y z + x y' z' + x' y z'$
fonksiyonunu diğer forma dönüştürelim.

Sıralı olarak aşağıdaki işlemler yapılacaktır :

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= [F'(x,y,z)]' = x y z + x' y z + x y' z' + x' y z' \\ &= [(x y z + x' y z + x y' z' + x' y z')']' \\ &= [(x y z)' . (x' y z)' . (x y' z')' . (x' y z')']' \\ &= [(x' + y' + z')(x + y' + z')(x' + y + z)(x + y' + z)]' \\ &= (x + y + z)(x + y + z')(x' + y + z')(x' + y' + z) \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK. 3. $f(x,y,z) = (x' + y' + z)(x + y' + z)(x + y + z')(x' + y' + z')$
fonksiyonu birleştirici normal formda ifade edilmiş olup, bunu diğer forma dönüştürelim.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= [f'(x,y,z)]' = \{[(x' + y' + z)(x + y' + z)(x + y + z')(x' + y' + z')]\}' \\ &= \{x y z' + x' y z' + x' y' z + x y z\}' \\ &= x y' z + x y' z' + x' y z + x' y' z' \end{aligned}$$

olur.

5.11. FORMLARIN DÖNÜŞTÜRÜLMESİNDE TABLO YÖNTEMİ

Yukarıdaki örneklerden de görüldüğü gibi, yapılan tanıma uygun olarak formların birinden diğerine dönüşüm işleminde kural ancak, dikkat çekecek bir biçimde *tam fonksiyonlar* için kullanılabilmektedir. Bu yukarıdaki yöntemin zayıf

yönüdür. Yani eğer β sınıfında bir fonksiyon, formlardan birine uyduğu halde *tam fonksiyon* değilse, yukarıdaki yöntemin uygulanabilmesi için ya tam ayırıcı normal formda bir fonksiyon ya da tam birleştirici normal formda bir fonksiyon olarak ifade edildikten sonra işlem yapılabilir.

Tablo Yöntemi olarak sunulan ve ne şekilde kullanılacağı aşağıda açıklanmış bulunan bu yöntem, üst paragraftaki sakıncayı ortadan kaldırabilmektedir. Konu temel itibarıyla *formların birbirine dönüşümü* olduğuna göre, fonksiyon tam formda olmasa bile, yine bunlardan biri cinsindendir. Bu şekilde verilmiş olan fonksiyonun *tanım tablosu* düzenlenebilir. Bunun için önceki bilgilerimiz yeterince tazelenmelidir. Aşağıdaki örnekler de buna katkıda bulunacaktır.

Burada bir sonuç şöyle ifade edilmelidir : Tablo yöntemi de kullanılsa, fonksiyonun dönüşmüş biçimi, yine tam fonksiyon olarak ifade edilmiş olacaktır. Daha sonra başlıbaşına bir konu olarak ele alınacak olan *fonksiyonun indirgenmiş biçimi* düşüncesine koşut olarak, eğer fonksiyon buna elverişliyse, sadeleştirme yönüne gidilerek, form daha basit ifade edilebilir.

ÖRNEK . 1 . $f(x,y,z) = x y z + y z' + x' y + z$

fonksiyonu tam olmayan, ancak *ayırıcı normal formda* olan bir boole fonksiyonu olup, bunu diğer forma dönüştürerek ifade edelim.

1. yol : Fonksiyon, tam fonksiyon olarak ifade edilmeli ve $[f']$ ile diğer forma dönüştürülmelidir. (önceden uygulanan yöntem).
2. yol : Fonksiyonun tanım tablosu düzenlenmeli ve bundan yararlanarak diğer formdaki fonksiyon yazılmalıdır. (şimdi uygulayacağımız yöntem)

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Şimdi tanım tablosunu düzenleyelim. Tablo yanda görülmektedir. $f(x,y,z)$ fonksiyonuna ait değerlerin elde edilmesindeki ara işlemler okuyucuya bırakılmıştır. Okuyucumun, bu işlemleri çok sağlıklı bir şekilde yapacağına güveniyorum.

Fonksiyon ayırıcı normal formda (ancak tam değil) verildiği için fonksiyonun dönüşmüş ifadesi herhalde diğer form olan birleştirici normal formda olmalıdır. Bu tablodan, doğrudan doğruya yazılacaktır.

Önceki bilgilerimizden, birim eleman kavramı anımsanarak, birleştirici normal

form için 0 esas alınacağından, tabloda $f(x,y,z)$ sütunundaki 0 elemanlarına bakmak gerekecektir. Bu eleman tabloda 4. ve 8. sırada görülmektedir. Bu sıradaysa elemanların aldıkları değerlere bakarak, 0 için elemanın kendisini, 1 için elemanın bütünlerini yazarak toplamaları oluşturulursa, bileşenler ortaya çıkmış olur. Bunların çarpım şeklindeki ifadesiyse, fonksiyonun dönüştüğü yeni formunu gösterecektir. Bu da,

$$f(x,y,z) = (x + y + z)(x' + y + z)$$

olur.

Eğer isteniyor ya da düşünülüyorsa, burada bir sadeleştirme yapılabilir. Dağılma özelliği yardımıyla ve kolayca,

$$f(x,y,z) = (x + y + z)(x' + y + z) = (x + x')(y + z) = 1 \cdot (y + z) = y + z$$

olduğu hesaplanabilir ki form bozulmadan yeteri kadar sadeleştirme yapılmıştır. Sonuç olarak, dönüştürülmüş ve sadeleştirilmiş şekliyle fonksiyon için,

$$f(x,y,z) = x y z + y z' + x' y + z = y + z$$

yazılmış olacaktır.

ÖRNEK. 2. $F(A,B,C) = (A+B+C)(A+B')(A'+C)$

fonksiyonunu tablo yöntemi yardımıyla tam ayırıcı normal formda ifade edelim.

A	B	C	F(A,B,C)	Fonksiyon için düzenlenen tablo yanda görülmektedir. Burada oluşan değerlere bakarak fonksiyon yazılabilecektir. Yine birim eleman kavramı anımsanmalıdır. Bu kez, ayırıcı normal form için birim eleman 1 alınacağından, tabloda fonksiyon için oluşan sütundaki 1 elemanlarına bakarak terimler oluşturulacaktır. Buna göre, $f(A,B,C) = A B C + A B' C + A' B' C$ bulunacaktır.
1	1	1	1	
1	1	0	0	
1	0	1	1	
1	0	0	0	
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	
0	0	0	0	

ÖRNEK. 3. Tam ayırıcı normal formda verilmiş olan aşağıdaki fonksiyonu , tablo yöntemini kullanarak, diğer form a dönüştürelim.

$$F(u,v,w,t) = uvwt + uvw't' + uv'w't + u'vw't + u'v'w't' .$$

u	v	w	t	f(u,v,w,t)	Fonksiyonun tanım tablosunun düzenlenmiş şekli yanda görülmektedir. Burada da yine, önceki örneklerde olduğu gibi ara işlemler, okuyucuya bırakılmıştır.
1	1	1	1	1	
1	1	1	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	0	0	1	Dönüştürülmüş fonksiyon için birim eleman 0 olduğundan, 0 olan satırlara bakarak ve form için belirlenen $\Pi\Sigma$ ile temsil edilen yapıya uygun olarak bileşenler oluşturulursa, fonksiyon belirlenmiş olacaktır.
1	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	0	1	1	
1	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	Burada 4 değişkene karşılık (u,v,w,t) durumlar sayısı $2^n = 2^4 = 16$ olduğu esasen tablodan görülmektedir. Öyleyse bileşenlerin sayısı o oranda artmış olmaktadır.
0	1	1	0	0	
0	1	0	1	1	
0	1	0	0	0	
0	0	1	1	0	
0	0	1	0	0	Bu esaslardan hareket ederek fonksiyon istenilen forma dönüşmüş olarak, aşağıdaki gibi ifade edilmiş olacaktır :
0	0	0	1	0	
0	0	0	0	1	

(Bileşenler, tablodaki 0 lı satırlar sırasına göre ifade edilmiştir.)

$$f(u,v,w,t) = (u'+v'+w'+t)(u'+v'+w'+t')(u'+v'+w'+t')(u'+v'+w'+t)(u'+v'+w'+t). \\ \cdot (u'+v'+w'+t')(u'+v'+w'+t)(u'+v'+w'+t)(u'+v'+w'+t')(u'+v'+w'+t). \\ \cdot (u'+v'+w'+t')$$

olur.

5.12. ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

Aşağıdaki fonksiyonları ayırıcı normal formda yazınız :

1. $f(x,y) = x + x' y'$
2. $f(x,y) = x + y'$
3. $f(x,y,z) = (x y' + x z)' + y'$
4. $f(x,y,z) = x' + (x' y + y z')$
5. $f(x,y,z) = z' + (x y + x' z)'$
6. $f(u,v,w) = uv + u'(v + w) + w'$
7. $f(A,B,C) = A + B C (A' + B')$
8. $f(x,y,z,t) = x' + yzt + xy(z + t)'$

Aşağıdaki fonksiyonları birleştirici normal formda yazınız :

1. $f(x,y) = xy + x'(x+y)$
2. $f(x,y,z) = x' + x'y + y'z$
3. $f(x,y,z) = x' + x[(y' + z)']$
4. $f(A,B,C) = AB + (AC' + A'C)'$
5. $f(u,v,w,t) = uvt + w'(u+t) + v'$

Aşağıda tanım tabloları verilmiş olan fonksiyonları, formlardan birine göre yazınız. Sonra diğer forma dönüştürünüz. Birden çok fonksiyon aynı tablo üzerinde tanımlanmıştır. Herbiri için ayrı ayrı işlem yapınız :

x	y	z	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇	f ₈	f ₉	f ₁₀
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

Aşağıdaki tam ayırıcı normal formda fonksiyonları tam birleştirici normal formda fonksiyon olarak ifade ediniz. Olabildiğince, değişik yöntemler uygulayınız.

1. $f(x,y,z) = x'yz + xy'z + xy'z'$
2. $f(x,y,z) = xyz + x'yz' + x'y'z + x'y'z'$

Aşağıdaki tam birleştirici normal formda fonksiyonları tam ayırıcı normal formda fonksiyon olarak ifade ediniz. Olabildiğince, değişik yöntemler uygulayınız.

1. $f(x,y,z) = (x + y' + z)(x' + y' + z)$
2. $f(x,y,z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y + z')(x' + y + z')$

BÖLÜM 6

LOJİK DEVRELER

6. 1. GİRİŞ

Modern Mantığın ve Boole Cebirinin en önemli uygulamaları *Lojik Devreler'* de görülmektedir. Bu tür devrelerin mantık yasaları yardımıyla incelenmesi ve bunlara özgü matematiğin ve *Komütasyon Cebiri'* nin ortaya çıkışı başlangıçta yadırgansa bile, konu bütün ayrıntılarıyla ortaya konduğu zaman, ne kadar uyumlu bir yapılaşma olduğu daha iyi anlaşılabacaktır. Bu demektir ki, *Modern Mantık* ve buna dayalı olarak ortaya konulmuş bulunan *Boole Cebiri*, bir başka boyutta teknolojinin bir sınıfının matematiğini oluşturmaktadır. Sadece bu yönleriyle bile enikonu incelenmeye değer bulunmalıdır.

Mantığın ve Boole Cebirinin sembolleriyle karşılaştırmalı olarak, lojik devrelerde de bu sembollerin kullanılması bu uyumun ilk görüntüleri olmaktadır. Örneğin ilk başta **1** ve **0** ile olan betimleme, daha önce bir kez değindiğimiz gibi, bir **A** anahtarının kapalı ya da açık oluşunu temsil etmekle, ilk sembolik yaklaşım sağlanmış olmaktadır. Anahtara **A** demek, bunu bir **p** önermesi ya da $x \in \beta$ olmak üzere bir Boole değişkeni olarak görmek demektir. Tek başına bu oluşum *basit boolien nicelik*'tir. Eğer anahtar sayısı artarsa, bunlar arasındaki ilişkiler de çeşitlenecektir. Bu kez aralarında oluşan bu bağımlılığa göre bir takım modeller geliştirilecektir ki buna özgü bir matematik yapılabilirsin. İşte bu bölümde, bu başlık altında, bu oluşumların neler olduğu ya da olabileceği tartışılacak ve ortaya çıkan ilişkilerin modellenerek nasıl yorumlanacağı konu ednilmiş olacaktır.

Çağımızda önemli bir gelişme *elektronik hesaplayıcılar'* da yaşanmıştır. Bu süreç bir bakıma devam etmektedir. Gün geçmiyor ki bu alanda, devrim sayılacak bir yenilik ortaya atılmasın. İşte en son gelişme olarak, *İnternet* buna bir örnek oluşturabilmektedir. *Bilgisayarlar'* ın ortaya çıkmasından bugüne kadar geçen yaklaşık 50 - 60 yıl içinde öylesine devrimler yaşandı ki, bunlar artık *Bilim Tarihi'* ndeki yerini bile almış oldu. Kitabımızın başında bazı anlatımlarda sözü edilen tarihsel süreç içinde, bilgisayar olgusu başlıbaşına yer almaktadır. Bu olgu ve yaşanan süreç sonunda ortaya çıkan oluşumlara bakarsak, nereden

nereye geldiğimizi daha iyi görebiliriz. Sonuçta, kuramsal gelişmelerle teknolojik gelişmelerin uyumunun en iyi örneğini verdiği söylenebilecektir.

Bilgisayar dilinin çözümlenmesinde, dual sisteme özgü bir matematik olarak bu kitapta konu edinilmiş olan matematik konuları gerekli olmaktadır. Başta *aritmetik* ve *cebir* olmak üzere, *Boole Fonksiyonları* ile oluşturulan matematik, bu disiplinin temel bilgilerini içermiş bulunmaktadır.

Kısaca, bilgisayarların nasıl algılandığını iyi analiz edersek, yaptığımız çalışmanın da ne amaca yönelmiş olduğunun çok daha iyi anlaşılacağı kanı-sındayım.

Bilgisayarlar, a) *yazılım* ; b) *donanım* olmak üzere iki ayrı kavramı birlikte içe-rirler. Donanım ile ilgili konular, işin tamamen teknolojik boyutuyla ilgili olup bu konu bizi o kadar ilgilendirmemektedir. Ancak yazılım ile ilgili kısım yani ekranın ön tarafı, konumuzun tam merkezinde bulunmaktadır. Bilgisayarlarla iş yapabilmek için ya onlar bizim dilimizden ya da biz onların dilinden anlamak zorundayız. Burada daima ikinci durum bir seçenek olarak karşımıza çıkar. Buna bağlı olarak da çeşitli bilgisayar dilleri oluşmuş bulunmaktadır. Burada bu ayrıntılara girilmeyecektir. Ancak hangi dilde olursa olsun, ortak olan bazı kriterler vardır ki onları bilmek zorundayız. Bir bilgisayar, örneğin bu kitabın yazılması işinde kullandığım PC, benim yazdıklarımı nasıl algılar ve saklar ? Bu soruların yanıtlarını sadece *program oluşturmak* yönünden ele alarak yanıtlar-sak, bütün bu işler için *sembolik mantığı* kullandığını söylemekle bu kavramı açıklamış oluruz. Sembollerin ifade ettiği her bir *karakter* bellekte yer alırken, bunların nasıl kullanılacağına ya da nasıl ilişkilendirileceğine dair *operatörler* de koşut olarak yüklenmiş olacaktır. Hesaplamaların olduğu yerlerde *sayılar* yer alacak ve *dijital sistem* ile okunan bu sayılar, **1,0** mantığını içerecektir. Tüm sayılar, semboller, noktalama işaretleri ve harfler, hep bu sembollerle temsil edilmiş olacaklardır. *Bilgi (Data)* ile birlikte *programlar* ve *alt-prog-ramlar* bir bilgisayarın temel malzemesini oluştururlar. Kapasite sorunu olma-dığı sürece, bu elektronik bilgi işlemciler, son kuşak olarak, saniyede milyar mertebesinde işlemi, göz açıp kapama süresinden çok daha kısa bir zaman ara-lığı içinde bitirebilmektedirler. Son yıllarda bu sınırlar da zorlanmaya başlandı.

Günlük yaşamımızda kullandığımız sayı sistemi, önceden de konu edinildiği gibi *On'luk Sistem (Desimal Sistem)* olup, işlerimizi ve hesaplarımızı bunun yardımıyla yaparız. Oysa *makina dili* denilen bir sistemde bu hesap işleri, hep *İki'li Sistem* kullanılarak gerçekleştirilir. Bunu makina *otomatik olarak (kendiliğinden)* yapmaktadır. Bizim yüklediğimiz sayıları ikilik sisteme dönüştürür ve

işlemleri, daha önce açıklanmış olduğu şekilde, tamamlayarak, sonuçları yeniden onluk sisteme dönüştürerek bize iletir. Bunu o kadar hızlı yapar ki, bizim bunu algılamamız adeta olanaksız hale gelir. Basit el makinalarında dahi bu işlemler bu şekilde gerçekleşir.

Bir de operatörlerden kaynaklanan bazı düzenlemeler vardır ki, onlara da şöyle bir değinmekte fayda umarım. Öncelikle bilinmektedir ki bu tür hesaplayıcılar, daima *sayısal işlemler* yapmaktadırlar. Onlara *grafik* dahi çizdirseniz, bilin ki bunlar dahi sayılar yardımıyla gerçekleşmektedir. Örneğin bir *belirli integral* hesabı yatırabilir ancak bir belirsiz integralin çözümünü isteyemezsiniz. Bütün bu tür hesaplar da yine İki'lik sayı sistemi (Binary sistem) yardımıyla gerçekleşmektedir. Bu hesaplamalar sırasında klasik matematik çalışmalarının dışına çı- kılarak, tamamen makina diline uygun hesap teknikleri geliştirilmiş ve bunlar giderek *Sayısal Analiz (Nümerik Analiz)* konularını oluşturmuşlardır. Birbirine koşut olarak, bilgisayarların hızla gelişmesi, son elli yıl içinde sayısal analizin de hızla gelişmesini zorunlu kılmıştır. Böylece bu alanda çalışanların sayısı da hızla artmıştır. Bu konulara, teknokratların katkısı da yadsınamayacak kadar çok olmuştur.

Bundan 35 - 40 yıl önceki eğitim programlarını karıştıranlar, *Elektronik Mühendisliği ; Bilgisayar Mühendisliği* gibi teknik disiplinleri göremeyeceklerdir. Bu süreç, ülkemiz bazında 1970 li yılların başları itibariyle başlamıştır denilebilir. Bu konularda, eğitim ve bilimsel çalışma ve araştırma süreci belki biraz daha önceki yıllara kadar kaydırılabilirse de, bunların tam bir bütünlük içinde hem bir akademik program oluşturacak düzeye gelmeleri, hem de buna koşut olarak teknolojik sürecin başlaması, ancak bu yıllar içinde olanaklı hale gelmiş bulunmaktadır. Ancak sevindiricidir ki, ülkemiz insanı, teknolojik çevreler ve üniversitelerimiz bu alanlarda yüzyılı çok çabuk yakalamışlar ve gerek eğitim aşamasında olsun gerekse yetişmiş kalifiye insan gücü birikiminde olsun, ileri ülkeler düzeyinde bir yere ulaşılabilmiştir.

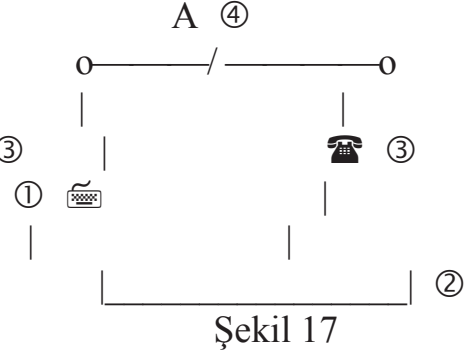
İşte bu kitabımızla, bu alanda yetişmekte olan ya da yetişecek olanlara, bu konuların *matematiğini* sunmak amaçlanmıştır. Bu bölümde, bu matematiğin önemli uygulamaları ve onun ayrıntıları incelenecektir.

Lojik Devreler ya da diğer bir adıyla *Düzlemsel Devreler* olarak adlandırılan bu konu içinde, devrelerin oluşumu, VE - VEYA devreleri, anahtar çeşitleri ve bunlara bağımlı olarak, kapıların sembolik gösterilişleri ve daha sonra ekonomik devre kavramı tartışılacaktır.

6. 2. TEMEL DEVRE

Basit bir elektrik devresinde en az dört temel eleman (öge) bulunur.

- a) Elektrik enerjisi (gerilim) - ①
- b) Teller (enerji taşıyıcılar) - ②
- c) Etkilenen eleman (elektrikle işleyen alet) - ③
- d) Anahtar - ④



Burada basit şekilde temsil edilen bu elektrik devresi *Temel Devre* adını alır. Bu tür devrelerin , aksi söylenmedikçe , *düzlemsel* olduğu kabul edilecektir. Burada bizi ilgilendiren esas eleman *anahtar'* dır. A ile gösterdiğimiz bu anahtar, dikkat edilirse, o—o hattı üzerinde bulunmaktadır. Bu hattın her iki başına, sembol olarak o konulmakla, bu kısım esas devreden ayrılmış olmaktadır. Buna *Anahtar Devresi* denir ve bütün bir devre sistemi içinde bizi ilgilendirecek olan kısım burasıdır. Demek ki, böyle bir anahtar devresi gösterildiğinde, biz kendiliğinden diğer elemanların da var olduğunu kabul etmiş olacağız. Öyleyse Şekil 17 de görülen temel devre yerine, aşağıda Şekil 18 a ve 18 b deki devre geçmiş olacaktır.



Lojik devre kavramı bu anahtar düzeni ile oluşmaya başlamaktadır. Buna koşut olarak bunlara da *Lojik Anahtarlar* denilmektedir. Bu şekillerdeki sembolik anlatıma göre, Şekil 18 a da anahtarın *açık hali* görülmektedir ki bu anahtardan akım geçmemektedir ; öyleyse bunun sembolü **0** dır. Şekil 18 b de ise anahtarın *kapalı hali* görülmektedir ki bu anahtardan akım geçmektedir öyleyse sembolü **1** dir. Bu oluşum bir lojik yaklaşımla aşağıdaki tablo yardımıyla temsil edilir. Bu tabloyu daha önce başka amaçla düzenlediğimiz hangi tablolara ben-zetiyorsunuz ?

<u>A</u>	Bu yapı, anahtarın tek olmasından ötürü, sabit bir durum olarak
1	görülür. Oysa aynı düzlemsel devre içinde, anahtar sayısı iki ya
0	da daha çok olursa, bunlarla ortaya çıkan durum (durumlar) de-

gişken olarak işlem görmelerine neden olacaktır. Aynı bir devrede A ve B gibi iki anahtarın birlikte bulundukları düşünülürse, bunlarla ortaya çıkacak farklı durumlar aşağıda incelenecektir. Giderek anahtar sayısını artırarak, çok daha karmaşık problemlere ulaşılabilecektir.

Bir lojik devrede A ve B gibi iki anahtar varsa, bunlardan akım geçip geçmediğine göre dört farklı durum oluşur. Bu farklılık iki farklı yapıyla daha da çeşitlenmiş olur. Bu oluşumlara ait ayrıntılar aşağıdadır.

6. 3. VE DEVRESİ (SERİ BAĞLAMA)

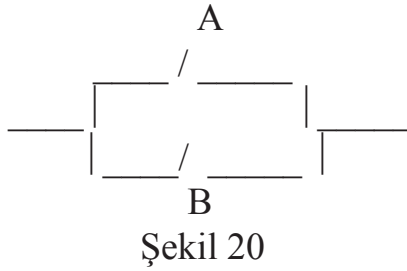
A B		A	B	$A \wedge B$
_____ / _____ / _____				
①		1	1	1
②		1	0	0
③		0	1	0
④		0	0	0

Burada Şekil 19 her iki anahtarı sembolik olarak içermektedir. A ve B anahtarlarının farklı durumlarını yanda görülen tablo temsil etmektedir. Böylece olası dört durumun neler olabileceği buradan anlaşılmaktadır. Tablo, aşağıda açıklanan değerlendirme doğrultusunda oluşmuştur :

- ① durum : A ve B anahtarlarının her ikisinden de akım geçer : $A = 1$, $B = 1$.
Öyleyse devreden akım geçer ; $A \wedge B = 1$.
- ② durum : A dan akım geçer ; B den akım geçmez : $A = 1$, $B = 0$.
Öyleyse devreden akım geçmez ; $A \wedge B = 0$.
- ③ durum : A dan akım geçmez ; B den akım geçer (!) : $A = 0$, $B = 1$.
Öyleyse devreden akım geçmez ; $A \wedge B = 0$.
- ④ durum : A dan ve B den akım geçmez : $A = 0$, $B = 0$.
Öyleyse devreden akım geçmez ; $A \wedge B = 0$.

Devrenin analizinden elde edilen bu sonuçlar yardımıyla yukarıdaki tablo oluşmuştur. Bu tablo 1 ve 0 ların yerlerine karşılıklı olarak D ve Y konulduğunda tam olarak VE bağlacına ait tabloyu verir. İşte bu nedenledir ki iki anahtarın bir devrede bu şekildeki bir düzen içinde bulunmalarıyla oluşan lojik devreye *VE devresi* adı verilir. Diğer taraftan bu yapı, fiziksel anlamda ele alınırsa, anahtarların bağlanma biçimi bir *seri bağlama* olarak görülmektedir. Bu yaklaşıma göre bu düzenin ancak seri bağlamayla gerçekleştiği söylenebilecektir. Demek ki bu bağlaç ve bağlama biçimi arasında da bu türlü bir ilişki vardır.

6. 4. VEYA DEVRESİ (PARALEL BAĞLAMA)



	A	B	$A \vee B$
①	1	1	1
②	1	0	1
③	0	1	1
④	0	0	0

Burada Şekil 20, her iki anahtarı sembolik olarak içermektedir. A ve B anahtarlarının farklı durumlarını yanda görülen tablo temsil etmektedir. Böylece olası dört durumun neler olabileceği buradan anlaşılmaktadır. Tablo aşağıda açıklanan değerlendirme doğrultusunda oluşmuştur.

- ① durum : A ve B anahtarlarının her ikisinden de akım geçer : $A = 1$, $B = 1$.
Öyleyse devreden akım geçer ; $A \vee B = 1$.
- ② durum : A dan akım geçer , B den akım geçmez : $A = 1$, $B = 0$.
Öyleyse devreden akım geçer ; $A \vee B = 1$.
- ③ durum : A dan akım geçmez , B den akım geçer : $A = 0$, $B = 1$.
Öyleyse devreden akım geçer ; $A \vee B = 1$.
- ④ durum : A dan ve B den akım geçmez : $A = 0$, $B = 0$.
Öyleyse devreden akım geçmez ; $A \vee B = 0$.

Devrenin analizi sonucu bu tablo oluşmuştur. Tabloda 1 yerine D , 0 yerine Y konulduğunda ve A ve B de önermeler olarak görüldüğünde tam olarak VEYA bağlacına ait tanım tablosu ortaya çıkar. İşte bu nedenledir ki anahtarların bu lojik durumu **VEYA Devresi** olarak adlandırılır. Ayrıca fiziksel bir oluşum olarak bu bağlama biçimi yorumlanırsa, *paralel bağlama* ile Veya devresi arasında bir ilişki kurulmuş olmaktadır.

6. 5. ÇARPMA DEVRESİ

A	B	A.B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Yukarıda açıklanan oluşumları bu kez işlevsel yaklaşımla inceleyelim. Boole Cebiri konusunda, *toplama* ve *çarpma işlemlerinin* ne şekilde ve hangi tablolarla tanımlandıkları anımsanmalıdır. Yanda, bunlardan *çarpma tablosu* görülmektedir. Bu tablonun sonuç sütunu **Ve Devresi** tablosuyla karşılaştırılırsa, birebir uyum gösterdiği görülmektedir. Öyleyse denilebilecektir ki, VE bağlacı ile tanımlanan bileşim Boole Cebirinde

çarpma işleminin karşılığı olmaktadır. Yukarıdaki bilgilerimizden, bu ilişkinin, anahtarların seri bağlanmasıyla da ilgili olduğu söylenebilecektir. Sonuç olarak, demek ki bir VE ' li bileşim bir *Çarpma Devresi*' ni temsil etmektedir. Öyleyse karşıt bir görüş olarak da, çarpma devresi ancak bir VE'li bileşimle oluşturulabilecektir.

		Önermeler Mantığında	Boole Cebirinde	Lojik Devrelerde
A	B	$A \wedge B$	$A \cdot B$	$A \cdot B$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

Bunların dışında, çarpma devresinin bir de anahtarları üzerinde bulunduran ve lojik devre olarak adlandırdığımız, Şekil 19 da görülen biçimsel bir düzenlemesi vardır ki, yine karşıt bir görüş olarak, bir çarpma devresi çizelim denildiğinde anahtarların *seri bağlanmış olduğu* bir yapı öngörülebilecektir. Bir çarpma devresinin mantıksal varlığı,

$$A \cdot B = 1$$

olarak ifade edilecektir.

6. 6. TOPLAMA DEVRESİ

VEYA Devresi ile oluşan tablonun ve ona ait değerlendirme-
nin, bu kez işlevsel yönü tartışılırsa, Boole Cebirinde toplama
işlemi için düzenlenen tablo ile karşılaştıldığı görülür. Demek
ki VEYA bağlacının temsil ettiği bileşim lojik devrelerde *top-*
lama işlemini gösterecektir. Buna koşut olarak, bir lojik devrede *paralel*
bağlanmış iki anahtar bir toplama işlemi tanımlıyor demektir. Bu şekilde bir
toplama devresinin mantıksal varlığı,

$$A + B = 1$$

ile ifade edilecektir.

		Önermeler Mantığında	Boole Cebirinde	Lojik Devrelerde
A	B	$A \vee B$	$A + B$	$A + B$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0

6. 7. VE - VEYA DEVRESİ

Bir lojik devrede, anahtar sayısının üç ya da daha fazla olması halinde, bunların biraraya getirilmesinde çeşitli kombinasyonlar oluşturulabilecektir. Basit bir çalışma için, şimdilik üç anahtar seçilirse ve bunlar da A , B , C ile gösterilirse, olası durumlar aşağıya çıkarılmıştır. Görülmektedir ki 8 çeşit durum oluşmakta ve bu yine 2^n kuralıyla açıklanabilmektedir. Bunlar hem tabloyla, hem işlevsel olarak hem de şematik olarak birlikte gösterilmiştir.

<u>A B C</u>					
①	1	1	1	$\rightarrow A \wedge B \wedge C \rightarrow A . B . C \rightarrow$	$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ o \text{---} / \text{---} / \text{---} / \text{---} o \\ \quad \quad \quad /A \quad \quad /B \\ o \text{---} \boxed{\quad \quad /C \quad \quad} \text{---} o \end{array}$
②	1	1	0	$\rightarrow (A \wedge B) \vee C \rightarrow (A . B) + C \rightarrow$	$\begin{array}{c} \quad \quad \quad /A \quad \quad /C \\ o \text{---} \boxed{\quad \quad /B \quad \quad} \text{---} o \end{array}$
③	1	0	1	$\rightarrow (A \wedge C) \vee B \rightarrow (A . C) + B \rightarrow$	$\begin{array}{c} A \quad \quad \quad /B \\ o \text{---} / \text{---} \boxed{\quad \quad /C \quad \quad} \text{---} o \end{array}$
④	1	0	0	$\rightarrow A \wedge (B \vee C) \rightarrow A . (B + C) \rightarrow$	$\begin{array}{c} \quad \quad \quad /A \\ o \text{---} \boxed{\quad \quad /B \quad \quad /C \quad \quad} \text{---} o \end{array}$
⑤	0	1	1	$\rightarrow A \vee (B \wedge C) \rightarrow A + (B . C) \rightarrow$	$\begin{array}{c} B \quad \quad \quad /A \\ o \text{---} / \text{---} \boxed{\quad \quad /C \quad \quad} \text{---} o \end{array}$
⑥	0	1	0	$\rightarrow (A \vee C) \wedge B \rightarrow (A + C) . B \rightarrow$	$\begin{array}{c} C \quad \quad \quad /A \\ o \text{---} / \text{---} \boxed{\quad \quad /B \quad \quad} \text{---} o \end{array}$
⑦	0	0	1	$\rightarrow (A \vee B) \wedge C \rightarrow (A + B) . C \rightarrow$	$\begin{array}{c} \quad \quad \quad /A \\ o \text{---} \boxed{\quad \quad /B \quad \quad} \text{---} o \\ \quad \quad \quad /C \end{array}$
⑧	0	0	0	$\rightarrow A \vee B \vee C \rightarrow A + B + C \rightarrow$	$\begin{array}{c} \quad \quad \quad /A \\ o \text{---} \boxed{\quad \quad /B \quad \quad} \text{---} o \\ \quad \quad \quad /C \end{array}$

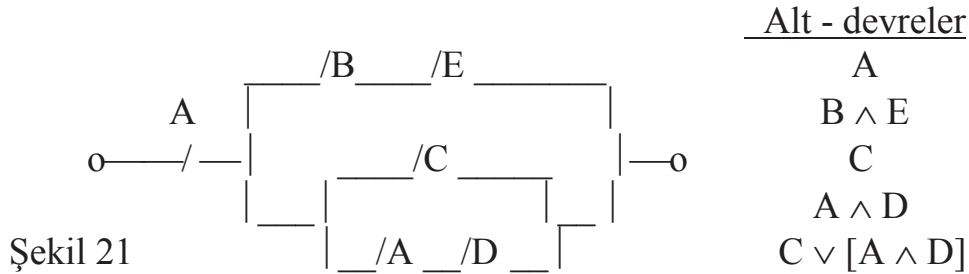
Olası sekiz durumun ve bunların lojik bağlantılarının neler olabileceği böylece gösterilmiş olmaktadır. Bizim için burada üzerinde durulması gereken husus, bir devrede aynı zamanda hem seri hem de paralel bağlanmış anahtarların birlikte bulunabilmesidir. İşte bu çeşitte bağlanmış anahtarları birlikte bulunduran lojik devrelere *VE-VEYA Devresi* denilmektedir.

Burada 1. ve 8. durumların konumuz bakımından ilkselliği, daha önce iki anahtar için verilen seri (1.durum) ve paralel (8.durum) bağlamanın, ikiden daha çok sayıda anahtar için de olanaklı olduğunun görülmesidir. Ancak bunlar yine de tek düze bağlamalardır. Bunların dışında kalan (2-7) diğer durumların hepsinde, aynı bir devrede iki çeşit bağlamanın da bulunduğu görülmektedir.

Bu tip ve-veya devrelerinde, kendi içinde bir toplama ya da kendi içinde bir çarpma devresi *alt devre* adını alır ve denilebilir ki bu tür kompoze lojik devreler, bu alt devrelerin kendi aralarındaki lojik bağlamalarıyla oluşur. Yukarıdaki devre şekilleri dikkatlice incelenirse, bu oluşumun basit örneklerini burada görmek olanaklıdır. Örneğin ④ deki durum incelenirse, A anahtarına, B ve C anahtarlarının paralel bağlanmasıyla ortaya çıkan *alt-devre*'nin seri bağlandığı görülmektedir. Bu durumda A da kendi başına bir alt-devre gibi algılanabilir. Örneğin ⑤ de, B ve C anahtarları bir seri bağlama ile bir alt-devre oluşturmakta ve bu A anahtarına paralel bağlanmaktadır. İşte böylece seri ve/veya paralel bağlı anahtarlarla bir takım lojik devrelerin oluşturulabildiği anlaşılmaktadır. Bunlara yukarıda açıklanan işlemsel yönüyle yaklaşıldığında *Toplama-Çarpma Devresi* denildiği de olmaktadır.*

Eğer anahtar sayısı daha fazla ise, bu tür devrelerdeki anahtar kombinasyonunun çok daha karmaşık olacağı ve çeşitlilik göstereceği kolayca saptanabilir. Buna dair bir örnek ve bu lojik devre aşağıda gösterilmiştir.

ÖRNEK . $f(A,B,C,D,E) = A \wedge \{ [B \wedge E] \vee [C \vee (A \wedge D)] \}$
fonksiyonu verildiğine göre buna uyan lojik devreyi çizelim ve sonra üzerindeki tüm alt-devreleri listeyelim.



Bu tür lojik devreler toplama-çarpma devresi olarak gösterilirse, aynı fonksiyon

$$f(A,B,C,D,E) = A \{ B E + [C + A D] \}$$

şeklinde de ifade edilmiş olabilecektir. Ancak bu tür fonksiyonlar, Boole Fonksiyonlarındaki iki temel çeşide göre ifade edilmediği takdirde fazlaca soyut kaldıklarından, genelde ilk şekilde ifade edilmeleri, yani bağlaçlarla tanımlanmış

(*) Bu devrelere ingilizcedeki karşılıklarıyla **AND-OR** devresi de denilmektedir. Çoğu kez, özellikle konuşma düzeyinde bu deyimler kullanılabildiğinden, bu hususun belirtilmesinde yarar görülmüştür. Keza tek başına VE devresine **AND** devresi ; VEYA devresine de **OR** devresi denildiği gibi ...

olmaları yeğlenmektedir. İleride, lojik devrelerin de bu formlara uygun kalıplar halinde incelenmeleri gündeme geldiğinde, hatta anahtarları temsil eden A,B,... sembolleri yerlerine x,y,... gibi değişkenleri koyarak yapacağımız işlemler, ko- nuyu daha farklı boyutlarda görmemizi sağlayacaktır. Ancak temel kavramla- rın oluşması aşamasında, bu çalışmalara, şimdilik kullanılan notasyonlarla de-vam edilecektir.

Bu tür VE - VEYA devrelerinde bir kavram da, bu devrenin çalışıp çalışmadığının belirlenmesidir. Yani anahtarların alabileceği durumlara karşın devreden akım geçer mi , geçmez mi ? Bir başka soru, anahtarların hangi kombinasyonu için bu lojik devre çalışan bir devredir ki biz bu devrenin bir iş yaptığına ya da yapabileceğine karar verebilmiş olalım. İşte bunların araştırılması ve çalış- manın bu yönde geliştirilmesi, konunun içeriğini giderek zenginleştirecektir. Bu durumun lojik fadesi

$$f(A,B,C,...) = 1$$

yazılarak gösterilir ki bunun anlamı, A,B,C, ... anahtarlarının alacağı değerlere karşın fonksiyonu 1 yapan durumlarda devrenin çalıştığı, aksi halde çalışmadığı anlatılmış olmaktadır. Eğer anahtarlar hangi değeri alırlarsa alsınlar f daima 1 oluyorsa, bu lojik devrenin standart ifadesi bir *totoloji* olup, bundan sonraki aşama bu kez devrenin sadeleştirilmesini yani denk devre kavramıyla ekonomik devreye ulaşılmasını hedeflemiş olacaktır.

Ancak çalışmanın bu aşamalarına geçmeden önce, öğrenmemiz gereken başkaca kavramlar da vardır ki şimdi de bunlara yönelelim. Bu amaçla, bir lojik devrede bulunan (bulunabilecek) anahtarların arasındaki ilişkilerin neler olabileceğini ve bunların hangi *mantık yasaları* ile açıklanabileceğini tartışmaya açalım. İşte bu amaçla, *anahtarların çeşitleri'* ni gözden geçirelim.

6. 8. LOJİK ANAHTAR ÇEŞİTLERİ

Bir lojik devrenin içeriğinin zenginliği, buradaki anahtar çeşitliliği ile artmaktadır. Lojik anahtarlar önce ikiye ayrılır :

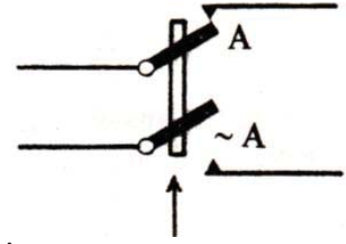
- 1) Bağımsız anahtarlar ,
- 2) Bağımlı anahtarlar .

Bağımsız anahtarlar, farklı harflerle temsil edilirler. Herbiri ancak kendisine kumanda edildiği (bir değer verildiği ki bu değer **1** ya da **0** olabilecektir) takdirde

işlevini yapacaktır. Yukarıdaki örnekte görülen lojik devredeki A,B,C,D,E anahtarları, işte bu türden, *bağımsız anahtarlar* olmaktadır.

Bağımlı anahtarlara gelince ... Onlar da ikiye ayrılır :

- 1) Aynı yönlü anahtarlar ,
- 2) Zıt yönlü anahtarlar.



Şekil 22

Yandaki şekilde bu anahtar türlerinden birinin çizimle bir gösterimi yer almaktadır. İşaret edilen doğrultuda komut edildiğinde A da anahtar devreyi tamamlarken , zıt yönlü anahtarı temsil eden $\sim A$ da devre açılmakta, yani buradan akım geçemeyeceği anlaşılmaktadır. İşte bu bir çift anahtar, *zıt yönlü anahtar* çeşidini örneklemektedir. Bu tür anahtarlar aynı harfle ancak, bu örnekte olduğu gibi *değilli* olarak gösterilmek suretiyle temsil edilirler. Bu gösterimde, lojik devrede $\wedge$, $\vee$ sembolleri kullanıldığından, aynı bütünlük içinde değillemeyi göstermek üzere, yukarıda yazılmış olduğu gibi $\sim$ sembolü kullanılacaktır. Bu anahtarlardan birine kumanda edildiği (bir değer verildiği) takdirde, zıt yönlü anahtar aksi değeri alacak, yani karşıt hareketi yapacaktır. A anahtarını açtığımız zaman $\sim A$ anahtarı kapanacak ; A yı kapadığımız zaman da $\sim A$ anahtarı açılacaktır. İşte bunun gerçekleşmesi için de $\sim(\sim A) = A$ çift değilme yasasının burada kullanılmış olacağı açıktır.

Bağımlı anahtar tiplerinden *aynı yönlü anahtar* çeşidi incelenirse, bunların tek bir komutla, aynı hareketi yapan anahtarlar oldukları kolayca söylenebilecektir. Bir devrede bu nitelikte anahtarlar varsa bunların tümü tek bir harfle gösterilir ve birine hangi değer verilirse, hepsi aynı değeri almış olacak demektir.

Aşağıda bu tür anahtarları içeren bir lojik devre örneği verilmiştir. Anahtarların birbirleriyle olan ilişkilerine bakarak, bu lojik devreye uyan *lojik fonksiyon* bulunmuştur. Bu fonksiyon yazılırken, özellikle, alt-devrelerden yararlanıldığına dikkat edilmelidir.

$$o \text{---} \left[\begin{array}{ccc} \text{---}/A \text{---} & \text{---}/\sim B \text{---} & \text{---}/C \text{---} \\ \text{---}/B \text{---} & \text{---}/D \text{---} & \text{---}/E \text{---} \\ \text{---}/C \text{---} & \text{---}/\sim A \text{---} & \text{---}/A \text{---} \end{array} \right] \text{---} o = (A \wedge \sim B \wedge C) \vee (B \wedge D \wedge E) \vee (C \wedge A \wedge \sim A)$$

Şekil 23

Burada, A, B, C bağımlı ; D, E bağımsız anahtarlardır. Devrede C iki tanedir, ancak aynı yönlü anahtar olarak görülmektedir. Oysa A ve B anahtarları aynı

zamanda değilli anahtarları da bulundurduklarından, zıt yönlü anahtarlar olmaktadır. Alt devrelere gelince ; bunlar ,

$$A \wedge \sim B \wedge C \ ; \ B \wedge D \wedge E \ ; \ C \wedge \sim A \wedge A$$

olarak sıralanabilecektir. Burada sonuncu alt devre ayrıca incelenmeye değerdendir. Modern mantıktaki değlendirmeler anımsanarak,

$$C \wedge \sim A \wedge A = C \wedge [A \wedge \sim A] = C \wedge Y = Y$$

olduğu hesaplanacaktır ki bu mantık diliyle bir *çelişmeyi* göstermektedir. Bunun lojik devredeki karşılığı, *çalışmayan (akım geçirmeyen) bir alt devre* demektir. Öyleyse yukarıdaki bütünlük içinde, $\vee$ ile bağlı bulunan diğer bileşenler dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} [A \wedge \sim B \wedge C] \vee [B \wedge D \wedge E] \vee [C \wedge \sim A \wedge A] &= \\ [A \wedge \sim B \wedge C] \vee [B \wedge D \wedge E] \vee Y &= \\ [A \wedge \sim B \wedge C] \vee [B \wedge D \wedge E] & \end{aligned}$$

bulunur ki, böylece devre üzerinde, tamamen sembollerle ve mantık yasalarıyla sürdürülen bazı işlemler yapıldığı görölmektedir. İlerideki çalışmalarımızda ayrıntıları görölecek olan bu ve benzeri oluşumların, tamamen matematiksel yaklaşımlarla *lojik devre tasarımları* şeklinde yönlendirilmesi olanaklı hale gelmiş olacaktır.

6. 9. DENK DEVRELER

Anahtar düzeni ne olursa olsun, aynı görevi yapan iki lojik devreye *denk devreler* denir. Bu devrelerde aynı anahtarların bulunması da bir zorunluluk değil-dir. Eğer bu iki lojik devre $F_1(x,y,z,...)$ ile $F_2(x,y,z,...)$ fonksiyonlarıyla temsil ediliyorsa, bunların denk oluşları, alışılmış sembollerle,

$$F_1(x,y,z,...) \equiv F_2(x,y,z,...) \text{ ya da } F_1(x,y,z,...) \underset{Dk}{=} F_2(x,y,z,...)$$

yazılarak gösterilir. Gerçekte *özdeşlik* ve *eşitlik* farklı kavramlar olmalarına karşın pratikte eşit kullanılması da yine bu tür devrelerin *denk devreler* olduğu anlamına kullanılacaktır. Bu tür devreleri oluşturan fonksiyonların *tanım tabloları* aynıdır. Buna dair, değişik amaçlara göre düzenlenmiş örnekler, aşağıda verilmiştir. Bunlar konunun daha iyi anlaşılmasına olanak sağlayacaktır.

ÖRNEK . 1. $F(A,B,C) = A \wedge [(A \wedge \sim B \wedge C) \vee (\sim A \wedge B \wedge \sim C)]$

lojik fonksiyonu veriliyor. Bunun temsil ettiği lojik devreyi çizelim. Buna denk olan bir lojik devre bulalım. Bunu hem fonksiyon olarak hem de çizimle gösterelim.

$F(A,B,C)$ fonksiyonunun gösterdiği lojik devre Şekil 24 de görülmektedir.

Burada A,B,C anahtarları *bağımlı a-*
nahtarlar olup, devrede aynı zaman-

Şekil 24 - a

da değilleri de bulunduğu *zıt yönlü* anahtarlardır. Buna denk olan bir devre bulunması problemi değişik şekillerde düşünülerek çözümlenebilir. Biri aşağıda olduğu gibi, *denklik* kavramından yararlanmaktır.

$$\begin{aligned}
 F(A,B,C) &= A \wedge [(A \wedge \sim B \wedge C) \vee (\sim A \wedge B \wedge \sim C)] \\
 &= [A \wedge (A \wedge \sim B \wedge C)] \vee [A \wedge (\sim A \wedge B \wedge \sim C)] \\
 &= [A \wedge A \wedge \sim B \wedge C] \vee [A \wedge \sim A \wedge B \wedge \sim C] \\
 &= [A \wedge \sim B \wedge C] \vee [Y \wedge B \wedge \sim C] \\
 &= [A \wedge \sim B \wedge C] \vee Y \\
 &= A \wedge \sim B \wedge C
 \end{aligned}$$

bulunur ki bu iki fonksiyon aynı bir $F(A,B,C)$ fonksiyonunu gösterdiğine göre denk lojik fonksiyonlardır. Öyleyse bunların gösterdikleri lojik devreler denk devreler olacaklardır.

Bu devrelerin hesap yoluyla tanım tablolarını düzenleyelim :

$$F(A,B,C) = A \wedge [(A \wedge \sim B \wedge C) (\sim A \wedge B \wedge \sim C)] \rightarrow A \wedge \sim B \wedge C$$

$$F(1,1,1) = 1 \wedge [(1 \wedge 0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1 \wedge 0)] = 1 \wedge [0 \wedge 0] = 1 \wedge 0 = 0 \rightarrow 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0$$

$$F(1,1,0) = 1 \wedge [(1 \wedge 0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1 \wedge 1)] = 1 \wedge [0 \wedge 0] = 1 \wedge 0 = 0 \rightarrow 1 \wedge 0 \wedge 0 = 0$$

$$F(1,0,1) = 1 \wedge [(1 \wedge 1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0 \wedge 0)] = 1 \wedge [1 \wedge 0] = 1 \wedge 1 = 1 \rightarrow 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$$

$$F(1,0,0) = 1 \wedge [(1 \wedge 1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0 \wedge 1)] = 1 \wedge [0 \wedge 0] = 1 \wedge 0 = 0 \rightarrow 1 \wedge 1 \wedge 0 = 0$$

$$F(0,1,1) = 0 \wedge [(0 \wedge 0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1 \wedge 0)] = 0 \rightarrow 0 \wedge 0 \wedge 1 = 0$$

$$F(0,1,0) = 0 \wedge [(0 \wedge 0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1 \wedge 1)] = 0 \rightarrow 0 \wedge 0 \wedge 0 = 0$$

$$F(0,0,1) = 0 \wedge [(0 \wedge 1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0 \wedge 0)] = 0 \rightarrow 0 \wedge 1 \wedge 1 = 0$$

$$F(0,0,0) = 0 \wedge [(0 \wedge 1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0 \wedge 1)] = 0 \rightarrow 0 \wedge 1 \wedge 0 = 0$$

Burada her iki fonksiyonun yapılan değerlendirmelerinde, anahtarların her durumu için karşılıklı olarak aynı değerleri aldıkları apaçık görülmektedir. Bu de-

A	B	C	F(A,B,C)
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

ğerlendirme, düzenlenmiş olan ve yanda görülen tanım tablosu üzerinde de yapılabilirdi.

Bu tabloya bakarak, sadece 1 olan 3. satırdaki durum dikkate alınarak denk devre yazıldığında fonksiyonun aldığı yeni şekil bulunur ki bu da $A \wedge \sim B \wedge C$ bileşiminden ibaret olacaktır. Yukarıda buna ait değerlendirme de görülmektedir. Böylece farklı yapıda dahi olsalar, işlevleri aynı olan iki lojik devre görülmektedir. İkinci devreye ait çizim aşağıdadır.

$$F(A,B,C) = \begin{matrix} A & \sim B & C \\ o & \text{---} / & \text{---} / & \text{---} / & \text{---} o \end{matrix}$$

Şekil 24 - b

ÖRNEK. 2. $F(x,y,z) = [x' (y + z')']' + xz$ fonksiyonu veriliyor. Bundan hareket ederek lojik devreler ve de denk devreler elde ediniz ve bu lojik devreleri çiziniz.

Bu şekilde verilmiş olan bir fonksiyon *lojik fonksiyon* değildir. Bu tür devrelerin sadece VE - VEYA devresi oluşturacak şekilde düzenlenmiş olması gerekir. De Morgan formülü yardımıyla $(y + z')' = y'$. z yazılabileceğinden, $F(x,y,z)$ fonksiyonu,

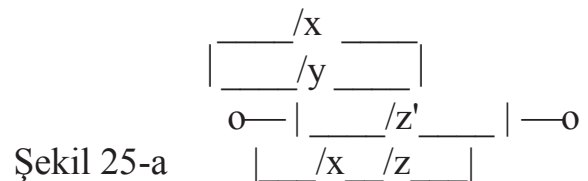
$$F(x,y,z) = [x' \cdot y' \cdot z]' + xz$$

şeklini alır. De Morgan bir kez daha uygulanarak $[x' \cdot y' \cdot z]' = x + y + z'$ yazılabileceğinden, bu düzenleme sonunda fonksiyon

$$F(x,y,z) = x + y + z' + xz$$

şeklini alır ki buna bir lojik fonksiyon olarak bakılabilir. Fonksiyonun bu türlü bir düzenlemesine gereksinmenin karşılığı, modern mantıkta, *tam indirgenmiş biçim* konusunda görülmektedir. Şimdi bu fonksiyon ile ilk verilen fonksiyon *denk fonksiyonlar* olup, ilk verilen fonksiyon yerine bu konularak işlemler sürdürülebilecektir.

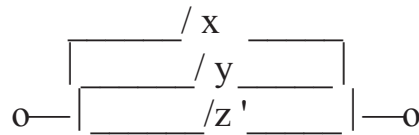
Fonksiyona ait lojik devre Şekil 25-a da görülmektedir.



Lojik fonksiyonların *Normal Formlarda* ya da *Tam Normal Formlarda* yazılması gereksinmesi, bunun teknolojik sürecinde *devre tasarımları (dizaynı)* aşaması da dikkate alındığında adeta bir zorunluluk haline gelmektedir. Çünkü hem fonksiyonların algılanması, hem bunlarla yapılacak işlerde *standart işlemlerin* tanımlanabilmesi, hem de makina diline (program tekniğine) uygun yapılaşmanın sağlanması bakımından bu düzenlere uygun ifadeler özellikle yeğlenmek tedir. İşte bu nedenle biz de çalışmalarımızda bu amaca uygun olması için, lojik fonksiyon düzenlemeleri denilince *tam indirgenmiş biçimde olan* ve önce- den tanımlanmış formlara uyan fonksiyon tipleri elde etmeye çalışacağız.

x	y	z	F(x,y,z)	Bu örneğimize yeni bir boyut kazandırmak istersek, buradaki açıklamalarımıza uygun bir düzende fonksiyonu ifade edebilmek için, tanım tablosunu düzenleyelim. Bu kez ara işlemler okuyucuya bırakılmıştır. Fonksiyon gerçekte yeni bir düzenlemeyle daha da basit ifade edilebilecektir. Nitekim,
1	1	1	1	$F(x,y,z) = x + y + z' + xz = x(1+z) + y + z' =$
1	1	0	1	
1	0	1	1	
1	0	0	1	
0	1	1	1	$= x \cdot 1 + y + z' = x + y + z'$
0	1	0	1	
0	0	1	0	
0	0	0	1	

olacaktır. Fonksiyonun bu sonucu, tanım tablosunda 7. satırdaki duruma da uygundur. Böylece Şekil 25-a da görülen lojik devre aşağıda olduğu gibi biraz daha basitleştirilerek, aynı görevi yapacak şekilde yeniden çizilmiştir (Şekil 25-b)



Şekil 25-b

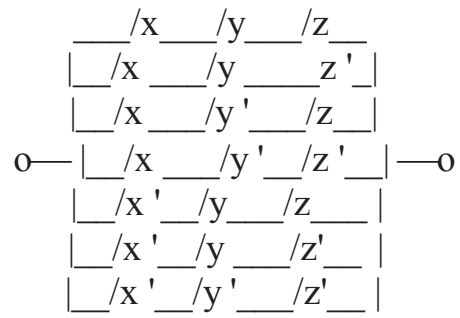
Şekil 25-a, Şekil 25-b ve Şekil 25-c deki lojik devreler *denk devreler'* dir.

Fonksiyonun bu ifadesi *tam birleştirici normal forma* uygundur. Formların bir birine dönüştürülmesi kavramından yararlanarak, aynı fonksiyon *tam ayırıcı normal formda* da ifade edilebilecektir. Bu şekliyle fonksiyon, tablodan yararlanarak kolayca yazılabilecektir ki,

$$F(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z'$$

olur.

Fonksiyonun bu şekline uyan lojik devre yanda görülmektedir. Şimdi Şekil 25-b ile Şekil 25-c karşılaştırılırsa, bu sonucunun çok daha karmaşık bir yapısı olduğu görülmektedir. İleride başlıbaşına bir konu halinde incelenecek olan *basit devreler (ekonomik devreler)* kavramı dikkate alındığında, $F(x,y,z)$ fonksiyonunu temsil eden en ekonomik devrenin



Şekil 25-c

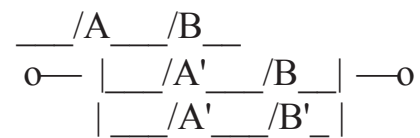
Şekil 25-b deki lojik devre olduğu söylenecektir. Doğal olarak, ekonomik devre yaklaşımı için, Şekil 25-b deki devrenin kullanılması yeğlenecektir.

6.10. EKONOMİK DEVRELER

Lojik devrelerin düzenlenmesinde hedef olarak gözetilen bir kavram da en *eko-nomik devre'* yi tasarlamak ve uygulamaya koymaktır. Ekonomik devre kavramı kendiliğinden *tasarrufu* ve dolayısıyla *minimum maliyet* düşüncesini öne çıkarmış olmaktadır. Eğer bir lojik devre, somut bir yapımda kullanılacak ise, bunun teknolojik sürecine geçildiğinde, bir *imalat süreci* söz konusu olacaktır ki bu bir maliyeti gerektirir. Bir lojik devre, *temel devre* içinde ve o da bütün bir sistem içinde yer aldığı anda, en ufak bir basitleştirmenin bile, maliyeti düşürücü yönde nasıl etkili olacağı kolayca anlaşılmaktadır. Bu yaklaşımla denilebilir ki, bir anahtarın bile daha eksik olduğu devre, daha ekonomik sayılacaktır. İşte bu şekilde düşünülerek, *denk devre* kavramından da yararlanmak suretiyle, aynı işi yapan ancak *en az eleman* içerecek şekilde dizayn edilmiş bir lojik devre, *ekonomik devre* olacaktır. Bir devrenin kullanıldığı ortamda, ne kadar az tel, araç, ara malzeme, işçilik ve enerji sarfı ya da kaybı az olursa, maliyetin o kadar çok azalacağı düşünülebilir. Böylece *ekonomik devre* kavramına ulaşılmış olur.

Ekonomik devre kavramı, kendiliğinden oluşan, ayrıca özel işlemleri gerektirmeyen bir uygulamadır. Çünkü lojik devreler incelenirken yer yer değinildiği gibi, lojik devrelerin sadeleştirilmesi işi esas konularımızdan birini oluşturmaktadır. Denk devre kavramı da pekiştigi göre, sadece amacı saptamış olmak, konunun bütünlüğü için yeterli olacaktır. Aşağıdaki örneği inceleyelim :

ÖRNEK . Yanda şekli görülen lojik devreye ait lojik fonksiyon yazınız. Bunu sadeleştirerek, bu devreye denk olan ve ekonomik olan bir devre çiziniz.



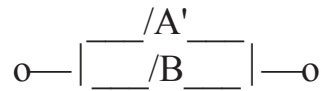
Şekil 26-a

Şekil 26-a da görülen lojik devreye ait lojik fonksiyon, *alt devreler* yardımıyla

$$F(A,B) = A B + A' B + A' B'$$

şeklinde ifade edilebilecektir. Burada, şekilden de görüldüğü gibi, $A B$, $A' B$, $A' B'$ seri bağlamaları, birer alt devredir. Bunlar birbirlerine paralel bağlanmış durumdadır. Aşağıdaki işlemler yardımıyla fonksiyon basitleştirilmiş olacaktır. Bu şekilde elde edilen yeni fonksiyon ilkiyle denk olup, daha az sayıda eleman dan oluştuğu için de ekonomik devre olmaktadır.

$$\begin{aligned} F(A,B) &= A B + A' B + A' B' \\ &= A B + A' (B + B') \\ &= A B + A' \cdot 1 \\ &= A B + A' \\ &= (A + A') (B + A') \\ &= 1 \cdot (B + A') \\ &= A' + B \end{aligned}$$



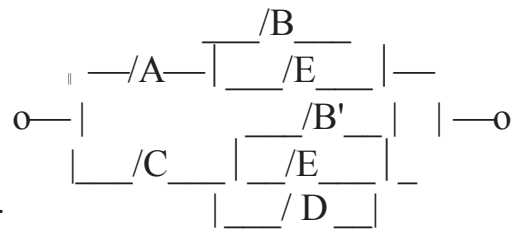
Şekil 26-b

bulunur. Böylece Şekil 26-a da görülen lojik devreye denk olan ve Şekil 26-b de çizilmiş bulunan denk ve ekonomik devre ortaya çıkmış olmaktadır. Buradaki işlemler sırasında Boole Cebirinde ortaya konmuş olan özelliklerin kullanıldığına dikkat edilmelidir.

6.11. KÖPRÜ DEVRELER

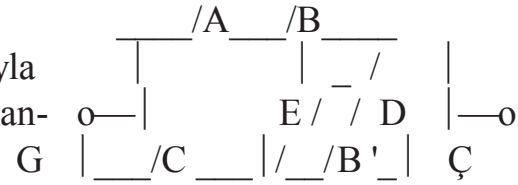
Lojik Devre tasarımı, belirli amaçlara uygunluğu sağlamak üzere, yapılan düzenlemelerden biri de *köprü devre* olarak adlandırılır. Bu düzenlemede esas, bir devre içinde aynı alt devrelerin bulunması halinde, uygun bağlamalarla bu alt devrelerin sayısını olabildiğince azaltmaya çalışmaktır. İşte bu amaçla, ara bağlamalar yardımıyla yeni bir devre çeşidi ortaya çıkar ki bu da köprü devre olarak adlandırılır. Bunu daha iyi açıklamak üzere, aşağıdaki iki örneği inceleyelim.

ÖRNEK. 1. Şekil 27-a ile verilen lojik devreyi inceleyelim. Buradaki D ve E anah-tarlarını biraz daha farklı yerleştirerek yeni bir devre tasarımı yapılabilir ki bu ilkiyle denk olan ancak *köprü devre* niteliğinde bulunan bir devre olarak görülmektedir. Bunun çizimi Şekil 27-b de görülmektedir. Şekil o-



Şekil 27-a

olarak gerçekleştirilen bu olgu, hesap yoluyla nasıl gerçekleştirilir ? Bu da aşağıda açıklanmıştır.



Şekil 27-b

Bir köprü devrenin lojik fonksiyonu yazılırken izlenen yol, yine alt devrelerden yararlanmaktadır. Bu alt devreler, G girişinden başlanarak Ç çıkışına gidilen yolların bir kez geçilmesi ve G ye doğru dönmemesi suretiyle izlenecek tüm yollar üzerindeki anahtarların, seri bağlı oldukları düşünülerek oluşturulur. Bu açıklamaya göre, Şekil 27-b de görülen *köprü devre'* nin içerdiği alt devreler şunlar olacaktır :

- 1) A B ; 2) A B D B' ; 3) A E B' ; 4) C E B ; 5) C D ; 6) C B' ; 7) A E D

olup bunlar arasında 2 no.da görülen alt devre çalışmayan bir devre olarak, bunlar arasından çıkarılacaktır. Çünkü,

$$A B D B' = A (B B') D = A (0) D = 0$$

olmaktadır. Diğer alt devreler için devre bütünüyle çalıştığından, bunların biri birlerine paralel bağlanmış oldukları düşünülecektir ki buna uyan işlem de toplamadır. Öyleyse bu lojik devreye uyan lojik fonksiyon

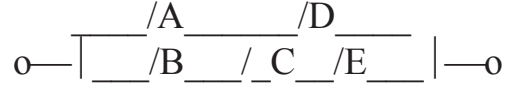
$$A B + A E B' + C E B + C D + C B' + A E D$$

şeklinde oluşacaktır. İşte bu fonksiyon, denklik kavramı içinde, hem Şekil 27-a daki devreyi hem de Şekil 27-b deki devreyi temsil etmiş olmaktadır. Bu fonksiyon Ayrıcı Normal Formda bir fonksiyondur.

Bu devreler ekonomiklik yönüyle irdelenirse, Şekil 27-a daki devrede 7 anahtar, Şekil 27-b deki devredeyse 6 anahtar olduğu görülmektedir. Kuramsal olarak Şekil 27-b deki devrenin daha ekonomik olduğu söylenecektir. Devrenin standart biçimi olarak elde edilen lojik fonksiyonda ise 15 anahtar bulunduğu için, bunun hiç de ekonomik olmadığı söylenebilecektir. Ancak karşıt bir kavram olarak, ekonomik olmaktan çok biçimsel olması istenilen durumlar da söz konusu olabilmektedir. İşte o zaman, bu düzenleme türü yeğlenecektir.

Köprü devre ile ilgili bu örnekte, Şekil 27-a daki lojik devreden Şekil 27-b deki lojik devreye nasıl geçildiğini okuyucu iyice incelemelidir.

ÖRNEK. 2. Burada örneklenen devre VE - VEYA devresi olmayan bir köprü devredir. Bu devreye denk olan bir VE - VEYA Devresi yazalım.



Şekil 28-a

Bu devrede tüm anahtarlar *bağımsız anahtar* olup, alt devreler,

- 1) A D ; 2) B E ; 3) A C E ; 4) B C D

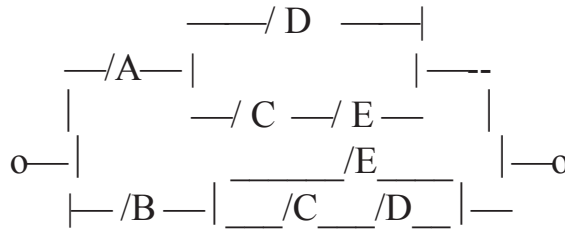
olarak belirlenmektedir. Öyleyse bunlar için lojik fonksiyon,

$$F = A D + B E + A C E + B C D$$

olur. Bu fonksiyonun Ayırıcı Normal Formdaki ifadesidir. Bu fonksiyon üzerinde çalışılarak, buna denk olan başka biçimsel düzenlemeler oluşturulabilir. F ile bir VE-VEYA devresi yazılmıştır. Bunun Birleştirici Normal Formdaki ifadesi de yine VE-VEYA devresi türünden olup, bu ise çok daha karmaşık bir fonksiyon olacaktır. Çünkü $2^n = 2^5 = 32$ durum vardır ve Tam Form uygulamasıyla düzenlenebilecektir. Şimdi aşağıdaki düzenlemeyi izleyelim. Hesap yoluyla, dağılma özelliğinden yararlanarak,

$$F = A (D + C E) + B (E + C D)$$

yazılabilecektir. Buna ait lojik devre ise Şekil 28-b de görülmektedir.



Şekil 28-b

Bu da bir VE-VEYA devresi olup ancak standart biçimlere uymamaktadır. Buradan, köprü devre kavramıyla bağlamalı olarak, Şekil 28-a daki yapıya nasıl geçildiği, alt devrelere bakılarak anlaşılacaktır. Özellikle paralel bağlı alt devrelerin aynı cins anahtardan oluştuklarına dikkat edilmelidir.

VE-VEYA devrelerinde, önceden de değinildiği gibi temel amaçlardan biri de *devrenin indirgenmiş biçimi'* nin elde edilmesidir. Öyleyse köprü devre kavramı bir de bu yaklaşıma uygun bir düzenlemeyi içerebilmelidir. Denk devreler yardımıyla, bir devre yerine, aynı zamanda ekonomik olan bir devre konduğu zaman bunu *indirgenmiş lojik devre* olarak kabul edeceğiz. Aşağıdaki örneği inceleyelim :

ÖRNEK .

$$o \text{---} /A \text{---} \left[\begin{array}{c} /A \text{---} / \sim B \text{---} /C \text{---} \\ \text{---} / \sim A \text{---} /B \text{---} / \sim C \text{---} \end{array} \right] \text{---} o \equiv o \text{---} /A \text{---} / \sim B \text{---} /C \text{---} o$$

Şekil 29

Burada denk iki lojik devre görülmektedir. Bu denkliğin nasıl oluştuğu aşağıda açıklanmıştır. Denkliğin solundaki devrede alt-devreler yazılırsa :

$$1) A ; 2) A \wedge \sim B \wedge C ; 3) \sim A \wedge B \wedge \sim C$$

oldukları saptanacaktır. 2) ve 3) de alt-devreler A ile seri bağlandıklarında, ikincisinde sorun çıkacaktır. Zira bu, çalışmayan bir alt-devredir. Buna göre,

$$\begin{aligned} A \wedge [A \wedge \sim B \wedge C] &= [A \wedge A] \wedge \sim B \wedge C = A \wedge \sim B \wedge C , \\ A \wedge [\sim A \wedge B \wedge \sim C] &= [A \wedge \sim A] \wedge B \wedge \sim C = Y \wedge B \wedge \sim C = Y \end{aligned}$$

olacaktır. Bunların birbirleriyle paralel bağıllığı söz konusu olur ki bu da,

$$(A \wedge \sim B \wedge C) \vee (Y) = A \wedge \sim B \wedge C$$

lojik fonksiyonunu verir. Bunun lojik devre çizimi ise, Şekil 29 da denkliğin sağında görülmektedir. Bu sonuç hem lojik devrenin indirgenmiş olması hem de ekonomik olması yönlerinden değerlendirilebilecektir.

6.12. LOJİK DEVRE PROBLEMLERİ

Aşağıda özel anlamda düzenlenmiş bazı *lojik devre* problemleri görülmekte ve çözümleri üzerinde tartışılmaktadır.

PROBLEM. 1. Bir şirketin hissedarları üç kişidir. Bunların şirkete katkıları oranında değişik oy hakları vardır. Bunlardan birinin 5, bir diğeri 3 ve

geriye kalanının ise 2 oy hakkı bulunmaktadır. Şirketin yönetiminde bu üç kişi yetkili ve sorumlu olup, şirketle ilgili kararlar oyçokluğuyla alınmaktadır. Oyların eşit olması halinde, başkanın oy verdiği taraf kazanmış sayılmaktadır. Başkan 5 oyu olan hissedardır. Hissedarlar oylarını bir düğmeye basarak belirtmektedirler. Çekimsiz oy kullanmak yoktur. Oylanacak öneriyi benimseyenler düğmeye basarak oyunun olumlu olduğunu belirtecek, olumsuz oy veren düğmeye basmayacaktır. *Öyle bir lojik devre kurunuz ki yukarıda tanımlanan olaya ilişkin oylama sonucunu bir biçimde belirtmiş olsun ?* Bundan hareketle daha ekonomik olan denk devreyi de bulunuz. Bu devreleri çiziniz.

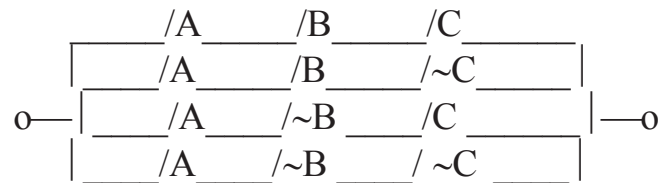
Çözüm : Hissedarların adları A , B , C olsun. A nın 5 hissesi, B nin 3 hissesi ve C nin de 2 hissesi olduğuna göre, şirket $A + B + C = 5 + 3 + 2 = 10$ hisse üzerinden karar oluşturuyor demektir. Bu verilere göre doğruluk değer tablosu aşağıda olduğu gibi gerçekleşir : [1 = geçerli karar ; 0 = geçersiz karar]

A (5)	B (3)	C (2)	Oy Toplamı	Karar	Temel Bileşenler
1	1	1	10	1	$A \wedge B \wedge C$
1	1	0	8	1	$A \wedge B \wedge \sim C$
1	0	1	7	1	$A \wedge \sim B \wedge C$
1	0	0	5	1	$A \wedge \sim B \wedge \sim C$
0	1	1	5	0	---
0	1	0	3	0	---
0	0	1	2	0	---
0	0	0	0	0	---

Tablodan hareketle, temel bileşenler esas alınarak, bunların $\vee$ lı bileşimi oluşturulursa, problemin öngördüğü lojik devre ortaya çıkmış olacaktır. Bu ise,

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \sim C) \vee (A \wedge \sim B \wedge C) \vee (A \wedge \sim B \wedge \sim C)$$

şeklinde bir standart biçim oluşturacaktır. Buna uyan lojik devre aşağıda çizilmiştir. Demek ki şirketin oylama işleri bu lojik devre ile yürütülecektir.



Şekil 30 -a

Bu lojik devredeki her alt devre, tablodaki 1 değerinde olan bir değerlendirme-yi temsil etmektedir. Öyleyse, geçerli olan herhangi oylama biçimi için bu devre çalışan bir devredir.

Şimdi de problemin ikinci kısmı ile ilgili olarak, buna denk olan ve sonuçta ekonomik olan bir lojik devre araştıralım.

$$\begin{aligned}
 & (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \sim C) \vee (A \wedge \sim B \wedge C) \vee (A \wedge \sim B \wedge \sim C) = \\
 & [(A \wedge B) \wedge (C \vee \sim C)] \vee [(A \wedge \sim B) \wedge (C \vee \sim C)] = \\
 & [(A \wedge B) \wedge 1] \vee [(A \wedge \sim B) \wedge 1] = \quad \text{o} \text{---}/A \text{---}/B \text{---o} \\
 & (A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B) = \\
 & A \wedge B = 1
 \end{aligned}$$

Şekil 30-b

olacaktır. Bu Şekil 30-a daki lojik devreye denk olan hem de en ekonomik olan ve de olayımıza çözüm getiren devre olmaktadır. A ve B anahtarlarının seri bağlanmasından ibaret olan bu devreye ait çizim Şekil 30-b de görülmektedir.

PROBLEM.2. Bir yönetim kurulu dört kişiden oluşmaktadır. Kurul kararlarını oyçokluğuyla alabilmektedir. Her üyenin oyu eşit olup, karar aşamasında gizli oy kullanılmaktadır. Eşitlik halinde dahi başkanın oyu çifttir ve çekimser oy kullanılamamaktadır. Bu verilere göre *öyle bir lojik devre tasarlayınız ki kurul kararının çokluk olması halinde kararı bildirsin*. Bunun için örneğin bir zil çalsın ya da bir lamba yansın. Bu belirlendikten sonra, lojik devreyi çiziniz. Ay-rica, buna denk olan ve daha ekonomik olan devreyi de bularak, çiziniz.

Çözüm : Yönetim kurulu üyeleri A , B , C , D olsun. Herbirinin 1 oyu vardır. Bir oylama sonucunun bütün olası halleri aşağıdaki tabloda görülmektedir. Bu tablo düzenlenirken orada, kararın kabulünü belirten durumlar 1 ile, reddini belirten durumlar ise 0 ile gösterilmiştir.

Yan sayfada görülen tablo iyi analiz edilirse, *Temel Bileşenler* sütunundaki ifadelerin VEYA' lı bileşimi istediğimiz lojik devreyi verecektir. Buna göre,

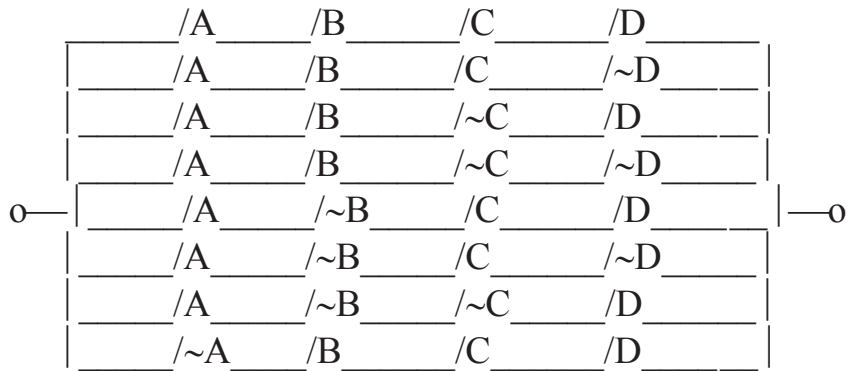
$$\begin{aligned}
 & (A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \sim D) \vee (A \wedge B \wedge \sim C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \sim C \wedge \sim D) \vee \\
 & (A \wedge \sim B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge \sim B \wedge C \wedge \sim D) \vee (A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D) \vee (\sim A \wedge B \wedge C \wedge D)
 \end{aligned}$$

olur. Bu devreye ait çizim de yandaki sayfada görülmektedir,(Şekil 31-a). Bir VE-VEYA devresi olarak elde edilen bu lojik yapı, aşağıdaki işlemler yardı-

mıyla, olabildiğince sadeleştirilmiş olacaktır. Böylece daha ekonomik olan bir denk lojik devre elde edilecektir. Bu lojik devre de yine problemin devamında çizilmiştir. (Şekil 31-b)

				Kararın		
A	B	C	D	Karar Sayısı	Kabulü-Reddi	Temel Bileşenler
1	1	1	1	4	1	$A \wedge B \wedge C \wedge D$
1	1	1	0	3	1	$A \wedge B \wedge C \wedge \sim D$
1	1	0	1	3	1	$A \wedge B \wedge \sim C \wedge D$
1	1	0	0	2 ⁺	1	$A \wedge B \wedge \sim C \wedge \sim D$
1	0	1	1	3	1	$A \wedge \sim B \wedge C \wedge D$
1	0	1	0	2 ⁺	1	$A \wedge \sim B \wedge C \wedge \sim D$
1	0	0	1	2 ⁺	1	$A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D$
1	0	0	0	1	0	---
0	1	1	1	3	1	$\sim A \wedge B \wedge C \wedge D$
0	1	1	0	2 ⁻	0	---
0	1	0	1	2 ⁻	0	---
0	1	0	0	1	0	---
0	0	1	1	2 ⁻	0	---
0	0	1	0	1	0	---
0	0	0	1	1	0	---
0	0	0	0	0	0	---

Uyarı : 2⁺ ile başkanın oyu bulunan eşitlik hali ; 2⁻ ile başkanın oyunun bulunmadığı eşitlik hali gösterilmiştir.



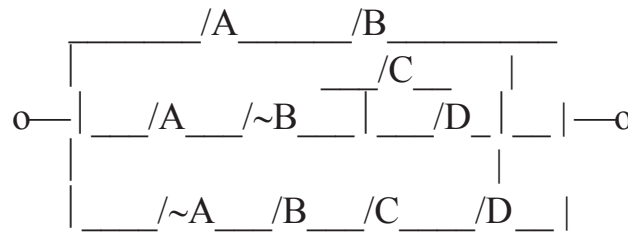
Şekil 31-a

Sadeleştirme işlemleri şu şekilde gerçekleşecektir :

$$(A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \sim D) \vee (A \wedge B \wedge \sim C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \sim C \wedge \sim D) \vee (A \wedge \sim B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge \sim B \wedge C \wedge \sim D) \vee (A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D) \vee (\sim A \wedge B \wedge C \wedge D) =$$

$$\begin{aligned}
& [(A \wedge B \wedge C) \wedge (D \vee \sim D)] \vee \{(A \wedge B) \wedge [(\sim C \wedge D) \vee (\sim C \wedge \sim D)]\} \vee \\
& [(A \wedge \sim B \wedge C) \wedge (D \vee \sim D)] \vee [A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D] \vee [\sim A \wedge B \wedge C \wedge D] = \\
& [(A \wedge B \wedge C) \wedge 1] \vee \{(A \wedge B) \wedge [\sim C \wedge (D \vee \sim D)]\} \vee [(A \wedge \sim B \wedge C) \wedge 1] \vee \\
& [A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D] \vee [\sim A \wedge B \wedge C \wedge D] = \\
& [A \wedge B \wedge C] \vee [(A \wedge B) \wedge (\sim C \wedge 1)] \vee [A \wedge \sim B \wedge C] \vee [A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D] \vee [\sim A \wedge B \wedge C \wedge D] = \\
& [A \wedge B \wedge C] \vee [A \wedge B \wedge \sim C] \vee \{(A \wedge \sim B) \wedge [(C \vee \sim C) \wedge (C \vee D)]\} \vee [\sim A \wedge B \wedge C \wedge D] = \\
& [(A \wedge B) \wedge (C \vee \sim C)] \vee \{(A \wedge \sim B) \wedge [1 \wedge (C \vee D)]\} \vee [\sim A \wedge B \wedge C \wedge D] = \\
& [(A \wedge B) \wedge 1] \vee [A \wedge \sim B \wedge (C \vee D)] \vee [\sim A \wedge B \wedge C \wedge D] = \\
& (A \wedge B) \vee [A \wedge \sim B \wedge (C \vee D)] \vee [\sim A \wedge B \wedge C \wedge D] = 1
\end{aligned}$$

bulunacaktır. Burada bazı işlemler yapılarak buna denk olan başka devre fonksiyonları bulunabilirse de, daha ekonomik olan bir başkası galiba bulunamayacaktır. Bu son duruma uyan lojik devrenin çizimi ise Şekil 31-b de görülmektedir.



Şekil 31-b

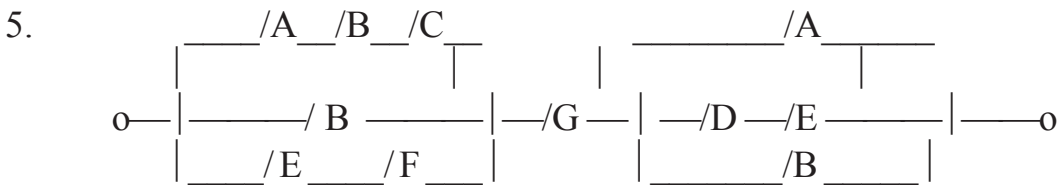
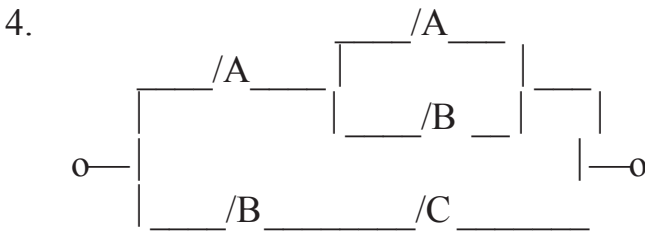
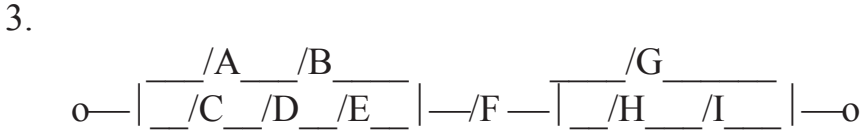
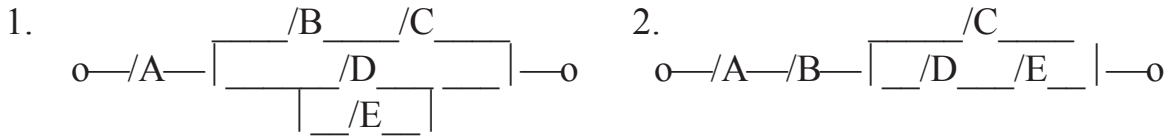
Bu devrede, yukarıdaki tabloda gerçekleşen 8 durumun herbirine uyan çözüm bulunmaktadır. Burada sadece 8. durum ayrı bir alt devre olarak görülmektedir. Diğer durumlar üstteki alt devreler içinde çözümlenmektedir.

6.13. ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

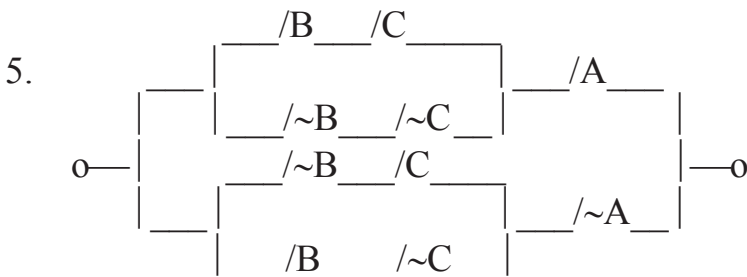
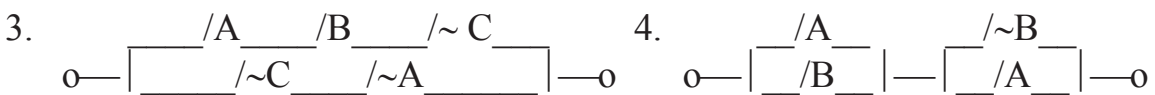
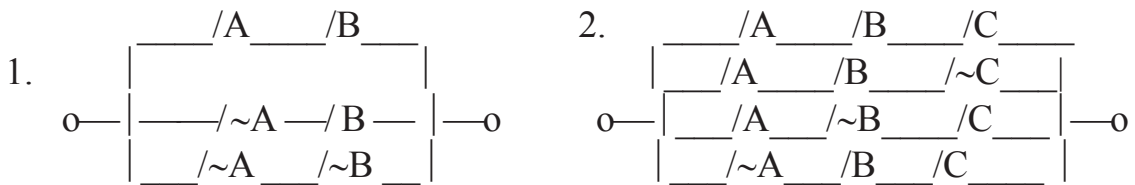
Aşağıda verilmiş olan lojik fonksiyonlara uyan lojik devreleri çiziniz :

1. $A \wedge [(B \wedge C) \vee D] \wedge E$
2. $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (E \vee F)$
3. $(A \wedge B \wedge C) (A \wedge D \wedge E) F$
4. $\{A \wedge [B \vee (C \wedge D) \vee E]\} \vee F$
5. $A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge [E \vee F]$
6. $\{A \vee [B \wedge (C \vee D)]\} \wedge (E \vee F)$

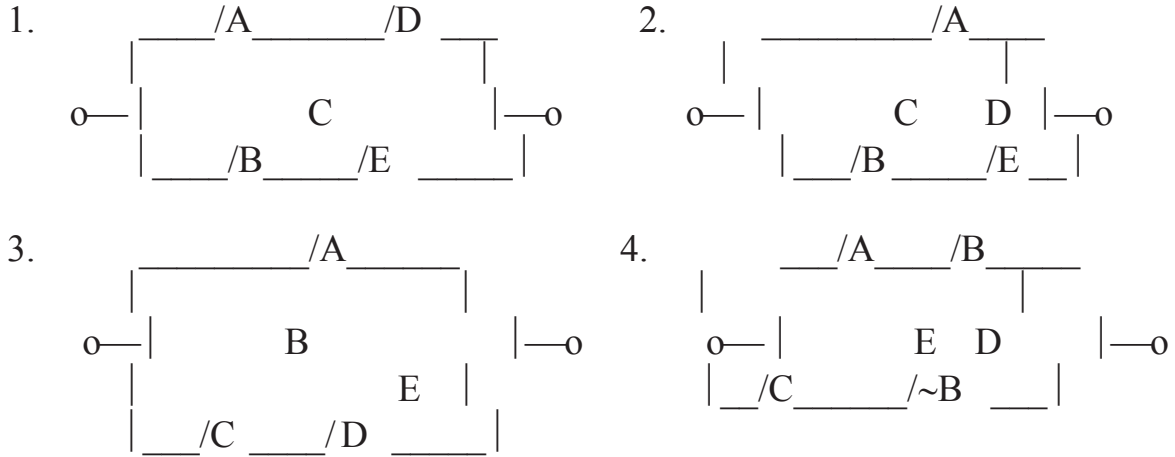
Aşağıda verilmiş olan lojik devrelere ait lojik fonksiyonları yazınız :



Aşağıdaki lojik devrelere ait lojik fonksiyonları yazdıktan sonra, hesap yoluyla bu devrelere denk olan başka devreler bularak çiziniz. En ekonomik devreyi bulunuz ve çiziniz :



Aşağıdaki köprü devrelere denk olan VE - VEYA devrelerini bulunuz. Bunları değişik biçimlerde düzenleyerek, her birine ait lojik devreyi çiziniz.



Aşağıdaki problemlere uyan lojik devreleri çizerek , lojik devre analizi yapınız :

1. Bir elektrik devresini belirleyen lojik fonksiyonun *totoloji* olması halinde devreden akım geçmesi koşulunu araştırınız.

2. Bir elektrik devresini belirleyen lojik fonksiyonun *çelişme* olması halinde devreden akım geçmesi koşulunu araştırınız.

3. Beş arkadaş aralarında tartıştıkları bir konuda karar vermek üzere oylama yapmak için anlaşılır. Ancak hiç biri diğerinin verdiği oyu bir biçimde bilmeyecektir. Yani bir tür gizli oylama yapılacaktır. Bunun bir lojik devre ile sağlanmasını düşünürler. Herbirinin oyları eşittir ve özel bir ayrıcalık yoktur. Ayrıca çekimser oy kullanılmayacaktır. Öneriye olumlu oy vermek isteyen devredeki kendine ait düğmeye basacak, oy vermek istemeyen kendi düğmesine basmayacaktır. Böylece yapılacak oylama sonunda kazanan öneri bir araç yardımıyla belirtilmiş olacaktır. Örneğin öneri yeterli oy almışsa bir zil çalacak, aksi halde bu zil çalmayacaktır. Öyle bir lojik devre dizaynı yapınız ki yukarıdaki oylama işlemini sağlasın. Lojik fonksiyonu bulduktan sonra, hesap yoluyla ekonomik olan bir devre bulunuz ve çiziniz.

4. Biri 2, biri 3 ve biri de 4 oy hakkına sahip üç kişiden oluşan bir kurul, karar- larını 2/3 oranına göre almaktadır. Öyle bir lojik devre kurunuz ki herhangi bir önerinin kabul edilip edilmediği anlaşılsın. Buradaki oylamanın ayrıntıları da bir önceki problemdekilerle aynıdır. Daha sonra ekonomik bir devre bulmaya çalışınız.

5. Bir şirket A, B, C gibi üç cins malı pazarlamaktadır. Her günün sonunda kâr ya da zarar durumu, özel bir kablo çekilmiş bir yerdeki yöneticiye bildirilmektedir. Kâr etme durumu yöneticinin önünde bulunan bir lambanın yanmasıyla anlaşılmaktadır. Zarar durumunda bu lamba yanmamaktadır. Kâr ise günlük olarak, A malından en az % 25 , B malından en az % 40 ve C malından da en az % 35 satıldığı (işlem gördüğü) zaman gerçekleşmektedir. Devrede her malın adıyla işaretlenmiş bir düğme bulunmaktadır. Görevlilerin bu düğmelerden uygun birine ya da birilerine basarak sonucu iletebilmeleri için bir lojik devreye gereksinme vardır. İşte bu lojik devreyi siz düzenleyiniz ve devre analizi sonrasında bakalım aynı görevi yapabilecek daha ekonomik bir lojik devre bula-bilecek misiniz ?

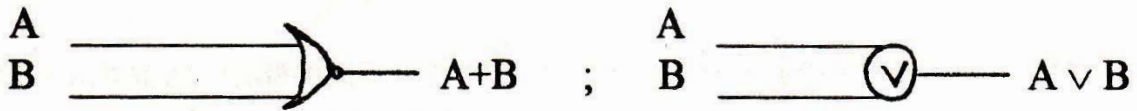
BÖLÜM 7

KOMÜTASYON CEBİRİ

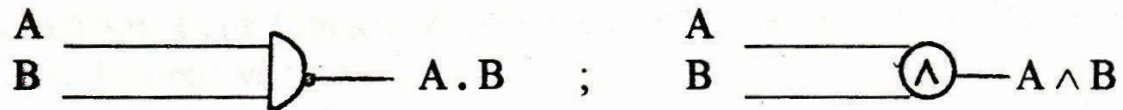
7.1. TANIM VE TEMEL KAVRAMLAR

Komütasyon Cebiri özel bir Boole Cebiri olup, seri-paralel anahtar devrelerinin uygulamada ve daha çok mühendislik alanlarında kullanılmasıyla ortaya çıkmış lojik yorumlardır.

Komütasyon cebirinde *veya (bileşim)* işlemine mühendislik dilinde *lojik toplam* denir ve bu işlemi sağlayan elektronik devre ögelerine *veya kapıları* adı verilir. A ve B anahtarlarının oluşturduğu bir ikilide lojik toplam yine alışılmış sembollerle $A + B$ yazılarak gösterilir. Bu işlemi temsil etmek üzere, çizim aşamasında değişik gösterim biçimleri bulunmaktadır. Bu seçenekler aşağıda görülmektedir .

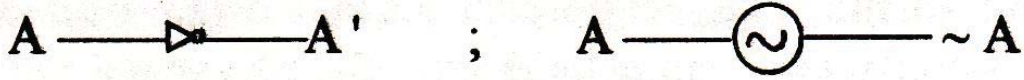


Komütasyon cebirinde *ve (kesişim)* işlemine mühendislik dilinde *lojik çarpım* denir ve bu işlemi sağlayan elektronik devre ögelerine *ve kapıları* adı verilir. A ve B anahtarlarının oluşturduğu bir ikilide lojik çarpım yine alışılmış sembollerle $A.B$ ya da AB yazılarak gösterilir. Bu işlemi temsil etmek üzere, çizim aşamasında değişik gösterim biçimleri bulunmaktadır. Bu seçenekler aşağıda görülmektedir .

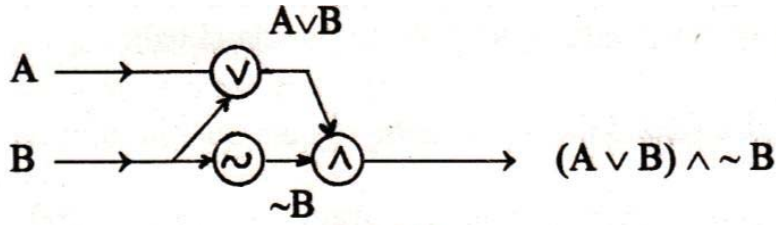


Komütasyon cebirinde *tümleme (değilleme)* işlemi birli bir işlemdir ve tümleme işlemi yapan devre ögesi, *tümleme bağlacı* olur. Bunun da sembolle gösterilişinde alışılmış notasyonlar kullanılmaktadır. Bunlar Boole cebirinde işaret edilen sembollerden biri olabilir. Bunların ikisinin, çizimle gösterim kavramı içinde kullanılış biçimleri görülmektedir.

Bir lojik anahtar A ise bunun tümleyeni ya da bütünleyeni bir lojik devrede aşağıdaki seçeneklere göre çizimle ifade edilirler.



Bu tür çizimlerin çok daha karmaşık şekillerine ileride rastlanılacaktır. Bu çizimlerin bu karmaşıklığında yani çizgi bolluğu sırasında, lojik fonksiyonun işlevinin kolay anlaşılması ya da diğer bir deyişle lojik anahtarların birleşimlerinden ortaya çıkan kombinasyonların kolay kavranabilmesi için, izlenen hatlar üzerinde çoğu kez *oklu gösterimler* de kullanılabilir. Örneğin, içerikten yoksun olarak, böyle bir lojik devre aşağıda görülmektedir



Şekil 32

Tanım : $\sim$ bir birli işlem olmak üzere, $B_2 = \{0,1\}$ kümesi üzerinde tanımlanmış iki ögeli bir Boole cebirine *Komütasyon Cebiri* denir.

$$\langle \{0,1\}, +, \cdot, \sim, 0, 1 \rangle$$

olur. Bu cebirde de kullanılan *lojik değişkenler* ancak ve ancak 0 ve 1 değerli olup, tamamen Boole cebiri aksiyomlarına uyar ve her değişkenin bir ve yalnız bir tümleyeni vardır. Bu sistemde 0 in tümleyeni 1 , 1 in tümleyeni de 0 dır.

Komütasyon cebiri, Boole cebiri ile tam bir uyum içinde ve birebir eşleşmelerle sürdürülen bir uygulama alanı olduğundan, konumuz için çok önemlidir. Bu çalışmalar sırasında Boole cebirinden ortaya çıkan matematiksel yapının nasıl kullanıldığı ve yorumlandığı görülerek, amaca uygunluğu açısından yapılan çalışmanın ne denli önemli olduğu bir kez de bu yolla vurgulanmış olmaktadır. Bir de hep soyut olduğu düşünülen matematiğin, uygun konularda nasıl yoğunlaştırılarak uygulamada kullanılabilir hale getirilişinin en güzel örneklerini vermesi bakımından, bu çalışma ilginç yaklaşımlar içermektedir.

7. 2. KOMÜTASYON DEĞİŞKENLERİ

Komütasyon devrelerinde *elektriksel büyüklükler*' in (akım , gerilim gibi...) var olup olmadığı ya da bu büyüklüklerin iki ayrı düzeyden hangisine yaklaşık olduğu önemli bilgilerdir. Bunlara *komütasyon (lojik) büyüklükler* denir ve değerleri bilindiğinde, bunlara simgesel olarak 0 ya da 1 değeri iliştilir. Eğer de-

gerleri bilinmiyorsa, büyüklüklere bu kez *komütasyon değişkeni* ya da *lojik değişken* denir ve bir harfle temsil edilir. Bu harfler genellikle $x, y, z, \dots$ gibi alfabadeki son harfler olur. Bunların aldığı değeri göstermek üzere de $\emptyset$ sembolü kullanılır ki bunun anlamı, eğer değişkenin alacağı değer belli olursa, bunun ye-rine 0 ya da 1 konulacağını simgelemesidir. Bu notasyona daha çok tablolarda rastlanılmış olacaktır. İşte bu notasyonla, değişkenin alacağı değerler böylece, simgesel olarak ifade edilmiş olmaktadır.

x, y, z lojik değişkenler ise : $x, y, z \in \{0,1\}$ önermesi geçerlidir.

Uygulamada ve özellikle elektriksel devrelerde, komütasyon cebirine ait değişkenler yani lojik değişkenler ; anahtarlara, rölelere, kontaklara, diyotlu bağlaçların giriş ve çıkış uçlarına yerleştirilmiş olarak görülmektedir.

7.3. HAMMING UZAKLIĞI

n bileşenli bir $\underline{x}$ vektörü gözönüne alınmış olsun : $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$x_i \in B_2 \Rightarrow \underline{x} \in B_2^n$$

olur. $\underline{x}^0 \in B_2^n$ de bir nokta ya da bir kombinezon olsun. O halde B_2^n nin iki noktası $\underline{x}^0$ ve $\underline{x}^1$ arasında uzaklık, noktaların farklı bileşenlerinin sayısı olarak tanımlanır ve buna *Hamming Uzaklığı* denir. Bu , $d = d(\underline{x}^0, \underline{x}^1)$ ile gösterilir.

ÖRNEK . $\underline{x}^0 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)$ ve $\underline{x}^1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$ olmak üzere,

$$d = d(\underline{x}^0, \underline{x}^1) = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1, 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1) = 2$$

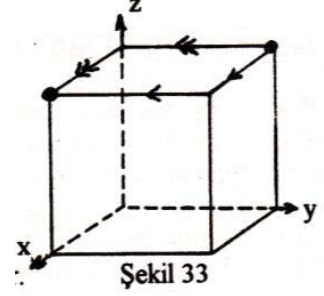
bulunur. Hamming uzaklığı gerçekte, $B_2^n \cdot B_2^n \rightarrow \{0,1,\dots,n\}$; $0,1,\dots,n \in \mathbb{R}^+$ şeklinde

$$[B_2^n]^2$$

den reel sayılara bir uygulama olur. Bunun tipik örnekleri daha önce lojik fonksiyonların grafikte gösterilmesi sırasında betimlenmiştir. Bu amaçla, $[B_2]^1$ uzayında noktanın betimlenişi için Şekil 1 i ; $[B_2]^2$ uzayında noktanın betimlenişi için Şekil 2 yi ve $[B_2]^3$ uzayında noktanın betimlenişi için de Şekil 3 ü yeniden inceleyiniz. *

* Bkz. : Sayfa 152

ÖRNEK . $[B_2]^3$ uzayında 011 ve 101 noktalarının arasındaki uzaklık, yani Hamming uzaklığı $d = 2$ dir. Niçin ? Buna dair açıklamanın analitik yorumu Şekil 33 de görülmektedir. Burada, • ile işaretlenmiş noktalardan birinden diğerine varabilmek için, en kısa yoldan , ne türlü gidilirse gidilsin, 2 kenar çizgisi geçilmiş olacaktır ki bu $d = 2$ ile belirlenen Hamming uzaklığının grafik gösterilişteki yorumudur.



Şekilde, 011 den 101 e gidebilmek için, en kısa iki yolun $(011) \rightarrow (001) \rightarrow (101)$ ya da $(011) \rightarrow (111) \rightarrow (101)$ oldukları görülmektedir. Burada $\rightarrow$ ile analitik gösterimdeki kübün kenarları temsil edilmiş olmaktadır. Öyleyse bununla bir algoritma oluşturulursa, denilebilir ki $\rightarrow$ ların sayısı aynı zamanda Hamming uzaklığını verecektir. Örneğimizde $d = 2$ olduğu anımsanırsa, burada da okların sayısının iki tane olduğu görülmektedir. Bununla ilgili algoritma şöyle oluşturulabilir :

Hamming Uzaklığının Hesaplanması İçin Bir Algoritma :

- 1) Verilen iki noktanın aynı konumdaki farklı olan ve olmayan elemanları belirlenir. Aynı olan elemanlar için bir işlem yapılmaz.
- 2) İlk farklı elemandan başlanarak 1 ise yerine 0 , 0 ise yerine 1 konur.
- 3) Bu işlem, ilkenden bir $\rightarrow$ ile ilerletilerek yazılır.
- 4) İkinci farklı eleman için aynı işlem yapılır. Yeni düzen yeni bir $\rightarrow$ ile yönlendirilir.
- 5) Bütün farklı elemanlar için bu iş tamamlanınca, ulaşılması istenilen Noktaya varılmış olacaktır.
- 6) Kullanılmış oklar sayılır. İşte bu iki nokta arasındaki Hamming uzaklığı, okların sayısı kadar olacaktır.

ÖRNEK . 11001 ile 10000 arasındaki Hamming uzaklığını belirleyelim :

$$11001 \rightarrow 10001 \rightarrow 10000 \Rightarrow d = 2 \text{ dir. (Ok sayısı 2 dir)}$$

ÖRNEK . 111100 ile 101010 arasındaki Hamming uzaklığını belirleyelim :

$$111100 \rightarrow 101100 \rightarrow 101000 \rightarrow 101010 \Rightarrow d = 3 \text{ olur. (Ok sayısı 3 tür.)}$$

Not : Her iki örnekte de, değişmiş elemanlar daha koyu yazılarak belirtilmiş olmaktadır.

7. 4. CEBİRSEL İFADELERİN STANDART ŞEKİLLERİ

Boole fonksiyonları işlenirken, rastgele verilmiş bir fonksiyon yerine daha belirli *standardı* bulunan biçimsel düzenlemelerin önem kazandığından söz edilmiş olduğu anımsanmalıdır. Bunlar sıralı olarak,

- a) Tam Ayırıcı Normal Formda Fonksiyon (dnf)
- b) Tam Birleştirici Normal Formda Fonksiyon (cnf)

olarak adlandırılmış ve şifrelendirilmiştir. Bu açıklamalar sırasında tanım basite indirgenerek, ilk form için *çarpımların toplamı* sloganı oluşmuş ve işlem olarak sembollerle $[\sum (\prod)]$ şeklinde ifade edilmiştir. Buna *I . Kanonik Şekil* denildiği de belirtilmiştir. Tamamen benzer şekilde, ikinci form için *toplamların çarpımı* sloganı oluşmuş ; işlem olarak sembollerle $[\prod (\sum)]$ olduğu yazılmıştır. Buna da *II . Kanonik Şekil* denildiği yine belirtilmiştir.

Bu formların kavram olarak ve uygulama bakımından *Komütasyon Cebiri* için de önemi vardır ve bu formlar yardımıyla *cebirsal ifadelerin standart biçimleri* oluşmaktadır. Boole cebirinde olduğu gibi komütasyon cebirinde de bu iki form kullanılır ve bunlara

- a) Minimum terimler kanonik şekli (Min. terimler)
- b) Maksimum terimler kanonik şekli (Max. terimler)

denir ki bu formlar yukarıda açıkladığımız sıra itibariyle tamamen aynıdırlar.

Bu tür fonksiyonların Komütasyon cebirinde önceden kullanılan notasyonlara göre daha farklı yazış biçimleri de vardır. Bunların bazıları aşağıda açıklanmıştır. Bu yazış biçimlerinden hareket ederek, bu formlara göre ifade edilmiş iki lojik fonksiyon karşılaştırılabilir ve hatta biri diğerine dönüştürülebilir. Ayrıca lojik yapıları aynı olan iki fonksiyon *eşit'* tirler. Bunun en güzel anlatımı, ya fonk siyonların tanım tablolarının aynı olduğunu görmek ya da bir bakıma bununla eş anlamlı olan aşağıdaki ifade biçimine göre eş fonksiyonlar oluşmasıdır.

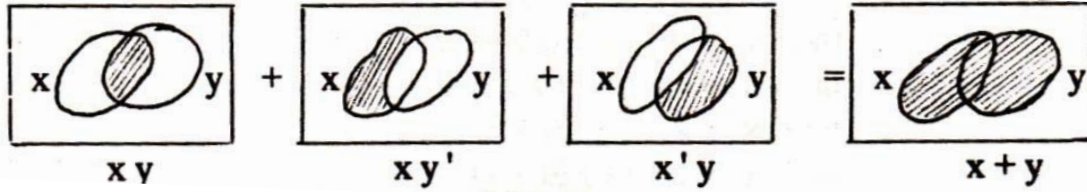
$x, y \in \beta$ olmak üzere, $x + y$ toplamı için Venn çizimi oluşturulurken , dört bağımsız (ayrık) bölgeden yararlanılmıştır. Hatta buna benzer bir toplam, bir uygulama örneği olarak verilmiştir. * İşte burada, bu ayrık bölgelere *minimum*

* Bkz. : Sayfa 159 ve Şekil 14

alanlar denildiği de anımsanmalıdır. Bu şekilde oluşan kavramdan yararlanarak denilebilir ki böyle bir toplam ; ayrık yani minimum alanlar toplamını temsil ettiğine göre

$$x + y = x y + x y' + x' y$$

dir. Bu toplamın Venn çizimi ile açıklanması, aşağıda Şekil 34 de görülmektedir.



Şekil 34

(Min. terimler kanonik şeklini açıklayan Venn çizimi)

$x + y$ toplamının min. terimler cinsinden toplamı, Venn çiziminden de apaçık görüldüğü gibi, xy , xy' , $x'y$ minimum alanlarının toplamından oluşmuştur. Şimdi, çarpma için *birim eleman* 'ın 1 olduğu da anımsanarak, buradaki min. terimlerde, elemanın (x, y) yerlerine 1, bunların komplementleri (x', y') yerlerine de 0 konursa, bunlardan en az biri 1 değerini alacaktır. Burada bileşenler, *iki'li sisteme (binary sistem)* göre sırasıyla ; 11, 10, 01 sayılarını oluştururlar. Bu sayıların *on'luk sistem'e* göre karşılıkları sırasıyla 3, 2, 1 dir. İşte bu sırayı 1, 2, 3 olarak görebilmek için, ikilik düzendeki sayıları da 01, 10, 11 olarak sıralamak gerekir. İşte bu sıralama işine uyum göstermesi bakı-mından, komütasyon cebiri ile ilgili işlemlerde, Boole cebiri sırasındaki bazı uygulamalarımızı ters sırada düzenlememiz gerekebilecektir. Örneğin, bir tablo düzenlenmesi sırasında satırlar numaralanırken, bütün elemanların 0 değerini aldığı satır 0 sıra numarası ile gösterilecektir. Böylece, örneğin, $n = 3$ için oluşan 8 durum sıra no.larıyla gösterilirken, bu numaralar 0,1,2,3,4,5,6,7 olarak görülecektir.

Ne gibi notasyonlar kullanılmaktadır ? Şimdi bunları görelim :

1) Tablodaki sıra numarası belirtilmek suretiyle bir *lojik toplam* yazmak :

$\Sigma 1,2,3$ gibi ...

2) Min.terimlerin karşılıklarının, yukarıdaki kurala göre, 1 ve 0 cinsinden değerlendirilmesi suretiyle bir *lojik toplam* yazmak :

$\Sigma 01, 10, 11$ gibi ...

3) İki'lik sistemdeki değerlerin on'luk sistemdeki karşılıkları gözetilerek, bu değerler 1 için m_1 , 2 için m_2 ve 3 için m_3 yazılmak suretiyle bunların toplamını temsil etmek : $m_1 + m_2 + m_3$ gibi ...

Aşağıda x,y,z gibi üç değişkenle oluşturulmuş bir lojik fonksiyon görülmekte olup, bunun yukarıda açıklanan gösterim biçimleriyle ifade edilişi ve buna dair yorumlar yeterince açıklıkta sunulmaktadır.

Lojik fonksiyonun bütün olası hallerine göre m_i ($i = 0,...,7$) gösterilişi kullanılırsa, aşağıda görülmekte olan değerlendirme oluşur :

$$\begin{aligned} m_0 &= x' y' z' \rightarrow (0 \ 0 \ 0) \\ m_1 &= x' y' z \rightarrow (0 \ 0 \ 1) \\ m_2 &= x' y z' \rightarrow (0 \ 1 \ 0) \\ m_3 &= x' y z \rightarrow (0 \ 1 \ 1) \\ m_4 &= x y' z' \rightarrow (1 \ 0 \ 0) \\ m_5 &= x y' z \rightarrow (1 \ 0 \ 1) \\ m_6 &= x y z' \rightarrow (1 \ 1 \ 0) \\ m_7 &= x y z \rightarrow (1 \ 1 \ 1) . \end{aligned}$$

Bu değerlendirme sırasında apaçıktır ki yine $n = 3$ için 2^n kuralı geçerli olmuştur. Bu $f(x,y,z)$ lojik fonksiyonuna *Shannon Teoremi* olarak ifade edilen açılım uygulanırsa, aşağıdaki sıralı işlemler sonrası bazı ifadeler oluşur ki bakalım bunlar bizi nasıl bir sonuca ulaştıracaktır ?

Shannon Teoremi (*yasası*) gereğince :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x \cdot f(1, y, z) + x' \cdot f(0, y, z) \\ f(1, y, z) &= y \cdot f(1,1, z) + y' \cdot f(1,0, z) \\ f(0, y, z) &= y \cdot f(0,1, z) + y' \cdot f(0,0, z) \end{aligned}$$

oluşur. Keza,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x y \cdot f(1,1, z) + x y' \cdot f(1,0, z) + \\ &\quad x' y \cdot f(0,1, z) + x' y' \cdot f(0,0, z) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} f(1,1, z) &= z \cdot f(1,1,1) + z' \cdot f(1,1,0) \\ f(1,0, z) &= z \cdot f(1,0,1) + z' \cdot f(1,0,0) \\ f(0,1, z) &= z \cdot f(0,1,1) + z' \cdot f(0,1,0) \\ f(0,0, z) &= z \cdot f(0,0,1) + z' \cdot f(0,0,0) \end{aligned}$$

$$f(x,y,z) = xyz f(1,1,1) + xyz' f(1,1,0) + xy'z f(1,0,1) + xy'z' f(1,0,0) + x'yz f(0,1,1) + x'yz' f(0,1,0) + x'y'z f(0,0,1) + x'y'z' f(0,0,0)$$

elde edilecektir. Böylece Shannon yasası gereğince, $f(x,y,z)$ fonksiyonunda, değişkenlerin almış olduğu değerlere karşın lojik fonksiyonun bir ifade biçimini elde etmek üzere, eğer bu değerlere karşın fonksiyonun aldığı değerler α_i lerle gösterilirse :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= f(0,0,0) ; \alpha_1 = f(0,0,1) ; \alpha_2 = f(0,1,0) ; & \alpha \\ \alpha_3 &= f(0,1,1) ; \alpha_4 = f(1,0,0) ; \alpha_5 = f(1,0,1) ; \\ \alpha_6 &= f(1,1,0) ; \alpha_7 = f(1,1,1) \end{aligned}$$

olur. Artık değişkenleri x,y,z olan herhangi bir $f(x,y,z)$ lojik fonksiyonu ,

$$f(x,y,z) = \sum \alpha_i m_i = \alpha_0.m_0 + \alpha_1.m_1 + \alpha_2.m_2 + \alpha_3.m_3 + \alpha_4.m_4 + \alpha_5.m_5 + \alpha_6.m_6 + \alpha_7.m_7$$

şeklinde ifade edilebilecektir. Burada α_i değerleri ancak ve ancak **0** ya da **1** değerini alabilecektir. Eğer **0** değerini alıyorsa, bu α lı katsayının içinde bulunduğu terim ortadan kalkacak ve dolayısıyla görülmeyecektir. Katsayısı **1** olan terimlerdeyse, $1. m_i = m_i$ olacağından bu kez terim görülecek ancak katsayı görülmeyecektir. Böylece bir lojik fonksiyonun *oluşum yasası* açıklanmış olmaktadır ve bu oldukça önemli bir bilgidir. Bu yapılaşma sonunda, minimum terimlerle (min. terimlerden) oluşan fonksiyon şekillenmiş olacaktır. Burada α_i katsayılarının çeşitli kombinasyonlarına göre yeni yeni lojik fonksiyonlar elde edilmiş olacaktır. İşte bir örnek :

ÖRNEK . 1. $f(x,y,z) = x y' + x' z$ fonksiyonu için α_i katsayıları :

x	y	z	f(x,y,z)	α_i
0	0	0	0.1 + 1.0	0
0	0	1	0.1 + 1.1	1
0	1	0	0.0 + 1.0	0
0	1	1	0.0 + 1.0	0
1	0	0	1.1 + 0.0	1
1	0	1	1.1 + 0.1	1
1	1	0	1.0 + 0.0	0
1	1	1	1.0 + 0.1	0

olarak hesaplanmıştır. Bu tablo ile düzene konmuş olarak, $f(x,y,z)$ lojik fonksiyonunun min.terimler cinsinden ifadesi elde edilmek üzere aşağıdaki düzenleme yapılırsa :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \sum \alpha_i m_i = 0.m_0 + 1.m_1 + 0.m_2 + 0.m_3 + 1.m_4 + 1.m_5 + 0.m_6 + 0.m_7 \\ &= m_1 + m_4 + m_5 \\ &= x' y' z + x y' z' + x y' z \end{aligned}$$

bulunacaktır. Bu fonksiyonun yukarıda ifade edilmiş bulunan diğer gösteriliş biçimlerine göre,

$$f(x,y,z) = x y' + x' z = \sum 001, 100, 101$$

şeklinde ya da diğer bir yazıyla,

$$f(x,y,z) = x y' + x' z = \sum 1, 4, 5$$

şeklinde olacaktır. Bunlar arasında daha çok sonuncu şekil kullanılmaktadır. Çünkü bu gösteriştirki bir rahatlık, $\sum$ içinde yer alan satır numaralarının on tabanlı sisteme ait olmalarıdır. Oysa bir üstteki gösteriş biçiminde, iki tabanlı sisteme ait sayılar yer almakta olduğu görülmekte ve eğer basamak sayısı büyük olursa, burada çok rakamlı sayıların yer alması halinde, hayli geniş bir açıklama olacağı anlaşılmaktadır. Oysa son yazılıştaki anlatım biçiminde değişken sayısına bağlı bir yazış söz konusu değildir.

ÖRNEK. 2. Aşağıda bir lojik fonksiyonun tanım tablosu verilmiştir. Bu tablo ile tanımlanmış fonksiyonu min.terimler cinsinden yazınız :

Tanım Tablosu :	Satır Nr.	x y z	f(x,y,z)	Min.terimler
	0	0 0 0	0	
	1	0 0 1	1	$x' y' z$
	2	0 1 0	0	
	3	0 1 1	0	
	4	1 0 0	1	$x y' z'$
	5	1 0 1	1	$x y' z$
	6	1 1 0	1	$x y z'$
	7	1 1 1	0	

olarak verilmiştir.

Min.terimler tablo üzerinde belirlendiğine göre bu tablo ile tanımlanan ve sadece fonksiyonun 1 değerini aldığı satırların numaraları da dikkate alınarak,

$$f(x,y,z) = \sum 1, 4, 5, 6$$

yazılacaktır ki bu anlatımla gösterilen fonksiyon gerçekte,

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz'$$

dir.

Karşıt düşünceyle, öyle anlaşıyor ki ve yukarıdan beri yapılan açıklamalar da dikkate alınarak, min.terimleriyle verilmiş bir fonksiyonun *tanım tablosu* ya da *doğruluk tablosu* kolayca düzenlenebilecektir.

Bu tür problemlerde bir yaklaşım da, bu tür düzenlemelerden sonra fonksiyonun ekonomik boyutunu araştırmaktır. Yani en basit ifade biçiminin ne olduğunu bulmaya çalışmaktır. Bir uygulama olması bakımından son örnekteki min. terimlerden oluşan fonksiyon üzerinde aşağıda görülen işlemler yapılarak, fonksiyonun daha basit bir ifadesi elde edilmiş olmaktadır ki bu aynı zamanda fonksiyonların eşitliği kavramını da örneklemektedir .

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' \\ &= (x' + x)y'z + x(y + y')z' \\ &= 1 \cdot y'z + x \cdot 1 \cdot z' \\ &= y'z + x \cdot z' \end{aligned}$$

olur.

Min.terimler için yapılan bu açıklamalara koşut olarak, ifade düzenlemeleri yardımıyla benzer oluşumları *max.terimler (maksimum terimler kanonik şekli)* için tekrarlamak olanaklıdır. Ancak bazı hususları açıklamak oldukça güçtür.

Aşağıda x,y,z gibi üç değişkenle oluşturulmuş bir lojik fonksiyon görülmektedir. Bunun, yukarıda açıklanan gösterim biçimleriyle ifade edilişi ve buna dair yorumlar tamamen benzerlik gösterse de yeniden yapılacaktır.

Lojik fonksiyonun bütün olası hallerine göre M_i ($i = 0, \dots, 7$) gösterilişi kullanılacak olursa, aşağıda görülen değerlendirme oluşacaktır. Ancak bu kez *max. terimler* cinsinden yazmayı istediğimiz için, birim eleman **0** olduğundan, buna göre bir düzenleme yapılacaktır.

$$\begin{aligned}
(0,0,0) &\rightarrow M_0 = x' + y' + z' \rightarrow m_7 \\
(0,0,1) &\rightarrow M_1 = x' + y' + z \rightarrow m_6 \\
(0,1,0) &\rightarrow M_2 = x' + y + z' \rightarrow m_5 \\
(0,1,1) &\rightarrow M_3 = x' + y + z \rightarrow m_4 \\
(1,0,0) &\rightarrow M_4 = x + y' + z' \rightarrow m_3 \\
(1,0,1) &\rightarrow M_5 = x + y' + z \rightarrow m_2 \\
(1,1,0) &\rightarrow M_6 = x + y + z' \rightarrow m_1 \\
(1,1,1) &\rightarrow M_7 = x + y + z \rightarrow m_0
\end{aligned}$$

olur.

Değişkenler x, y, z gibi üç tane olduğu içindir ki burada da $n = 3$ için 2^n kuralı geçerli olmuştur. Burada farklı olarak, min.terimler max.terimler katsayılarını karşılaştırabilmek amacıyla sıralı olarak m_i yerine M_i kullanılmıştır.

Burada temel düşünce, gerekli durumlarda her iki formu karşılaştırmak ve gereksinme olduğu takdirde birbirine dönüştürmektir. Ancak uygulamada daha çok min.terimlerle iş yapıldığından, bu form üzerindeki çalışmalar daha çok gelişmiş bulunmaktadır.

ÖRNEK. $f(x, y, z) = m_0 + m_4 + m_5$ fonksiyonu veriliyor. $f'(x, y, z)$ bütünler fonksiyonunu ve aynı fonksiyonun max.terimler cinsinden karşılığını bulalım.

Fonksiyon verildiği şekliyle : $f(x, y, z) = m_0 + m_4 + m_5 = \sum 0,4,5$ demektir ki burada görülen terimler için $\alpha_i = 1$, görülmeyen terimler için $\alpha_i = 0$ dır. Bu yazış tarzına göre bütünler fonksiyonu ifade etmek oldukça kolaydır. 0,4,5 in dışında kalan durumlar f' fonksiyonunda bulunacaktır ki bu da,

$$f'(x, y, z) = \sum 1,2,3,6,7$$

demektir. Bu da min.terimlerden oluşmuştur. Bu oluşuma dikkat edilirse, bütünler (komplement) fonksiyonunun ortaya çıkışındaki kural doğrudan α_i katsayısı ile ilgilidir. Çünkü $f(x, y, z)$ de $\alpha_i = 1$ olan terimler için $f'(x, y, z)$ de $\alpha_i = 0$ olmuştur. Öyleyse,

$$f(x, y, z) = \sum \alpha_i \cdot m_i \rightarrow f'(x, y, z) = \sum (\alpha_i)' \cdot m_i$$

yazılabilecektir. α_i bir basit boolien nicelik olduğu için, $\alpha_i = 1$ ise $(\alpha_i)' = 0$; $\alpha_i = 0$ ise $(\alpha_i)' = 1$ dir. Buna göre birinde görülen terimler diğerinde görülmeyecek demektir.

Fonksiyonun max.terimler cinsinden ifadesine gelince : Burada temel ilke *çift değilleme yasası'* ndan yararlanmaktır. Biliyoruz ki,

$$f(x,y,z) = [f'(x,y,z)]'$$

dir. $f'(x,y,z)$, fonksiyonun bütünleyeni (komplementi) dir. Bu yukarıda bulunmuştur. Bu fonksiyon, De Morgan için yeniden düzenlenirse,

$$f'(x,y,z) = \sum (\alpha_i)' . m_i \rightarrow f(x,y,z) = [f'(x,y,z)]' = [\sum (\alpha_i)' . m_i]' = \prod [\alpha_i + (m_i)']$$

olur. Böylece max.terimlere geçilmiş olacaktır. Burada problemimize bir yorum getirecek düzenleme yapılırsa,

$$f(x,y,z) = \sum 0,4,5 \quad \text{ için } \quad f'(x,y,z) = \sum 1,2,3,6,7$$

oldukları bilindiğinden, anlaşıyor ki $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0$ dır. Burada max.terimler için elde edilen katsayılarda da bu α değerleri görülmektedir. Öyleyse,

$$f(x,y,z) = \prod [\alpha_i + (m_i)'] = \prod [0 + (m_i)'] = \prod (m_i)'$$

demektir. $(m_i)'$ ile m_i min.terimlerinin bütünleyeni gösterilmektedir. Ancak bu terimler, De Morgan ile elde edildiğinden, yukarıdaki açıklamamıza göre

$$f(x,y,z) = \prod (m_i)' = \prod M_i$$

yazılacak demektir. $i = 1,2,3,6,7$ için M_i ler :

$$\begin{aligned} M_1 &= x + y + z' ; \quad M_2 = x + y' + z ; \quad M_3 = x + y' + z' ; \\ M_6 &= x' + y' + z ; \quad M_7 = x' + y' + z' \end{aligned}$$

olur ki $f(x,y,z)$ fonksiyonu artık max.terimler cinsinden ifade edilebilecektir

$$f(x,y,z) = (x+y+z')(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y'+z)(x'+y'+z') .$$

ÖRNEK. Aşağıda, genel anlamda verilmiş bir Boole fonksiyonu ve bütünleri için tanım tablosu düzenlenerek, burada min.terimler ve max.terimler için temel değerler, hesap yoluyla oluşturulmuştur.

Fonksiyon, $f(x,y,z) = x.y + x'.z$ olsun.

Sıra Nr.	x y z	f(x,y,z)	f'(x,y,z)	m _i	M _i
0	0 0 0	0 = α ₀	1 = (α ₀)'	m ₀ = x'.y'.z'	M ₀ = x' + y' + z'
1	0 0 1	1 = α ₁	0 = (α ₁)'	m ₁ = x'.y'.z	M ₁ = x' + y' + z
2	0 1 0	0 = α ₂	1 = (α ₂)'	m ₂ = x'.y.z'	M ₂ = x' + y + z'
3	0 1 1	1 = α ₃	0 = (α ₃)'	m ₃ = x'.y.z	M ₃ = x' + y + z
4	1 0 0	0 = α ₄	1 = (α ₄)'	m ₄ = x.y'.z'	M ₄ = x + y' + z'
5	1 0 1	0 = α ₅	1 = (α ₅)'	m ₅ = x.y'.z	M ₅ = x + y' + z
6	1 1 0	1 = α ₆	0 = (α ₆)'	m ₆ = x.y.z'	M ₆ = x + y + z'
7	1 1 1	1 = α ₇	0 = (α ₇)'	m ₇ = x.y.z	M ₇ = x + y + z

Bu fonksiyonun min.terimler kanonik şekli, (α_i = 1 ler için)

$$f(x,y,z) = \alpha_1.m_1 + \alpha_3.m_3 + \alpha_6.m_6 + \alpha_7.m_7$$

$$= x'.y'.z + x'.y.z + x.y.z' + x.y.z$$

olur. Böylece,

$$f(x,y,z) = x.y + x'.z = x.y.z + x.y.z' + x'.y.z + x'.y'.z$$

olduğu yazılabilecektir. Boole fonksiyonlarındaki tanımıyla, fonksiyonun *tam ayırıcı normal formda* 'ki halidir.

Fonksiyonun f'(x,y,z) bütünleyeninin (komplementinin) min.terimlerle ifadesi

$$f'(x,y,z) = (\alpha_0)'.m_0 + (\alpha_2)'.m_2 + (\alpha_4)'.m_4 + (\alpha_5)'.m_5$$

$$= x'.y'.z' + x'.y.z' + x.y'.z' + x.y'.z$$

demektir. Bu fonksiyonun her iki yanının bütünleyenleri yazılırsa, sol taraf için fonksiyonun kendisi elde edileceğinden (çift değilleme yasası) :

$$f(x,y,z) = [f'(x,y,z)]' = [\alpha_0 + (m_0)'].[\alpha_2 + (m_2)'].[\alpha_4 + (m_4)'].[\alpha_5 + (m_5)']$$

$$= (m_0)'.(m_2)'.(m_4)'.(m_5)'$$

$$= M_7 . M_5 . M_3 . M_2$$

olur ki böylece fonksiyonun max.terimler cinsinden ifadesine geçilebilecektir. Oysa yukarıdaki tabloda bunların karşılıkları bulunmaktadır. Bunun yardımıyla

$$f(x,y,z) = (x + y + z).(x + y' + z).(x' + y + z).(x' + y + z')$$

bulunur.

Yukarıdaki açıklamalar ve örnekler, izlenme kolaylığı nedeniyle üç değişkenli fonksiyonlar için düzenlenmiştir. Burada oluşan ilkelerden hareket ederek daha genel ifadelerle ulaşmak olanaklıdır. Şimdi aşağıda görüldüğü gibi, bu türlü bir çalışma yapılacaktır.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \beta$ olmak üzere n değişkenli bir Boole fonksiyonunun min.terimler kanonik şekli yine $\alpha_i . m_i$ sembolleri kullanılarak ifade edilirse,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n - 1} \alpha_i . m_i$$

olur. Bu fonksiyonun komplementinin min.terimler kanonik şekli de,

$$f'(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n - 1} (\alpha_i)' . m_i$$

olur. Bu son fonksiyonun her iki yanının komplementi yeniden yazılırsa,

$$[f'(x_1, \dots, x_n)]' = f(x_1, \dots, x_n)$$

olacağından,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=0}^{2^n - 1} [\alpha_i + (m_i)']$$

demektir. Bu geçişte De Morgan yasası uygulanmıştır. Bu yine bir n değişkenli fonksiyon göstermektedir. Ancak yapı itibariyle max.terimler kanonik şeklinde görülmektedir. Diğer yandan,

$$(m_i)' = M_{2^n - i - 1}$$

demek olduğundan fonksiyon,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=0}^{2^n - 1} [\alpha_i + M_{2^n - i - 1}]$$

şeklinde de ifade edilebilecektir.

Burada α_i , bir basit boolien değer olduğundan, bunun değerinin **0** ya da **1** oluşuna göre bir *irdeleme* yapmak gerekebilir.

1°) $\alpha_i = 0$ ise : $\alpha_i + (m_i)' = 0 + (m_i)' = (m_i)'$ olur.

2°) $\alpha_i = 1$ ise : $\alpha_i + (m_i)' = 1 + (m_i)' = 1$ olur.

Bu sonuçlara bakarak, genel anlamda bir fonksiyon için, min.terimler kanonik şekline göre ifadesi ile max.terimler kanonik şekline göre ifadesinin oluşturulmasında aşağıdaki *algoritma* kullanılabilecektir.

Bir fonksiyonun tanım tablosundan hareket edilerek min.terimler kanonik şekli için 1 bulunan ; max.terimler kanonik şekli için 0 bulunan satırlar kullanılmalıdır.

Bu algoritmada sözü edilen uygulama, anımsanırsa, boole fonksiyonlarının *tam formları'* nin yazılışındaki kural ile tamamen aynıdır. Böylece biliyoruz ki ;

- 1°) Min.terimler kanonik şekli, boole fonksiyonunun tam ayırıcı normal formu karşılığı olarak ,
- 2°) Max.terimler kanonik şekli, boole fonksiyonunun tam birleştirici normal formu karşılığı olarak ,

kullanılmış olunmaktadır.

Kanonik şekilde ifade edilmenin önemli nedenleri vardır ki bunların başlıcaları şunlardır :

- a°) Bir fonksiyonun ister min.terimler, ister max.terimler cinsinden ifade edilmiş olsun, ancak ve ancak tek türlü yazılma olanağı vardır. Fonksiyonun bu türde ifade edilmiş olması, onları karşılaştırmada ve de eşit fonksiyonları başkaca işleme gerek kalmaksızın belirlemede en uygun yoldur.
- b°) Boole fonksiyonunun kullanım amacına uygun olarak düzenlenmesinde bu formlardan hareket etmek en kolay olanıdır. Özellikle aralarında dönüşüm olanağı bulunması, bu özelliği etkin kılmaktadır.
- c°) Boole fonksiyonları ile ilgili genel ifadeler elde edilmiş olacağından, onlar ile ilgili kanıtlamalarda kullanılabilir özellikleri bulunmaktadır.
- d°) Boole fonksiyonlarının basitleştirilmesi (minimumlaştırılması) problemleri sırasında, hemen hemen her yöntem için çıkış noktası oluşturmaktadır.
- e°) Lojik devre problemlerinde, VE-VEYA devrelerinin kurulmasında, bazı durumlarda, yararlı yapılar oluşturabilmektedir.

Buraya kadar olan açıklamalar ışığında, daima değerleri belirlenmiş yapılarla ilgilenilmiştir. Oysa bundan biraz daha farklı yapılarla da karşılaşılmaktadır.

7. 5. SAYISAL GÖSTERİLİŞ

Bir Boole fonksiyonunun tanımlanmasında **0** ve **1** ikilisinden yararlanıldığı yukarıdan beri tekrarlına gelmektedir. Bunların herhangi bir kombinasyonu yeni bir fonksiyon tanımlamaktadır. Ancak bir de bunların kombinasyon içinde tanımsız olarak bulunabileceğini varsayalım. Bu kavramı yakalamak için, *önermeler mantığı*'nın hemen başlangıcında verilmiş olan *önerme* ile *önermesel* tanımları anımsanmalıdır. Aralarındaki fark iyi anlaşılırsa, *sayısal gösteriliş* kavramı da o denli kolay çözümlenebilecektir.

Tanım tablosunda yer alan bir değer düşünelim ki **0** ya da **1** olacaktır da ancak henüz ne olduğu belirgin değildir. Böyle bir değer $\emptyset$ yazılarak gösterilir.

Tanım tablosunda satırlar, 10 tabanlı sistemdeki sayılarla numaralanır. Bunlar doğal sayılardır. Bunlara *kombinezon numaraları* denir. Kombinezon numaralarını kullanarak gösterim işi, gerçekte bir *kodlama işlemi* 'dir. Kombinezon, bir lojik değişken dizisine verilmiş değerler kombinezonu olarak ele alınınca, bu kodlamada önemli nokta, lojik değişkenlere kombinezon içinde ayrılmış olan sıradır.

Lojik fonksiyonlar B_2^n üzerinde tanımlıdırlar. Burada *yalın fonksiyon* deyimiyile tüm değerleri belirlenmiş bir Boole fonksiyonu anlatılmış olmaktadır. *Genel fonksiyon* deyimiyile, yukarıda açıklandığı şekilde, tüm değerlerin belirgin olmadığı bir Boole fonksiyonu anlatılmış olmaktadır. Yalın fonksiyon örneklerine bundan önceki alt-bölümde yer verilmiştir. Burada daha çok genel fonksi- yon anlamında açıklamalara yer verilecektir.

Konuya yaklaşımı ve bunun yardımıyla yeni bir yazış (ifade) biçimini sunabilmek amacıyla aşağıdaki örneği inceleyelim :

S.Nr.	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

ÖRNEK . İki değişkenli bir boole fonksiyonunun tanım tablosu yanda görülmektedir.

Bu tablo ile tanımlanan fonksiyon yalın fonksiyon olup,

$$f(x_1, x_2) = \sum_1 (1, 2)_{10}$$

ya da

$$f(x_1, x_2) = \sum_0 (0, 3)_{10}$$

yazılır.

Bu ifade biçiminde (yazışta) Σ_1 , *doğru (lojik 1)* diye , Σ_0 , *yanlış (lojik 0)* diye okunur. İşte, yukarıda, fonksiyon tanımlanırken kullanılan Σ sembolünün yeni bir donanımla anlamlı bir kullanımı elde edilmiş olmaktadır. Σ içindeki sayılar tanım tablosundaki *satır numaralarını* göstermektedir. Sağ alt köşedeki 10 sayısı ise bu sıra numaralarının 10 tabanlı olduğunu simgelemektedir. Burada bir kabul (bir çeşit anlaşma) yaparak, bundan böyle bu taban sayısını yazmayacağız ve aksi söylenmedikçe bu sayıların *doğal sayılar* olduğunu düşüneceğiz. *

Burada fonksiyon bütünüyle tanımlanmış değerlerle oluşturulduğu için, sadece *doğru* veya *yanlış* kombinezonların numaraları verilmek suretiyle tanım yapılabilecektir. İşte yukarıda yapılmış olan tanımlar bunlardır.

Şimdi de aşağıda, genel fonksiyon tanımına uygun bir tablo yardımıyla tanımlanmış iki boole fonksiyonu birden incelenmektedir ; izleyelim :

ÖRNEK .

Kom.S.Nr.	x_1	x_2	x_3	$\emptyset$ y_1	$\emptyset$ y_2
0	0	0	0	$\emptyset$	0
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	$\emptyset$
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	$\emptyset$	$\emptyset$
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	1	0

Buradaki iki fonksiyon, aşağıda gösterilmiş olanlardan biri yardımıyla tanımlanmış olacaktır ki (lojik 1) ile tanım yapılmak istenirse,

$$y_1 = \Sigma_1(1,2,4,6,7) + \Sigma_{\emptyset}(0,5)$$

$$y_2 = \Sigma_1(1,4,6) + \Sigma_{\emptyset}(3,5)$$

(*)Burada **0** sayısının bulunması doğal sayılarla ilgili tartışmayı genişletebilir. **0** bazı tezlere göre doğal sayı kabul edilmekte, bazılarına göre edilmemektedir. Biz doğal sayı olduğunu kabul ediyoruz. Bu konuda, *Peano Aksiyomları*'nın yeniden düzenlenmiş şekli incelenmelidir.

yazılarak ya da (lojik 0) ile tanım yapılmak istenirse,

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_0(3) + \sum_{\emptyset}(0,5) \\ y_2 &= \sum_0(0,2,7) + \sum_{\emptyset}(3,5) \end{aligned}$$

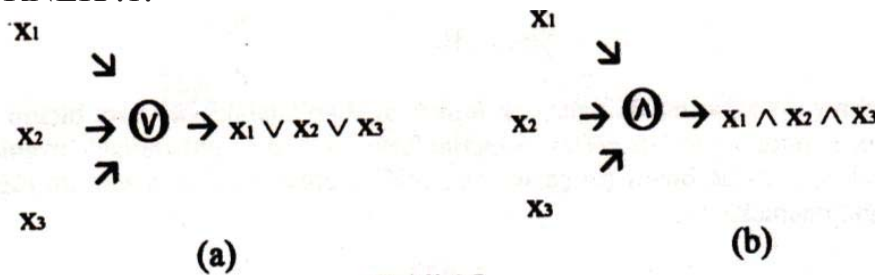
yazılacaktır. Bu ifadeler her iki fonksiyonu istenilen düzeyde tanımlamış olmaktadır. Bu fonksiyonlarda $\emptyset$ ile temsil edilen *değer* bir nedenle belirlendiği takdirde, fonksiyon *yalın fonksiyon* sınıfına dahil edilmiş olacaktır. Bu kavram tanım aşamasında fonksiyonlar için bir çeşit genişleme sağlamaktadır. Böylece lojik fonksiyon olarak alternatif durumları içermek ve sadece bu değerlere özgü olmak üzere, fonksiyondaki bazı değerler için tartışma zemini yaratmak gibi bir özelliği içerdiği görülmektedir.

7. 6. KOMÜTASYON CEBİRİNDE LOJİK DEVRE SENTEZİ

Burada, bu bölüme özgü açıklamalarla *lojik devre sentezi* yapılacaktır. **Lojik Devreler** başlığını verdiğimiz bölüm, tam anlamıyla Boole Fonksiyonlarının yapılarına göre düzenlenmiş problemleri içermektedir. Daha matematiksel yapılar içermektedirler. Oysa **Komütasyon Cebiri** adını verdiğimiz bu bölümde, başta da belirtildiği gibi, lojik devrelere biraz daha farklı bir yaklaşım sergilenmekte ve bu devrelerin *fonksiyonları*'nın gözönünde bulundurulduğu çalışma-lar yapılması yeğlenmektedir. Böylece, bölümün başında gösterilmiş notasyon-lar da kullanılarak yapılacak çalışma ve örneklemeler, burada konu edilen ku- ramsal oluşumların bir çeşit gösterisini oluşturacaktır. Doğal olarak, böyle bir çalışmanın aşamaları tümüyle uygulamaya dönük olduğu için, başkaca söze ge-rek kalmaksızın, aşağıdaki problemlerin incelenmesine geçilmektedir. Gerekli tamamlayıcı açıklamalar da problemler üzerinde çalışılırken verilmiş olacaktır.

7.6.1. Tek Çıkışlı Lojik Devreler

ÖRNEK .1.



Şekil 35

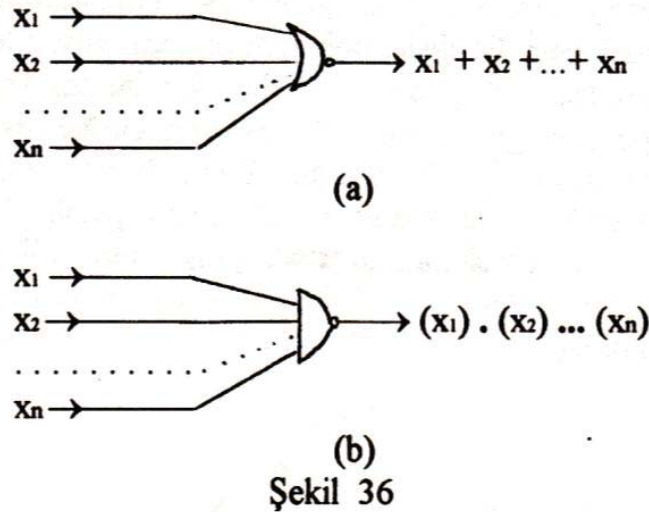
Burada x_1, x_2, x_3 elemanlarıyla, (a) da $\vee$ için ; (b) de $\wedge$ için birer model oluşmuş bulunmaktadır. Oysa daha önceki bilgilerimizden $\vee$ operatörünün *lojik toplam*, $\wedge$ operatörünün ise *lojik çarpım* için kullanıldığı ya da diğer bir deyişle bu işlemler için öngörüldükleri sonucunu çıkarabiliriz. Modern *dijital computerler* de artık bu tür işlem devreleri kullanılmaktadır. Bu modelleri n değişkenli giriş- ler için genelleleyebiliriz. Ancak çıkışın tek olduğuna dikkat edilmelidir. $x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi n tane girişin herbiri binary sisteme ait bir sayı ise, (a) daki devre bu dijital sayıların *toplamını* gerçekleştirecek, yani

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

olacaktır. Benzer şekilde (b) deki devre, bu dijital sayıların *çarpımını* gerçekleştirecek, yani

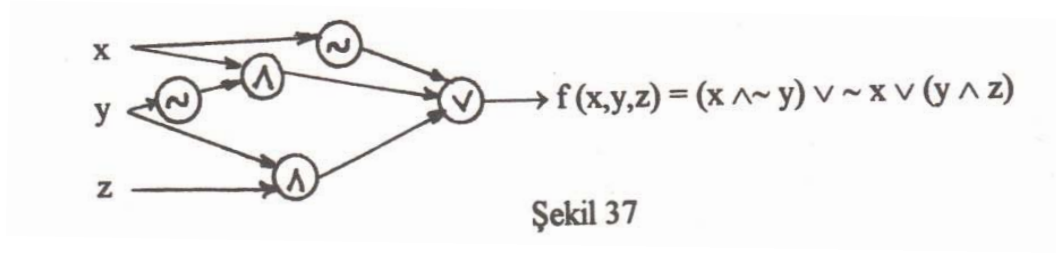
$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \Rightarrow (x_1) \cdot (x_2) \dots (x_n)$$

demek olacaktır. Bu lojik devrelerin şekille betimlenerek bir başka gösteriliş biçimi daha vardır ki, bu bölümün ilk sayfalarında gösterilen bu ifadeye göre bu dijital devreler, kapı elemanları kullanılarak, aşağıda görüldüğü gibi resimlenmiş olacaktırlar.



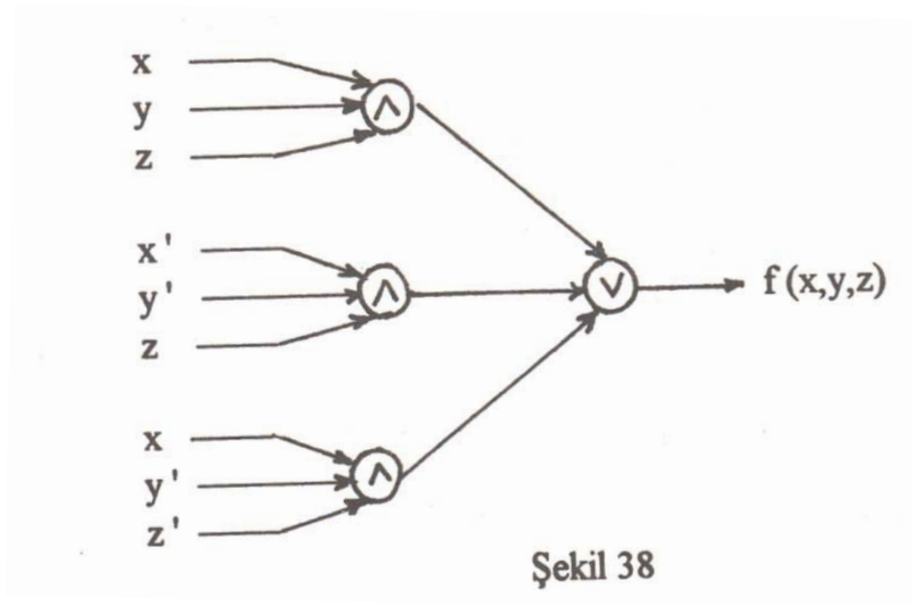
Uyarı : Bizim çalışmalarımızda daha çok fonksiyonel anlamdaki gösterim biçimi kullanılacaktır. Lojik kapılarla yapılan gösterim biçimi hem daha çok mühendislik uygulamalarına dönük olmakta, hem de bizim çalışmamızda, şekil üretmeye oldukça ters düştüğünden bu nedenle yeğlenmemektedir.

ÖRNEK . 2 . $f(x,y,z) = (x \wedge \sim y) \vee \sim x \vee (x \wedge z)$ veriliyor. Buna uyan lojik devreyi çiziniz.



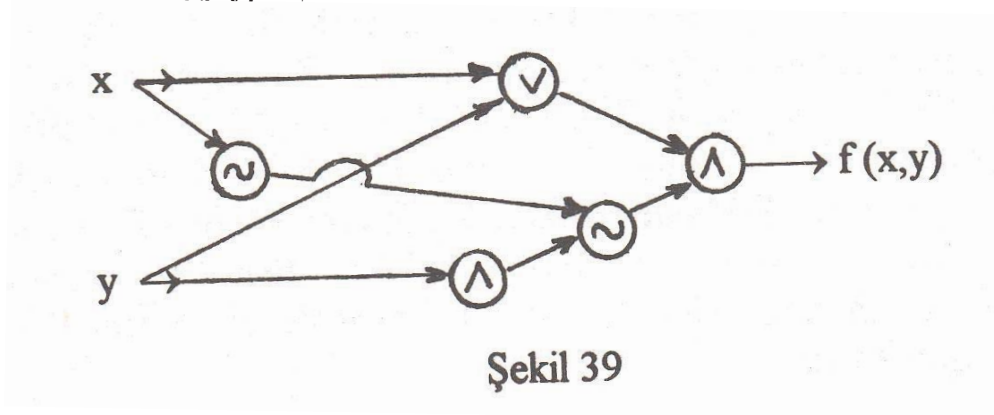
ÖRNEK. 3. Min.terimleriyle verilmiş bir Boole fonksiyonu aşağıdadır. Buna uyan lojik devreyi çizelim.

$$f(x,y,z) = x y z + x' y' z + x y' z'.$$



ÖRNEK. 4. Aşağıdaki lojik devreye uyan çıkış fonksiyonunu yazınız :

$$f(x,y) = ?$$

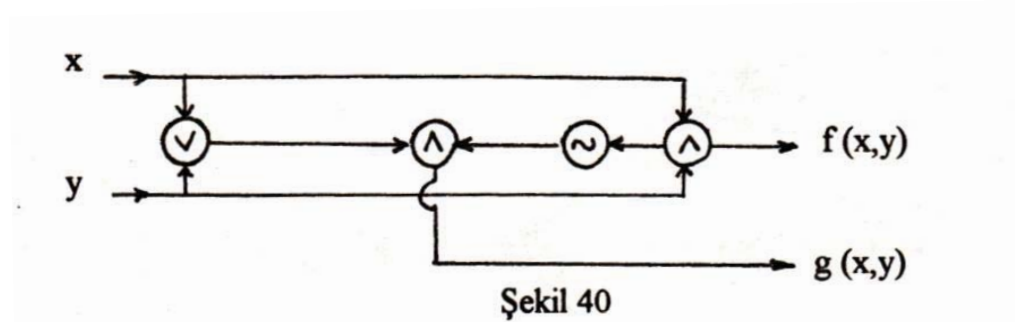


Yanıt : $f(x,y) = (x \vee y) \wedge \sim (\sim x \wedge y)$

7.6.2. Çok Çıkışlı Lojik Devreler

Bazı lojik devre problemlerinde öncekinden farklı olarak *çok çıkışlı (daha çok iki çıkışlı)* devrelere de rastlanılmaktadır. Bunların yapıları incelenirken, oluşan temel esaslarda köklü bir değişiklik yoktur. Ancak *çıkış fonksiyonları'* nın yönlendirmesine göre, aynı bir devreden, farklı sonuçlar elde edilmiş olacaktır. Bu tür problemlerde özellikle lojik devre, fonksiyonu yönlendirmektedir. Konunun daha çok uygulama ağırlığı olması nedeniyle aşağıdaki iki örneği inceleyelim :

ÖRNEK .1. Aşağıdaki şekilde görülen çift çıkışlı lojik devrede çıkış fonksiyonları nelerdir ? $f(x,y) = ?$; $g(x,y) = ?$



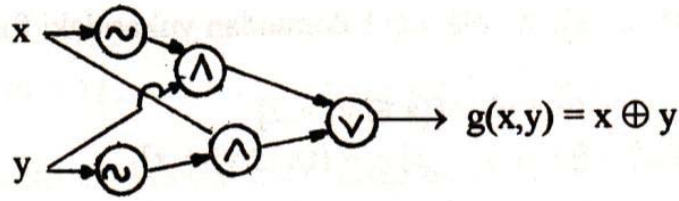
Fonksiyonlar : $f(x,y) = x \wedge y$; $g(x,y) = (x \vee y) \wedge \sim (x \wedge y)$ olur.

$g(x,y)$ fonksiyonu ayrıca özel olarak incelenirse, De Morgan'a göre,

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (x \vee y) \wedge \sim (x \wedge y) = (x \vee y) \wedge (\sim x \vee \sim y) = (x \wedge \sim x) \vee (y \wedge \sim y) \vee \\ & (x \wedge \sim y) \vee (\sim x \wedge y) = 0 \vee 0 \vee (x \wedge \sim y) \vee (\sim x \wedge y) = (x \wedge \sim y) \vee (\sim x \wedge y) = \\ & x \oplus y \end{aligned}$$

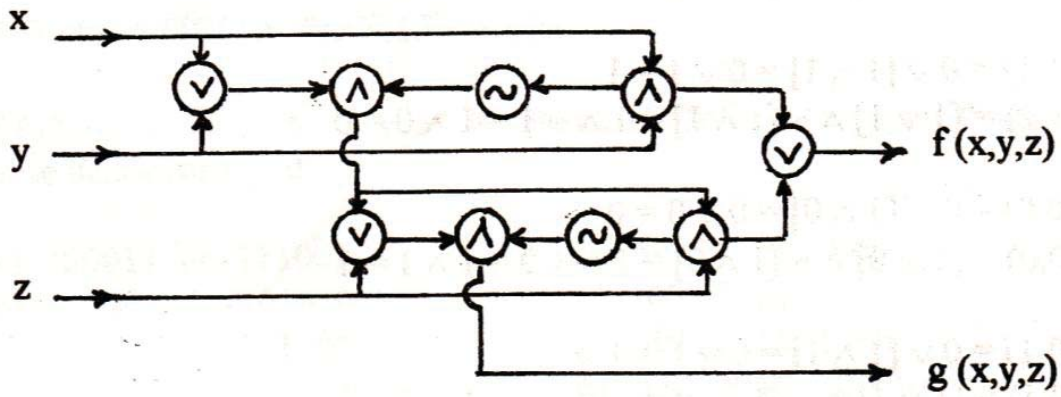
olur. Bu sonuç özel olarak hesaplanmış bir bileşimi, *ayırmış birleştirme işlemi (ya da'lı bileşimi)* göstermektedir. Yeniden düzenlenmiş bu sonucu, denk devre olarak aşağıda görüyoruz (Şekil 41). Bu devreye (doğal olarak yukarıdakine de) *yarı toplama hesaplayıcı* (İng. karşılığı = half adder) denilmektedir. Burada $f(x,y)$ fonksiyonu *çarpma işlemi*, $g(x,y)$ fonksiyonu da *toplama ile çarpmanın değilin çarpımını* göstermektedir ki bu sonuncusu, yukarıdaki analize göre *özel bir toplama işlemi* temsil etmiş olmaktadır. Özelliği " x ve y nin farklı değerleri için 1 ; aynı değerleri için 0 yazan bir algoritma " oluşturmaktadır.

(*) Bkz. : Syf. 125



Şekil 41

ÖRNEK. 2. Aşağıda çift çıkışlı bir lojik devre görülmektedir. Bu, bir önceki örnekte *yarı toplama hesaplayıcısı (half adder)* olarak adlandırılan devreye koşut olarak geliştirilmiş *tam toplama hesaplayıcısı (full adder)* olarak adlandırılan devredir. Çift çıkışlı olan bu devre için, çıkış fonksiyonlarını bulalım.
 $f(x,y,z) = ?$; $g(x,y,z) = ?$



Şekil 42

Şekilden hareketle :

$$f(x,y,z) = (x \wedge y) \vee [\sim(x \wedge y) \wedge (x \vee y) \wedge z]$$

$$g(x,y,z) = \{[(x \vee y) \wedge \sim(x \wedge y)] \vee z\} \wedge \sim\{[\sim(x \wedge y) \wedge (x \vee y)] \wedge z\}$$

yazılır. Bu fonksiyonlar üzerinde doğruluk değeri analizi yapılırsa, aşağıdaki tablo yardımıyla daha basit olarak, hangi fonksiyonlara denk oldukları ya da diğer bir deyişle hangi işlemleri tanımladıkları daha kolay anlaşılır.

İşe önce tanım tablosunu (tablolarını ; çünkü iki tablo birlikte verilmiştir) düzenleyerek başlayalım. Burada, bir önceki örnek dikkate alınarak,

$$(x \vee y) \wedge \sim(x \wedge y) = (x \wedge \sim y) \vee (\sim x \wedge y) = x \oplus y$$

olduğu görülür. İşlem kolaylığı bakımından yukarıdaki fonksiyonlar,

$$f(x,y,z) = (x \wedge y) \vee [(x \oplus y) \wedge z]$$

$$g(x,y,z) = [(x \oplus y) \vee z] \wedge \sim [(x \oplus y) \wedge z]$$

şeklinde düzenlenmişlerdir. Bunlardan hesap yoluyla aşağıdaki tablolar oluşur.

$$f(0,0,0) = 0 \vee [0 \wedge 0] = 0 \vee 0 = 0$$

$$g(0,0,0) = [0 \vee 0] \wedge \sim [0 \wedge 0] = 0 \wedge \sim 0 = 0 \wedge 1 = 0$$

$$f(0,0,1) = 0 \vee [0 \wedge 1] = 0 \vee 0 = 0$$

$$g(0,0,1) = [0 \vee 1] \wedge \sim [0 \wedge 1] = 1 \wedge \sim 0 = 1 \wedge 1 = 1$$

$$f(0,1,0) = 0 \vee [1 \wedge 0] = 0 \vee 0 = 0$$

$$g(0,1,0) = [1 \vee 0] \wedge \sim [1 \wedge 0] = 1 \wedge \sim 0 = 1 \wedge 1 = 1$$

$$f(0,1,1) = 0 \vee [1 \wedge 1] = 0 \vee 1 = 1$$

$$g(0,1,1) = [1 \vee 1] \wedge \sim [1 \wedge 1] = 1 \wedge \sim 1 = 1 \wedge 0 = 0$$

$$f(1,0,0) = 0 \vee [1 \wedge 0] = 0 \vee 0 = 0$$

$$g(1,0,0) = [1 \vee 0] \wedge \sim [1 \wedge 0] = 1 \wedge \sim 0 = 1 \wedge 1 = 1$$

$$f(1,0,1) = 0 \vee [1 \wedge 1] = 0 \vee 1 = 1$$

$$g(1,0,1) = [1 \vee 1] \wedge \sim [1 \wedge 1] = 1 \wedge \sim 1 = 1 \wedge 0 = 0$$

$$f(1,1,0) = 1 \vee [0 \wedge 0] = 1 \vee 0 = 1$$

$$g(1,1,0) = [0 \vee 0] \wedge \sim [0 \wedge 0] = 0 \wedge \sim 0 = 0 \wedge 1 = 0$$

Sıra Nr.	x	y	z	f(x,y,z)	g(x,y,z)
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	1

$$f(1,1,1) = 1 \vee [0 \wedge 1] = 1 \vee 0 = 1$$

$$g(1,1,1) = [0 \vee 1] \wedge \sim [0 \wedge 1] = 1 \wedge \sim 0 = 1 \wedge 1 = 1$$

bulunur. Bu tablo yardımıyla, aynı hesap devresine denk olan ve min.terimler cinsinden düzenlenmiş fonksiyonlar da yazılabilir ki bunlar da aşağıya çıkarılmıştır :

$$f(x,y,z) = x y z + x' y z + x y' z + x y z'$$

$$g(x,y,z) = x y z + x' y' z + x' y z' + x y' z'.$$

Min.terimleriyle ifade edilmiş olan fonksiyonlar üzerinde, analiz işlemleri yardımıyla bazı düzenlemeler yapılırsa, yukarıdaki fonksiyonların bu şekilde de elde edilebileceği bir kez daha görülebilecektir. Bu işlemler (uygulamalar) bir çalışma süreci olarak okuyucuya bırakılmıştır.

7.7. ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

Aşağıda verilmiş olan sayılar arasındaki Hamming uzaklığını değişik yöntemlerle belirleyiniz ; $d = ?$:

a) 100011 ile 111001

e) 11001 ile 10001

b) 100001 ile 101010

f) 10001 ile 10000

c) 100101 ile 111101

g) 10111 ile 10000

ç) 11000 ile 10101

ğ) 111100 ile 100001

d) 11111 ile 10000

h) 101100 ile 110011

Aşağıda bir tablo üzerinde, on farklı fonksiyon birarada tanımlanmıştır. Bu tablodan hareketle, her fonksiyon için min. terimleri ve bunlarla oluşan fonksiyonları, değişik ifade biçimlerini kullanarak yazınız :

Sıra												
No	x	y	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇	f ₈	f ₉	f ₁₀
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
2	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

Aşağıda bir tablo üzerinde, on farklı fonksiyon birarada tanımlanmışlardır. Bu tablodan hareketle, her fonksiyon için, min. terimleri ve bunların oluşturdukları fonksiyonları, değişik ifade biçimlerini kullanarak yazınız :

Sıra														
Nr.	x	y	z	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇	f ₈	f ₉	f ₁₀	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	
2	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	
3	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	
4	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
5	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
6	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	
7	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	

Aşağıda bir gösteriliş tarzına göre verilmiş olan fonksiyonları min. terimler cinsinden ifade edelim. Bu fonksiyonların bütünlerini ve ayrıca max. terimler cinsinden karşılıklarını da bulmaya çalışalım : (Değişkenler x,y,z olduğuna göre düzenlenecektir.)

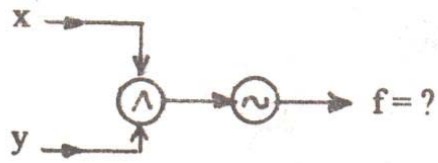
- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $f_1 = m_0 + m_1 + m_6 + m_7$ | e) $f_6 = m_2 + m_3 + m_4$ |
| b) $f_2 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ | f) $f_7 = m_1 + m_3 + m_5 + m_6$ |
| c) $f_3 = m_0 + m_2 + m_4 + m_6$ | g) $f_8 = m_4 + m_7$ |
| ç) $f_4 = m_0 + m_5 + m_6$ | ğ) $f_9 = m_1 + m_4 + m_7$ |
| d) $f_5 = m_1 + m_5 + m_7$ | h) $f_{10} = m_3 + m_4 + m_6$ |

Aşağıda bir gösteriliş tarzına göre çeşitli fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bunlardan hareket ederek fonksiyonu, uygun olan formda ifade ediniz : $f(x,y,z) = ?$

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $\sum 1,2,4,6$ | e) $\sum_0 1,4,5$ |
| b) $\sum 0,1,3,4,7$ | f) $\sum_0 0,2,3,6$ |
| c) $\sum 2,4,6,7$ | g) $\sum_1 1,2,4,7$ |
| ç) $\sum 0,3,6,7$ | ğ) $\sum_1 3,4,5$ |
| d) $\sum 3,5,6$ | h) $\sum_1 0,3,6,7$ |

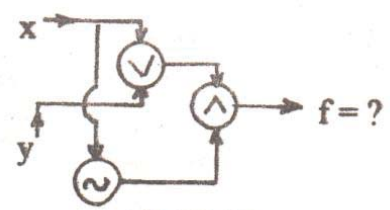
Aşağıda çeşitli lojik devreler görülmektedir. Her birinde tanımlanmış olan operatörlere bakarak *çıkış fonksiyonunu* ya da *fonksiyonlarını* bulunuz. Bu fonksiyonlara denk devreler bularak bunları çizmeye çalışınız. Aynı devrelerin çizimini, bölüm başında verilen *kapı elemanlarını* kullanarak yenileyiniz.

a)



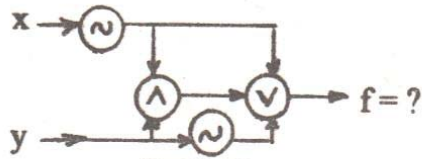
Şekil 43

b)



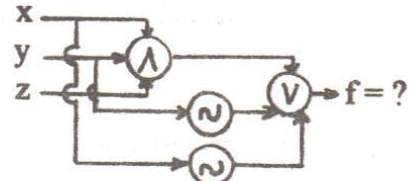
Şekil 44

c)



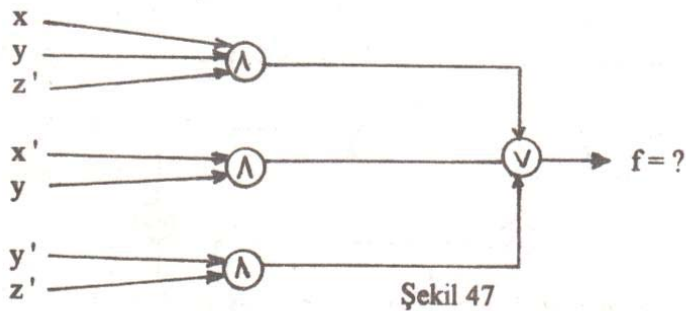
Şekil 45

ç)



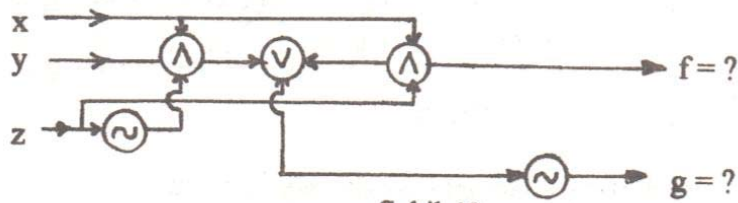
Şekil 46

d)



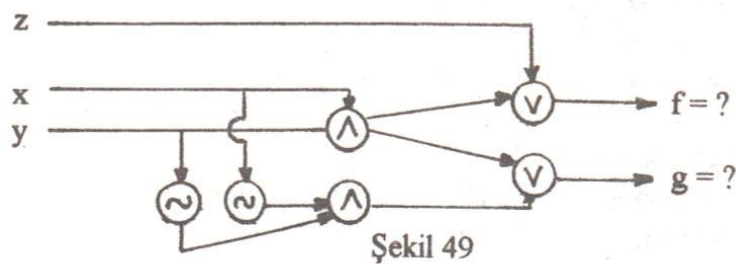
Şekil 47

e)



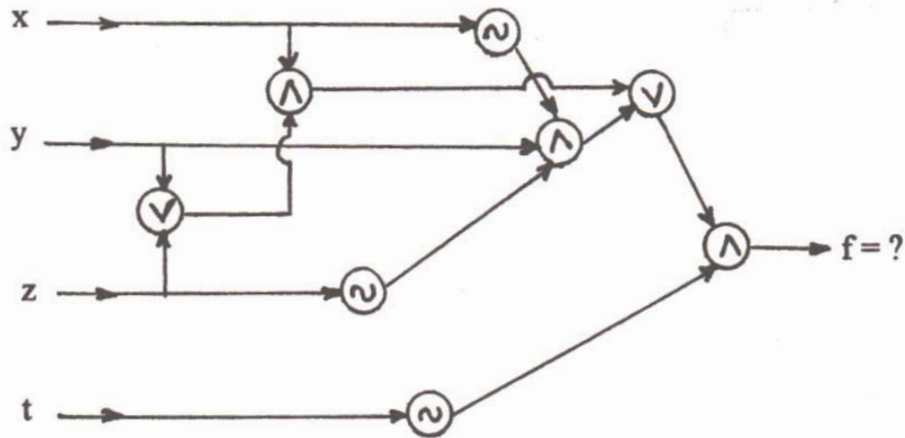
Şekil 48

f)



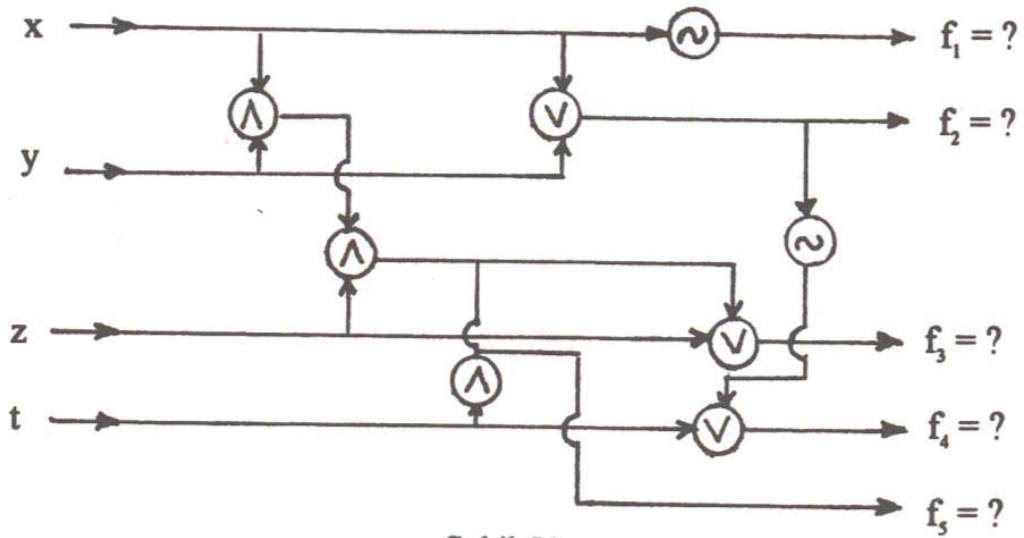
Şekil 49

g)



Şekil 50

ğ)



Şekil 51

Aşağıda verilmiş olan fonksiyonlara ait lojik devreleri çiziniz :

- a) $f(x,y) = [x \wedge (\sim x \vee y)] \vee \sim (x \wedge y)$
- b) $f(x,y) = x \vee \sim (x \wedge \sim y)$
- c) $f(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$
- ç) $f(x,y,z) = \sim (x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge z)$
 $g(x,y,z) = x \wedge \sim [(x \vee y) \wedge z]$
- d) $f(x,y,z) = \sim (x \vee y) \wedge (x \vee y \vee z)$
 $g(x,y,z) = x \wedge y \wedge z$

BÖLÜM 8

LOJİK DEVRELERİN İNDİRGENMESİ (MİNİMİZASYON)

8. 1. GİRİŞ VE TEMEL KAVRAMLAR

Boole fonksiyonlarıyla ilgili konuların içinde önemli sayılabilecek bir ayrıntı, bu fonksiyonların olabildiğince basit ifade edilmesini sağlayabilmektir. Bunun değişik amaçlarla nasıl gerçekleştirileceğine dair, önceki bölümlerde öngörülen çalışmalarımız anımsanmalıdır. Ancak burada konu, *komütasyon cebiri* 'nin bir devamı niteliğinde ele alındığından, öncekilerden farklı olan bazı yorumlara ve yöntemlere yer verilecek olması asla yadırganmamalıdır.

Ekonomik devre kavramı ile birlikte denk devre kavramlarını uygun ve uyumlu bir şekilde kullanarak temel alt yapıyı oluşturmuş oluruz. Öyleyse sözü edilmese bile, gerçekleştirilecek işlemlerde bu kavramlar kendiliğinden var sayılacaktır. Burada farklı olan lojik fonksiyonların *min.terimler* ya da *max.terimler* cinsinden ifade edilmeye çalışılarak sadeleştirilmesidir. Bu işlem için *indirgeme* deyiminin kullanılması, yapılacak işin sadece basitleştirme işleminden ibaret olmadığını belli etmek amacını gütmektedir. Bunun için, bazı kaynaklarda, *minimizasyon* deyiminin kullanıldığı da görülmektedir.

Boole fonksiyonlarının, tanımlanmış cebirsel normlar saklı kalmak koşuluyla indirgenebilmesi için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bunların başlıcalarını inceleyecek ve uygulamalarıyla bu yöntemleri en iyi şekilde tanımaya çalışacağız. Bunların incelenmesi, önceki bilgilerimizi gerektirmekle birlikte, başlıbaşına bir konu olarak ele alınması ve ayrı bir bölüm içinde geliştirilmesi yeğlenmiştir. Böylece konu, bir bütünlük oluşturacak ve kendi içinde özümmlenecektir.

Bu işlerin salt matematiksel oluşumu dışında, bir de uygulama alanında kullanılması düşüncesi vardır ki, fonksiyonlar üzerindeki bu gelişimlerin, özellikle *maliyet* unsuru gözönüne alındığında, önemi daha da artmaktadır. Mühendislik uygulamalarında belirli alanlarda bu fonksiyonlardan yararlanıldığı bilinmekte ; bilhassa tasarım ve üretim aşamasında bu yapılaşma dikkat çekmektedir.

Konunun gelişimi biraz da uygulamaya dönük olduğu için, belki de pek çok açıklama, yöntemlerin tanıtılması ve işlenmesi sırasında yapılacak ; yapılabilecektir. Bu nedenle konu bütünüyle yöntemlerden söz eder görünse de , satır aralarında önemli sayılacak açıklamalara ve oluşumlara yer verilmiş olacaktır.

Öncelikle, önceden bildiğimiz anlamda, örnekleme yoluyla bazı basitleştirme (indirgeme) problemlerine yer verilmiş olacaktır. Bunlar işlenirken *analiz yöntemi* olarak adlandırdığımız bir çalışmayı yinelemiş olacağız. Bu amaçla aşağıdaki örnekleri inceliyoruz.

8. 2. ANALİZ YÖNTEMİ

Bu yöntemde işlemler ardışık olarak sürdürülür ve bu sırada önceden edinilmiş bilgilerin ve ilişkilerin uygun olanlarının tümü, yerine göre kullanılır. Oluşan bir dizi denklik sonunda, amaca uygun fonksiyon görüldüğünde işlem durdurulur. Bu işlemler sırasında önceden bir işlem dizisi ya da yolu önermek olanaksızdır. Her problem için bağımsız düşünceler üretmek gerekir. Demek ki, bu çalışma sırasında başarılı olmak için önceki bilgilere ve alt yapıya egemen olmak gerek- mektedir.

ÖRNEK. 1. Aşağıdaki fonksiyonları basitleştirerek ifade edelim :

$$a) f(x,y) = x + x' y = (x + x') (x + y) = 1 \cdot (x + y) = x + y$$

$$b) f(x,y) = x y + x y' = x (y + y') = x \cdot 1 = x$$

$$c) f(A,B) = (A + B)' \cdot (A' + B') = (A' \cdot B') \cdot (A' + B') = A' B' A' + A' B' B' = A' B' + A' B' = A' B'$$

$$d) f(x,y) = (x + y)(x + y') = x \cdot x + x \cdot y' + x \cdot y + y \cdot y' = x + x (y + y') + 0 = x$$

ÖRNEK. 2. $f(x,y,z) = (x' + y + z') \cdot (x + y + z')$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonu sadeleştirilmiş bir biçimde ifade edelim.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x' + y + z') \cdot (x + y + z') \\ &= x x' + (x + x') (y + z') + (y + z') (y + z') \\ &= 0 + 1 \cdot (y + z') + y + z' \\ &= (y + z') + (y + z') \\ &= y + z' \end{aligned}$$

ÖRNEK. 2. $f(x,y,z) = x y z + x y' z + x y z' + x y' z'$ fonksiyonunu en basit şekilde ifade edelim.

Min. terimleriyle verilmiş bu fonksiyonun sadeleştirilmesi için, aşağıda görülen işlemler yapılmıştır :

$$\begin{aligned}
 f(x,y,z) &= x y z + x y' z + x y z' + x y' z' \\
 &= x (y + y') z + x (y + y') z' \\
 &= x . 1 . z + x . 1 . z' \\
 &= x (z + z') \\
 &= x . 1 \\
 &= x
 \end{aligned}$$

olur.

8.3. ASAL BİLEŞENLER

n değişkenli bir Boole fonksiyonu $f(x_1, \dots, x_n)$ olsun. Bu fonksiyona mantıksal olarak karşılık gelen ifade ϕ ile gösterilirse ; eğer fonksiyon ϕ nin içerdiği herhangi bir temel birleştiriciyle mantıksal olarak ifade edilemezse, ϕ *temel birleştiricisine f nin asal bileşen* ' i denir. Yani bu, f nin bir asal bileşeninin, aynı zamanda f ye denk olan herhangi bir mantıksal ifadenin de asal bileşeni olduğunu ifade etmektedir.

Konuya yeteri kadar açıklık getirmek üzere, aşağıdaki örnekleri inceleyelim :

ÖRNEK.1. $f(x,y,z) = xy + xy'z + x'y'z$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonda $x.z$, mantıksal olarak $f(x,y,z)$ nin *asal bileşeni*'dir.

$$\begin{aligned}
 f(x,y,z) &= x y + x y' z + x' y' z \\
 &= x y + (x + x') y' z \\
 &= x y + 1 . y' z \\
 &= x y + y' z = \phi(x,y,z)
 \end{aligned}$$

olur. Burada iddia $x.z$ nin asal bileşen olduğundan ibarettir ve bu da ϕ nin içinde, y nin dışında kalan değişkenler olarak görülmektedir. Burada $x.z$, mantıksal olarak f fonksiyonunu ifade ederken, tek başlarına x ve z, ayrı ayrı fonksiyonu ifade edemezler. Fonksiyonun diğer asal bileşenleri $x.y$ ve $y'.z$ dir. Ancak bu aşamada henüz her şey tam bir berraklık kazanmış değildir.

ÖRNEK. 2. $f(x,y,z) = [y \wedge (\sim x \vee \sim z)] \vee [\sim y \wedge (x \vee z)]$ fonksiyonu veriliyor. Fonksiyon, mantıksal olarak,

$$(x \wedge \sim y) \vee (\sim y \wedge z) \vee (\sim x \wedge y) \vee (y \wedge \sim z)$$

ye denktir. ϕ ile gösterilen bu fonksiyonda asal bileşenler :

$$x \wedge \sim y ; \sim y \wedge z ; \sim x \wedge y ; y \wedge \sim z ; x \wedge \sim z ; \sim x \wedge z$$

olarak görülmektedir. Fonksiyonun *ayırıcı normal form'da (dnf)* düzenlenmiş olduğuna dikkat edilmelidir.

Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için, aşağıdaki teorem incelenmelidir :

TEOREM : F nin herhangi bir minimal Φ ayırıcı normal formu, fonksiyonun bir ya da birden fazla asal bileşeninin ayırıcısıdır.

Kanıt : ϕ , Φ nin ayırıcısı olsun. Eğer ϕ , F nin asal bileşeni değilse bu takdirde ϕ mantıksal olarak F yi ifade edecek şekilde ϕ , ϕ temel birleştiricisini içermiş olacaktır. Eğer ϕ yerine ϕ yazılarak Φ^* elde edilirse açıkça görülecektir ki Φ^* mantıksal olarak Φ ye denktir. Daha öz bir biçimde ifade edilirse, fonksiyonun bir minimal tam ayırıcı normal formunun, F nin tüm asal bileşenlerinin ayırıcısı olmasını gerektirmediği görülür.

Uyarı : Mantıksal olarak F formunda, yani ayırıcı normal formda (dnf) ifade edilen her temel birleştirici, F nin bir asal bileşenini içermelidir.

8. 4. TÜM ASAL BİLEŞENLERİN BULUNMASINDA QUINE - Mc CLUSKEY YÖNTEMİ

İfade formu F ile gösterilen bir fonksiyonda, ϕ_1 ve ϕ_2 temel birleştiriciler ise, bu takdirde F ancak ve ancak bu temel birleştiricileri içerir ve ϕ_1 deki harfler (değişkenler) F de bulunan harflerdense, ϕ_1 , F ye bağlı olarak ϕ_2 nin tamamlayıcısıdır.

ÖRNEK. F : $(x \wedge \sim y \wedge z) \vee (x \wedge t) \vee (\sim x \wedge y)$ verilen form olsun. Burada temel birleştiricilerden biri $\phi_1 = \sim x \wedge z$ olsun. Buna göre F ye bağlı olarak ϕ nin dört bütünleyeni (tamamlayıcısı) vardır ki bunlar,

$$x \wedge y \wedge \sim z \wedge t ; x \wedge y \wedge \sim z \wedge \sim t ; x \wedge \sim y \wedge \sim z \wedge \sim t ; x \wedge \sim y \wedge \sim z \wedge t$$

olarak görülürler. Dikkat edilirse temel birleştiricilerden biri $\sim x \wedge z$ olarak seçilmiştir. Oysa ϕ nin yukarıdaki dört bütünleyeninin hepsinde bu değişkenler ancak tümleyenleriyle temsil edilmektedirler. $\sim x$ yerine x ; z yerine de $\sim z$

gelmiş olarak yapılan düzenlemelerdir. Diğer iki değişkenin de olası değişik durumları, ancak dört farklı ifadeye olanak verebilmektedir.

Yardımcı Teorem I. Φ ile tam ayırıcı normal form temsil edilmiş olsun. Burada ϕ ile Φ deki tüm harfleri içeren bir temel birleştirici tanımlanmıştır. Φ ye bağlı olarak ϕ nin tüm bütünleyenleri Φ nin ayırıcılarıysa, ϕ mantıksal olarak Φ yi ifade eder.

Tam ayırıcı normal form (dnf), bilindiği gibi min.terimli yazılışa karşı gelmektedir. Bu form içinde *temel birleştirici* belirlenmişse bu forma uygun bir yapıdadır. Dolayısıyla ϕ ile seçilmiş ve tanımlanmış olan temel birleştiricinin bütünleyeni (bütünleyenleri) ayırıcı normal forma karşılık gelen max.terimler cinsinden oluşursa, bu, formların dönüşümü ilkesinden hareketle, mantıksal olarak Φ den farklı bir şey olamaz. Burada *mantıksal* sözcüğü, form farkının eş anlamlılığını anlatmak için kullanılmıştır.

ϕ ile, tüm değişkenleri (harfleri) içeren bir temel birleştirici tanımlanıyorsa, bu form için bir model oluşturur. Biliyoruz ki *tam formlar'* da bileşenler (ya da çarpanlar) tüm değişkenleri (harfleri) içerirler. Öyleyse böyle seçilmiş bir ϕ formun bir bileşenidir. Bunun bütünleyenleri, form farkına rağmen, bütün öğeleriyle yine Φ formuna mantıksal olarak ulaşacaktır.

Yardımcı Teorem II. Eğer F formu bir *totoloji* değilse, F nin hiçbir asal bileşeni, F de olmayan herhangi bir değişkeni (harfi) içermez.

TEOREM : Φ ile totoloji olmayan bir tam ayırıcı normal form (dnf) temsil edilmiş olsun. ϕ ile de bazı temel birleştiriciler gösterilmiş olsun. Ancak ve ancak ;

- (i) ϕ nin tüm harfleri Φ nin de harfleriyse ;
- (ii) Φ ye bağlı olarak ϕ nin tüm bütünleyenleri Φ nin ayırıcıları olduğu halde ϕ deki başka bir temel birleştirici bu özelliğe sahip değilse ; ϕ , Φ nin bir *asal bileşeni'* dir.

Kanıt : Yardımcı teorem I ve II dikkate alınarak, doğrudan gerçekleştirilebilir.

Φ ile totoloji olmayan tam ayırıcı normal form temsil edilmiş olsun. Φ nin tüm asal bileşenlerinin Quine - Mc Cluskey yöntemiyle bulunmasında aşağıdaki algoritma kullanılacaktır :

Φ ile $\psi_1 \vee \dots \vee \psi_k$ formu temsil edilmiş olsun.

- (1) İlk yapılacak iş bileşenleri, yani $\psi_1, \dots, \psi_k$ yı listelemek olmalıdır.
- (2) Eğer iki temel birleştirici ϕ de ve ω da benzer fakat birinde bir değişkenin değili varsa, listeye ω dan farklı olan değişkeni çıkararak, bu şekilde elde edilen birleştiriciyi ekleyiniz. ϕ ve ω nın yanına kontrol edildi anlamında ✓ işaretini koyunuz (çek etmek) .
- (3) Uygulanabildiği sürece (2) yi devam ettiriniz. Kontrol edilmiş olan yani ✓ almış olan temel birleştiriciler, (2) nin tekrarlı uygulaması sırasında kullanılabilir.

Sonuç listesinde, kontrol edilmemiş yani çek edilmemiş olan temel birleştiriciler, Φ nin asal bileşenleridir.

ÖRNEK . 1 . $\Phi : xyz' + xy'z + x'yz + x'y'z + x'y'z'$ olsun.

$$\begin{aligned}\psi_1 &: x y z' \\ \psi_2 &: x y' z \\ \psi_3 &: x' y z \\ \psi_4 &: x' y' z \\ \psi_5 &: x' y' z'\end{aligned}$$

demektir. Burada fonksiyon, min-terimler cinsinden ifade edilmiştir. Gerçekte aynı fonksiyon lojik anlatımla

$$(x \wedge y \wedge \sim z) \vee (x \wedge \sim y \wedge z) \vee (\sim x \wedge y \wedge z) \vee (\sim x \wedge \sim y \wedge z) \vee (\sim x \wedge \sim y \wedge \sim z)$$

şeklinde de gösterilebilirdi. Önceki bilgilerimizden yararlanarak, bu iki formun görünüşünün farklı olmasına karşın içeriklerinin aynı olduğunu biliyoruz. Öyleyse biri için yapılacak çalışma ve elde edilen sonuç diğerine de ait olacaktır. Yazış ve ifade kolaylığı nedeniyle ilk ifade biçimi yeğlenmiştir.

(2) nin uygulanması sonucunda :

$x y z'$		
$x y' z$	✓	$y' z$
$x' y z$	✓	$x' z$
$x' y' z$	✓	$x' y'$
$x' y' z'$	✓	

elde edilir. Böylece *asal bileşenler'* in xyz' , $y'z$, $x'z$, $x'y'$ oldukları anlaşılmış olur. Buradan görülüyor ki, ikinci grup elde edildikten sonra devam edilmemiş olması, üç bileşende de değişkenlerin tamamının bulunmamış olmasıdır.

ÖRNEK. 2. $\Phi : x y z t + x y z' t + x y' z' t + x y z' t' + x' y z' t' + x' y z' t' + x' y' z' t'$

olsun. (1) . liste :

$x y z t$	$x y z' t$	$x y' z' t$	$x' y' z' t$
	$x y' z t$	$x y z' t'$	$x' y z' t'$
		$x' y z t'$	

şeklinde oluşur. Bu liste oluşturulurken birinci sütunda değişkenlerin hiçbirinde olumsuzluk yoktur. İkinci sütundaki bileşenlerde birer olumsuzluk, üçüncü sütundakilerde ikişer olumsuzluk ve son yani dördüncü sütunda da üçer olumsuzluk bulunan bileşenlerin bir araya getirilmesine özen gösterilmiştir.

Ayırıcıların sırf değilleme sayısına bakarak yapılan bu düzenleme sonrasında, uygulamanın (2). aşaması değilli ve değilsiz iki çiftin karşılaştırılması için kullanılacağından, bu aşamada yukarıda oluşan gruplar karşılaştırılacaktır :

$x y z t$ ✓	$x y t$ ✓	$x t$
	$x z t$ ✓	
$x y z' t$ ✓		
$x y' z t$ ✓	$x z' t$ ✓	
	$x y z'$	
$x y' z' t$ ✓	$x y' t$ ✓	
$x y z' t'$ ✓		
$x' y z t'$ ✓	$y' z' t$	
	$y z' t'$	
$x' y' z' t$ ✓	$x' y t'$	
$x' y z' t'$ ✓		

olur. (2) şıkkı daha fazla uygulanamaz. Yukarıdaki liste oluşturulurken ilk iki sütun (2) nin birinci uygulamasıyla ; ikinci sütundan üçüncü sütuna geçerken de (2) nin ikinci kez uygulanmasından yararlanılmıştır. Böylece ilk örnektekinden farklı olarak, bir ardışık işlem daha yapılabileceği gösterilmiştir. Bu sütunlar oluşurken kullanılan bileşenler okeylenerek ✓ ile işaretlenmiş ve kullanılmayanlar böylece belirlenmiştir. Şimdi bu açıklamalar ışığında, Φ ile temsil edilmiş olan ifadenin asal bileşenlerinin

$x y z' ; y' z' t ; y z' t' ; x' y t' ; x t$

oldukları söylenebilecektir. Bu iki çalışma yani örnek sonrasında, kuramsal olarak verilen açıklamalar da dikkate alınarak, aşağıdaki bilgilere ulaşılır :

- * Listedeki tüm temel birleştiriciler, mantıksal olarak Φ yi ifade eder.
- * Φ nin her bir ψ asal bileşeni, kontrol edilmemiş olarak elde edilir.
- * Asal bileşen olmayan hiçbir ψ temel ayırıcısı , kontrol edilmemiş olarak elde edilir.
- * Bu işlemler için önemli bir koşul : tam olmayan ayırıcı form verildiği zaman, onun mutlaka tam ayırıcı normal forma çevirilerek işleme sokulmasıdır.

8.5. ASAL BİLEŞEN TABLOLARI VE BOOLIEN YÖNTEMİ

Φ ile gösterilen formda, öncelikle, Φ nin hangi asal bileşenlerinin, tam ayırıcı normal formun (dnf) minimali olduğunun bulunması gerekmektedir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem önemlidir :

TEOREM. Φ totoloji olmayan, tam ayırıcı normal form (dnf) olsun. ψ ise ayırıcı normal formu temsil etsin. Eğer ψ , Φ için bir minimal ayırıcı normal form ise o zaman Φ nin her bir ayırıcısı ψ nin bir ayırıcısını içerir.

Asal bileşenlerin ψ ayırımı o şekilde seçilmiş olsun ki Φ tam ayırıcı normal formun her bir ayırıcısı ψ nin bir ayırıcısını içermiş olsun. Tüm ψ ler içinden minimal olanlar bulunacaktır. Bu ise bazı teknik çalışmaları gerektirmektedir. Bu teknikler hakkında yeteri kadar bilgi aşağıda verilmiş olacaktır.

Φ nin her bir asal bileşeni için bir satır ; Φ nin her bir ayırıcısı için bir sütun açmak üzere bir matris düzenlenmiş olsun. Φ içindeki asal bileşenler ϕ ile ve Φ içindeki ayırıcılar da ψ ile gösterildiğine göre bunların kesiştiği yere bir $\times$ işareti konacaktır. Bu açıklamalar aşağıdaki örneklerle daha iyi pekişmiş olacaktır. Bu matrise, *Φ nin asal bileşenleri tablosu* denir.

ÖRNEK. 1. $\Phi : x y' z + x' y z' + x y z' + x y z$ olsun. Quine-Mc Cluskey yöntemi kullanılırsa ,

$x y z$	✓	
		$x z$
$x y' z$	✓	
$x y z'$	✓	$x y$
$x' y z'$	✓	$y z'$

elde edilir. Böylece, Φ nin asal bileşenlerinin xz , xy , yz' oldukları anlaşılır.

Asal bileşenler tablosu aşağıda olduğu gibi düzenlenecektir. Bu bir matris olarak görülecektir :

	$x y z$	$x y' z$	$x y z'$	$x' y z'$
$x z$	$\times$	$\times$		
$x y$	$\times$		$\times$	
$y z'$			$\times$	$\times$

Bu tablodan anlaşıldığına göre, $x y' z$ ve $x' y z'$ sütunlarının her biri tek bir işaret içerir. Böylece $x z$ ve $y z'$ çekirdeğe aittir. Buna karşın $x z$ ve $y z'$ ye karşılık gelen satırlar tüm sütunlara karşılık gelen işaretlere sahiptirler. Böylece Φ için $x z + y z'$ tek bir minimal ayırıcı normal formdur.

Öz (Çekirdek) İşlemi : Yukarıdaki açıklama sırasında kullanılmış olan bir de-yime dikkat edilmelidir ki bu deyim *çekirdek'* tir. Burada, *öz* ya da *çekirdek* olarak adlandırılan işlem nedir ; ne anlama gelmektedir ?

Φ nin, ψ sütununun altında tek bir $\times$ işareti bulunmuş olsun. Burada önceden kullandığımız anlamda ψ ayırıcı formu temsil etmektedir. ϕ de bu $\times$ işaretine karşılık gelen asal bileşen olsun. ϕ , Φ nin *çekirdeğine* aittir. Yukarıdaki teoreme göre ϕ , Φ nin her minimal tam ayırıcı formunun bir ayırıcısı olması gerekir. ϕ ye karşılık gelen satır ve aynı zamanda ϕ ye karşılık gelen satırdaki $\times$ işareti bulunan sütunlar çıkartılır.

ÖRNEK. 2. $\Phi : x y z t + x y z' t + x y z' t' + x y' z t + x' y z t + x' y z t' + x' y z' t + x' y' z' t$ olarak verilmektedir. Asal bileşenleri bulmak istiyoruz.

$x y z t$	✓	$x y t$	✓	$y t$
		$x z t$		
$x y z' t$	✓	$y z t$	✓	
$x y' z t$	✓			
$x' y z t$	✓			
		$x y z'$		
$x y z' t'$	✓	$y z' t$	✓	
$x' y z t'$	✓	$x' y z$		
$x' y z' t$	✓	$x' y t$	✓	
		$x' z' t$		
$x' y' z' t$	✓			

olur. Bu tablo düzenlenirken, değilli sayısına bakılarak bileşenler kendi aralarında gruplar oluşturacak şekilde bir düzen kurulmuş olmaktadır. Gruplar arasındaki boşluklar, değil sayısının artmasına karşı bloklar daha belirgin olsun diye bırakılmıştır. Diğer taraftan, önceden verilen kural ve açıklamalar doğrultusunda işleme giren (girebilen) bileşenler ✓ işareti konarak belirtilmiş olmaktadır. Bütün bunlardan sonra, yukarıdaki düzenlemeye bakarak, Φ nin asal bileşenlerinin $y t$, $x' z' t$, $x' y z$, $x y z'$, $x z t$ oldukları söylenebilecektir. Bunlar yukarıdaki düzenekte yanlarında ✓ işareti bulunmayanlardır. Bu probleme ait asal bileşenler tablosu ise aşağıdadır :

	$xyzt$	$xyz't$	$xyz't'$	$xy'zt$	$x'yz't$	$x'yz't'$	$x'yz't$	$x'y'z't$
$y t$	×	×			×		×	
$x' z' t$						$ \times $		$\otimes$
$x' y z$				$ \times $		$\otimes$		
$x y z'$		$ \times $	$\otimes$					
$x z t$	$ \times $			$\otimes$				

Tablo düzenlenirken bu kez biraz daha farklı bir işaretleme yapıldığı görülmektedir. $\times$ ile yetinilmeyip bu kez $| \times |$ ile $\otimes$ sembollerinin de işleme katıldığı görülmektedir. Peki, bunlar ne anlama gelmektedir ; ne amaçla kullanılmıştır ?

$\otimes$ işaretleme sembolüyle, verilen sütunda tek olanlar gösterilmişlerdir. Tabloda $x y z' t'$, $x y' z t$, $x' y z t'$, $x' y' z' t$ bu tür sütunlar olarak görülmektedir. Böylece, $x y z'$, $x z t$, $x' y z$ ve $x' z' t$ çekirdekte olurlar. Bir satırda işaretleme için $\otimes$ sembolü kullanılmışsa, artık, varsa diğerlerini işaretlemek için $| \times |$ sembolü kullanılacaktır. Tabloda da görüldüğü gibi, bir satırda eğer $\otimes$ sembolü varsa $| \times |$ da vardır.

Bu çıkarımlara göre, böylece Φ nin her ayırıcısı, çekirdekteki bir asal bileşeni içerir. Buna göre, Φ nin tek minimal ayırıcı normal formu :

$$x y z' + x z t + x' y z + x' z' t$$

olarak belirlenecektir.

Yukarıdaki iki örnekteki sonuçlar beklendiği gibi gerçekleşmiştir. Bazı durumlarda bu işlemler yeterli olmayabilir. Aşağıda buna dair açıklamalar verilmiştir :

8. 5. 1. Baskın Sütun İşlemi

Yukarıda görüldüğü gibi matrisiel anlamda düzenlenmiş bir bileşenler tablosunda sütunlardan biri s_1 ve sütunlardan bir diğeri s_2 olsun. Eğer s_1 sütununun bütün sıraları $\times$ ile işaretlenmiş, buna karşın s_2 sütununda bir tek $\times$ varsa s_1 sütunu elemine edilecektir. Yukarıda yol gösterici anlamında verilmiş olan teremin koşullarını sağlamak için, s_2 sütununun temel birleştiricisinde yer alan asal bileşen kullanılmalıdır. Varsayım olarak aynı asal bileşen, s_1 sütununun temel birleştiricisine eklenmelidir.

8. 5. 2. Baskın Satır İşlemi

Asal bileşenleri ψ_i ile gösterdiğimiz anımsanmalıdır. Buna göre, eğer diyelim ki ψ_1 bileşenine karşılık gelen satırın her sütununda $\times$ işareti varken, ψ_2 bileşenine karşılık gelen satırda sadece bir tek $\times$ işareti bulunuyorsa ve ψ_1 deki harf sayısı ψ_2 den küçükse, ψ_2 ye karşılık gelen satır elemine edilir.

ÖRNEK.

$xyzt+xy'zt+x'yz't'+x'yz't'+x'yz't'+xyzt'+xy'zt'+xy'z't+x'yzt+x'yz't+xy'z't'$

fonksiyonu veriliyor. İlk iş olarak asal bileşenler belirlenmelidir :

$x y z t \quad \checkmark$	$x z t \quad \checkmark$	xz
	$x y z \quad \checkmark$	yz
$x y' z t \quad \checkmark$	$y z t \quad \checkmark$	
$x y z t' \quad \checkmark$		xy'
$x' y z t \quad \checkmark$	$x y' z \quad \checkmark$	$x'y$
	$x y' t \quad \checkmark$	
$x' y z t' \quad \checkmark$	$y z t' \quad \checkmark$	
$x y' z t' \quad \checkmark$	$x z t' \quad \checkmark$	
$x y' z' t \quad \checkmark$	$x' y z \quad \checkmark$	
$x' y z' t \quad \checkmark$	$x' y t \quad \checkmark$	
$x y' z' t' \quad \checkmark$	$x' y t' \quad \checkmark$	
$x' y z' t' \quad \checkmark$	$x y' t' \quad \checkmark$	
	$x y' z' \quad \checkmark$	
$x' y' z' t' \quad \checkmark$	$x' y z' \quad \checkmark$	
	$y' z' t' \quad \checkmark$	
	$x' z' t' \quad \checkmark$	

Bu şekilde asal bileşenlerin : $y'z't'$, $x'z't'$, xz , yz , xy' , $x'y$ oldukları belirlenmiştir. Buna bağlı olarak düzenlenmiş asal bileşenler tablosu aşağıdadır :

	$xyzt$	$xy'zt$	$xyzt'$	$xy'zt'$	$x'yz't'$	$xyzt$	$xy'zt$	$xy'zt'$	$x'yz't$	$x'yz't'$	$x'y'zt'$
$y'z't'$				$\times$							$\times$
$x'z't'$					$\times$						$\times$
xz	$\times$	$\times$				$\times$	$\times$				
yz	$\times$		$\times$			$\times$			$\times$		
xy'		$ \times $		$ \times $			$ \times $	$\otimes$			
$x'y$			$ \times $		$ \times $				$ \times $	$\otimes$	

Bu tabloda yer alan bileşenlerden (min.terimlerden) $xy'zt'$ ile $x'yz't'$ sütunları bir tane $\times$ bulundurduklarından, bunu özellikle belirtmek için bir özel sembol kullanılarak $\otimes$ ile işaretlenmişlerdir. (Tablodaki 8. ve 10. sütunlarda) Böylece xy' ile $x'y$ nin çekirdeğe ait oldukları anlaşılır. Her ikisinde de $z't$ nin var olduğuna dikkat edilmelidir. Bu belirlemeye göre, xy' ve $x'y$ satırlarındaki $\times$ işareti iki çizgi arası içinde gösterilmiştir. Bu yoruma göre $\otimes$ ve $|\times|$ işaretini içeren tüm sütunlar atılırsa, oluşacak yeni tablo aşağıdaki gibi görülecektir :

	$xyzt$	$xyzt'$	$x'y'zt'$
$y'z't'$			$\times$
$x'z't'$			$\times$
xz	$\times$	$\times$	
yz	$\times$	$\times$	

Bu tabloda, ilk iki sütundaki $\times$ ile işaretleme birbirinin aynıdır. Bu özellik dikkate alınırsa, *baskın sütun işlemi* gereğince, biri atılabilecektir. Örneğin ikinciye yani $xyzt'$ yü almamış olalım. Bu açıklamadan sonra, ortaya çıkması gereken tablo aşağıda görülmektedir :

	$xyzt$	$x'y'zt'$
① $y'z't'$		$\times$
② $x'z't'$		$\times$
③ xz	$\times$	
④ yz	$\times$	

İşlemlerimizin hiçbiri bu tabloya uygun görülmemektedir. Buna rağmen, istenilen minimal ayırıcı normal form için her sütun, bazı ayırıcıları içermektedir. Buna bağlı olarak, numaralanmış satırlara göre ifade edilirse,

$$[\textcircled{1} \vee \textcircled{2}] \wedge [\textcircled{3} \vee \textcircled{4}]$$

olmalıdır. Bu ise mantıksal olarak

$$\{[\textcircled{1} \wedge \textcircled{3}] \vee [\textcircled{1} \wedge \textcircled{4}]\} \vee \{[\textcircled{2} \wedge \textcircled{3}] \vee [\textcircled{2} \wedge \textcircled{4}]\}$$

ile ortaya konan bileşime denk olur. Buraya geçişte dağılma özelliğinin uygulandığı ve *normal biçimde* bir ifade elde edildiği görülmektedir. Artık asal bileşenleri seçmek sırası gelmiştir. Ancak burada görüyoruz ki dört farklı yol vardır ve bir ayırım yapmaksızın bu dört form aşağıda olduğu gibi oluşur :

$$\begin{aligned} * & \quad x y' + x' y + y' z' t' + x z \\ * & \quad x y' + x' y + y' z' t' + y z \\ * & \quad x y' + x' y + x' z' t' + x z \\ * & \quad x y' + x' y + x' z' t' + y z . \end{aligned}$$

Satırların numaralanması ve bu yolla ilişkilerin açıklanması, *Boolien Yöntem* olarak adlandırılmaktadır.

Bunlar, minimal ayırıcı normal formun olası tüm ifadelerini göstermektedirler. Hepsi de aynı değeri taşıdıklarından, dördü de minimal tam ayırıcı normal form' durlar. Yani bunlardan herhangi biri problemin yanıtını oluşturmaktadır.

ÖRNEK .2. Φ ile aşağıdaki form temsil edilmiş olsun.

$$xyzt + xyz't + x'yz't + xyz't' + xy'z't + x'yz't' + x'yz't' + x'y'z't' + x'y'z't'$$

Asal bileşenleri bulmak üzere aşağıda görülen çalışmayı yapalım :

xyzt ✓	xyt ✓	yt
xyz't ✓	yz't ✓	xz'
x'yz't ✓	xyz' ✓	
xyz't' ✓	xz't ✓	
xy'z't ✓	yz't ✓	
x'yz't' ✓	x'yz	
x'yz't' ✓	x'yt ✓	
xy'z't' ✓	xz't' ✓	
x'y'z't' ✓	xy'z' ✓	
x'y'z't' ✓	x'zt'	
	y'z't'	
	x'y't'	

Bu düzenek yardımıyla asal bileşenlerin : $x'yz$, $x'zt'$, $y'z't'$, $x'y't'$, yt , xz' oldukları saptanabilecektir. Buna uyan bileşenler tablosu aşağıdadır :

	$xyzt$	$xyz't$	$x'yz't$	$xyz't'$	$xy'z't$	$x'yz't'$	$xy'z't'$	$x'y'z't'$	$x'y'z't'$
$x'yz$			$\times$			$\times$			
$x'zt'$					$\times$		$\times$		
$y'z't'$							$\times$		$\times$
$x'y't'$								$\times$	$\times$
yt	$\otimes$	$ \times $	$ \times $			$\otimes$			
xz'		$ \times $		$\otimes$	$\otimes$		$ \times $		

Bu tablo düzenlenirken, öncekilerde olduğu gibi, sütununda tek olan $\times$, bu niteliği belli olsun diye burada da $\otimes$ ile işaretlenmiştir. Bu tablodan yt ve xz' nün çekirdekte oldukları anlaşılmaktadır. Bu oluşuma göre, son iki satırı ve $\otimes$ ve $|\times|$ bulunduran sütunları ortadan kaldırarak yeni bir tablo düzenlersek, aşağıdaki tablo ortaya çıkar. Bu tabloyu uygularken (yorumlarken) Boolien Yöntemi kullanabilmek için de satırları numaralayalım :

	$x'yz't'$	$x'y'z't'$	$x'y'z't'$
① $x'yz$	$\times$		
② $x'zt'$	$\times$	$\times$	
③ $y'z't'$			$\times$
④ $x'y't'$		$\times$	$\times$

elde edilir. Boolien Yöntem gereğince :

$$[\textcircled{1} \vee \textcircled{2}] \wedge [\textcircled{2} \vee \textcircled{4}] \wedge [\textcircled{3} \vee \textcircled{4}]$$

bulunur. Ancak bu istenilen formda değildir. Bu form cebirsel ifade edilirse max. terimler için yazılmış olur. Oysa min.terimler cinsinden ifade edilmesi gerekmektedir. Bunu sağlamak üzere, dağılma özelliği uygulanarak, yeni bir düzenleme yapılırsa, aşağıdaki mantık ifadesi bulunur :

$$[\textcircled{1} \vee \textcircled{2}] \wedge [\textcircled{2} \vee \textcircled{4}] \wedge [\textcircled{3} \vee \textcircled{4}] \equiv [\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \wedge \textcircled{3}] \vee [\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \wedge \textcircled{4}] \vee [\textcircled{1} \wedge \textcircled{4}] \vee [\textcircled{1} \wedge \textcircled{3} \wedge \textcircled{4}] \vee [\textcircled{2} \wedge \textcircled{3}] \vee [\textcircled{2} \wedge \textcircled{4}] \vee [\textcircled{2} \wedge \textcircled{3} \wedge \textcircled{4}] .$$

Tablodaki düzenekten anlaşılır ki, ② kullanılırsa ① e gerek yoktur. Benzer

şekilde, ④ kullanılırsa ③ e gerek yoktur. Bu husustaki kural daha önce verilmiş ve uygulanmıştır. (Önceki örneği inceleyiniz.) Bu yoruma göre,

$$[\textcircled{2} \wedge \textcircled{3}] \vee [\textcircled{2} \wedge \textcircled{4}] \vee [\textcircled{1} \wedge \textcircled{4}]$$

olur. Böylece minimal ayırıcı normal form için üç seçenek oluştuğu anlaşılır. Bunlar ise ,

$$\begin{aligned} & y t + x z' + x' z t + y' z' t' \\ & y t + x z' + x' z t' + x' y' t' \\ & y t + x z' + x' y z + x' y' t' \end{aligned}$$

şeklinde sıralanacaktır. Hepsi aynı değerdedir ve herbiri Φ için, minimal ayırıcı normal formu temsil eder.

8. 5. 3. Dallanma Yöntemi

Bu tamamen uygulamaya dönük açıklamaları gerektirdiğinden, önceki örneğin sonucunu da içerecek şekilde, yorumlanmış bazı yeni düzenlemelerle bir yöntem geliştirilmiş olmaktadır ki bu *dallanma yöntemi* olarak adlandırılmakta ve ne şekilde uygulanacağı ve buna dair ayrıntılar aşağıda açıklanmaktadır :

- En az işaret taşıyan sütun alınır.
- Birden çok işaret var ve bunların sayısı eşitse, istenilen biri seçilebilir. Örneğimizde (yukarıdaki örnek) her sütunda iki işaret bulunduğundan bunlardan biri seçilebilir. Örneğin ilk sütunu yani $x' y z t'$ yi alalım.
- Asal bileşen oluşturmak için bunun bir parçası alınıp, olmayan değişkene göre türetilir. Örneğin burada $x' y z$ veya $x' z t'$ den biri kullanılabilir. Böylece iki tablo elde edilmiş olur.
- Genel anlamda bir sütunda n tane işaret varsa n tane tablo elde edilir.

	$x' y' z t'$	$x' y' z' t'$
$x' z t'$	×	
$y' z' t'$		×
$x' y' t'$	×	×

Tablo 1

	$x' y' z' t'$
$x' y z$	
$y' z' t'$	×
$x' y' t'$	×

Tablo 2

Tablo 1 de $x' y z$ nin ayırıcı olduğu varsayılmıştır. Bu nedenle $x' y z$ satırını

ve buna karşılık gelen işareti bulunduran sütunları çıkarıyoruz. Tablo 2 de aynı işlemleri $x' z t'$ için yapmış bulunuyoruz.

Tabloların bu şekilde çeşitlenerek, indirgeme işlemini bunlar üzerinde düzenleme işlemi bir yöntem olarak benimsenirse, buna *dallanma yöntemi* adı verilir.

Yukarıdaki tabloya Boolien ya da Dallanma yöntemlerini uygulamaya devam edebiliriz. Burada $x' y' t'$ nün minimal olduğu açıktır. Tablo 2 dense ya $y' z' t'$ ya da $x' y' t'$ yi seçmek olanağımız vardır. Buna göre olasılıklar,

$$\begin{aligned} \text{Tablo 1 den } \rightarrow & y t + x z' + x' y z + x' y' t' \\ \text{Tablo 2 den } \rightarrow & y t + x' z + x' z t' + y' z' t' \\ & y t + x' z + x' z t' + x' y' t' \end{aligned}$$

şeklinde gerçekleşir ki bunlar da Boolien Yöntem ile elde edilenlerle aynıdır.

8. 6. CONSENSUS YÖNTEMİ

Asal bileşenlerin bulunmasında uygun yöntemlerden biri de budur. ψ_1 ve ψ_2 temel birleştiriciler olsun. Bir değişken örneğin x , birinde değilsiz diğerinde değilli olarak bulunuyorsa, x ve x' atıldığında ve tekrarlı olan diğer değişkenlerden biri alındığında, $\psi_1 \psi_2$ den elde edilen temel birleştiriciye, ψ_1 ve ψ_2 nin *consensusu* denir.

ÖRNEKLER .

- a) $\psi_1 = x y' z$ ve $\psi_2 = x y t$ nin consensusu : $\phi = x z t$ dir.
- b) $\psi_1 = x' y'$ ve $\psi_2 = x y' z t$ nin consensusu : $\phi = y' z t$ dir.
- c) $\psi_1 = x' y' z$ ve $\psi_2 = x y t$ nin consensusu yoktur.
- ç) $\psi_1 = x$ ve $\psi_2 = x' y$ nin consensusu : $\phi = y$ dir.
- d) $\psi_1 = x'$ ve $\psi_2 = x y$ nin consensusu : $\phi = y$ dir.

Bu örneklerimizde : a) da y ve y' , her iki temel birleştiricide de bulunmakta ve değilsiz-değilli çiftini oluşturdukları için elenmektedirler. Ayrıca, yine bu çift içinde x ortak değişken olduğu için bir tanesi alınmakta ve z ile t tek tek bulunduklarından bunlar da alınarak ϕ consensusu oluşturulmaktadır. b) de x ve x' değilsiz-değilli çiftini oluşturduklarından elemine edilmektedirler. y' ortak olduğundan biri ve diğer farklı değişkenlerle ϕ consensusu oluşmaktadır. c) de x ve y ile x' ve y' elemine olan değişkenlerdir. Ancak geriye kalan değişkenlerin

ortak olanları yoktur. Öyleyse ortak olmayanlar da alınamamaktadır. ç) de ve d) de görülen düzenleme daha ilginçtir. x ve x' elemine edilen değişkenlerdir. Nedeni açık ... Ancak her ikisinde de y değişkeni, birinde varken diğerinde yoktur. Bu da ϕ nin oluşması için yeterli neden olmaktadır.

TEOREM : ψ_1 ve ψ_2 nin ϕ consensusu $\psi_1 \vee \psi_2$ yi ifade eder (gerektirir).

SONUÇ : Eğer ϕ consensusu, ψ_1 ve ψ_2 nin consensusu ise $\psi_1 \vee \psi_2$ mantıksal olarak $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \phi$ ye denk olur.

Aşağıdaki algoritma ile ayırıcı normal formu, mantıksal olarak denk olan ayırıcı normal forma dönüştürmek için verilen iki işlem gözönüne alınmış olsun.

- (i) Diğerini içeren bir ayırıcı varsa bu çıkarılır.
- (ii) İki ayırıcının consensusu ayırıcı olarak alınır.

Eğer bir consensus, verilen ayırıcı normal formun ne benzeri ne de bazı ayırıcılarından birini içermezse bu işlem yapılır.

Φ ayırıcı normal formu verildiğine göre, consensus yöntemi (i) ve (ii) işlemlerinin daha fazla uygulanamayacağı ana kadar devam eder. Sonuçta, Φ formunun tüm asal bileşenlerinin ayırıcısı elde edilmiş olacaktır.

Aşağıdaki örnekler konunun daha iyi anlaşılmasına ve beraberinde bazı açıklamaların yapılmasına olanak sağlayacaktır. Örnekler sırasında (i) ve (ii) koşullarının uygulanmasıyla ilgili ilişki kurulması, bu koşulları daha anlamlı kılacaktır.

ÖRNEK. 1.

$\Phi : x y z' + x y' z t' + x y' + x' y z' + x' y' z' t$ olsun.

a) (i) den dolayı : $x y z' + x y' + x' y z' + x' y' z' t$ olur.

[$x y' z t'$, $x y'$ yü içermektedir.]

b) (ii) den dolayı : $x y z' + x y' + x' y z' + x' y' z' t + x z'$ olur.

[$x y z'$ ve $x y'$ nün consensusu]

c) (i) den dolayı : $x y' + x' y z' + x' y' z' t + x z'$ olur.

[$x y z'$, $x z'$ yü içerir.]

ç) (ii) den dolayı : $x y' + x' y z' + x' y' z' t + x z'$ olur.

[$x y'$ ve $x' y' z' t$ nin consensusu]

- d) (i) den dolayı : $x y' + x' y z' + x z' + y' z' t$ olur.
 $[x' y' z' t, y' z' t \text{ yi içerir.}]$
- e) (ii) den dolayı : $x y' + x' y z' + x z' + y' z' t + y z'$ olur.
 $[x' y z' \text{ ve } x z' \text{ nün consensusu}]$
- f) (i) den dolayı : $x y' + x z' + y' z' t + y z'$ olur.
 $[x' y z', y z' \text{ yü içerir.}]$
- g) (ii) den dolayı : $x y' + x z' + y' z' t + y z' + z' t$ olur.
 $[y' z' t \text{ ve } y z' \text{ nün consensusu}]$
- ğ) (i) den dolayı : $x y' + x z' + y z' + z' t$ olur.
 $[y' z' t, z' t \text{ yi içerir.}]$

Böylece *temel bileşenler*, $x y'$, $x z'$, $y z'$, $z' t$ olarak belirlenir.

ÖRNEK. 2. $\Phi : x y z t + x y z' t' + x' y z' t + x' y' z' + x z' t'$ olsun.

- a) (i) den dolayı : $x y z t + x' y z' t + x' y' z' + x z' t'$ olur.
 $[x y z' t', x z' t' \text{ yü içerir.}]$
- b) (ii) den dolayı : $x y z t + x' y z' t + x' y' z' + x z' t' + x' z' t$ olur.
 $[x' y z' t \text{ ve } x' y' z' \text{ nün consensusu}]$
- c) (i) den dolayı : $x y z t + x' y' z' + x z' t' + x' z' t$ olur.
 $[x' y z' t, x' z' t \text{ yi içerir.}]$
- ç) (ii) den dolayı : $x y z t + x' y' z' + x z' t' + x' z' t + y' z' t'$ olur.
 $[x' y' z' \text{ ve } x z' t' \text{ nün consensusu}]$

Böylece *temel bileşenler*, $x y z t$, $x' y' z'$, $x z' t'$, $x' z' t$, $y' z' t'$ olarak belirlenir.

Consensus Yönteminin Uygulanması : Yukarıdaki açıklamalar ve örnekler de dikkate alınarak bu yöntemin uygulanmasında uyulacak kriterler şu şekilde oluşur :

- 1) Yöntem bir sonuca varacaktır.
- 2) Yöntem uygulandıktan sonra kalan Φ nin her ϕ asal bileşeni, ψ ayırıcı normal formunun ayırıcısı olacak şekilde gerçekleşir.
- 3) Yöntem uygulandıktan sonra kalan her ϕ ayırıcısı, Φ nin asal bileşeni olmalıdır. Aksi durumda ϕ , bazı ψ asal bileşenini içermelidir. (2) den ψ , son ayırıcı normal formun ayırıcısı olmalı ve (i) işlemi daha hala uygulanabilir olmalıdır.

8. 6. 1. Minimal Ayırıcı Normal Formun Consensus Yöntemiyle Bulunması

Φ formunun tüm asal bileşenlerini, *consensus yöntemi* ile belirledikten sonra, geriye kalan işlem bunlardan yararlanarak, *minimal ayırıcı normal form*'un yazılmasıdır. Öncelikle Φ için, tam ayırıcı normal formun oluşturulması ve bunun için de bilinen yöntemlerin uygulanması gerekmektedir. Ancak bu her zaman kolaylıkla sonuca varılabilecek bir iş değildir. Bu uygulama sırasında zaman zaman uzun ve zor işlemler yapmak gerekebilecektir. İşte bu sakıncayı gidermek ve olabildiğince kolay bir yoldan minimal ayırıcı normal formu bulmak amacıyla yeni bazı yöntemlerin bulunması çalışmaları arasında, consensus yönteminden yararlanmak için, bunun biraz daha ayrıntılarına girmek gerekecektir. Burada yeni bir kavram oluşturmak, yeni bir yöntem aramak amaçlanmaktadır.

Asal bileşenlerin ayırımından yararlanarak, oluşturulacak bu yeni yöntemde iki temel kavram : *fazlalık (superfluous)* ve *eksiklik (irredundant)*' tir. Burada bu kavramla oluşturulmak istenilen yöntem, asal bileşenlerin ayırımından *fazlalık harfleri ve ayırıcıları çıkararak eksikli ayırıcı normal formu* elde etmek için geliştirilmesidir. Bu form elde edildikten sonra, eksikli ayırıcı normal form ile karşılaştırılarak, minimal olanlar seçilir. Bu amaçla düzenlenmiş örnekler sanırım konunun daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunacaktır.

ÖRNEK. 1. $\Phi : x y z t + x y z ' t ' + x ' y z ' t + x ' y ' z ' + x z ' t '$ olsun. Bu form, son olarak üzerinde çalışılan örnekteki formdur. (Bir sayfa öncesine bakınız.) Buradaki çözümlemeye göre, asal bileşenler,

$$x y z t , x ' y ' z ' , x z ' t ' , x ' z ' t , y ' z ' t '$$

olarak belirlenmiştir. Şimdi bunların oluşturduğu

$$x y z t + x ' y ' z ' + x z ' t ' + x ' z ' t + y ' z ' t '$$

formu üzerinde son açıklanan yöntemin nasıl uygulanacağı tartışılacaktır. Bu formdan *fazlalık (superfluous) harflerin* çıkartılması gerekmektedir.

Verilen ϕ ayırıcısının $\phi \vee \psi$ ile oluşan ayırıcı normal formda *fazlalık harf* olup olmadığına karar verilecektir. Bunun için ψ nin mantıksal olarak, $\phi \vee \psi$ ye denk olup olmadığı kontrol edilmelidir. Bu ise, ancak ve ancak ϕ mantıksal olarak ψ yi ifade ettiği takdirde geçerli bir iddia olur. Bu da ancak sonuç

totoloji olursa gerçekleşir. ϕ deki her bir ρ için, ψ de ρ yerine D (doğru) ve ρ' yerine Y (yanlış) yazılırsa, aşağıda görülen tablo oluşur.

	xyzt	x'y'z'	xz't'	x'z't	y'z't'
xyzt		Y	Y	Y	Y
x'y'z'	Y		Y	Y	t'
xz't'	Y	Y		Y	y'
x'z't	Y	y'	Y		Y
y'z't'	Y	x'	x	x'	

ϕ temel birleştiricisine karşılık gelen satırda $\phi = D$ olduğu zaman, diğer ayırıcıların ne olacağı hesaplanır. Daha sonra bu satırdaki sonuçların ayırıcının totoloji olup olmadığı kontrol edilir. Bu durum yukarıdaki tabloda sadece son satırda görülmektedir. Böylece sadece $y'z't'$ " fazlalık " ayırıcıdır. Diğer ayırıcılar her bir minimal ayırıcı normal formda bulunmalıdırlar. Demek ki bu inceleme ve uygulamadan çıkan sonuca göre, Φ formu bu kez

$$x y z t + x' y' z' + x z' t' + x' z' t$$

ifadesine indirgenmiş olacaktır.

ÖRNEK. 2. $\Phi : y'z + yz' + yt + zt + xt$ olarak verilmektedir. Consensus yöntemi toplamsal ayırıcıları içermediğinden, yukarıdaki ifade (form) Φ nin tüm asal bileşenlerinin ayırıcısıdır. *Fazlalık Ayırıcılar* ' ı bulmak için önceki örnekte yapıldığı gibi, bir tablo düzenlenmesi gerekecektir.

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	
	y'z	yz'	yt	zt	xt	
ϕ_1 y'z		Y	Y	t	xt	
ϕ_2 yz'	Y		t	Y	xt	
ϕ_3 yt	Y	z'		z	x	fazlalık *
ϕ_4 zt	y'	Y	y		x	fazlalık *
ϕ_5 xt	y'z	yz'	y	z		

Burada * ile işaretlenmiş 3. ve 4. satırlarda totoloji vardır. 3. satırda z ve z' ; 4. satırda da y ve y' birlikte yer almışlardır. Bir ayırıcı olarak biliyoruz ki

$$y \vee \sim y = D \rightarrow y + y' = 1$$

bir totolojidir ve bu z için de aynıdır. Bu nedenle bu iki satır alınmayacaktır.

Buna karşın 1. ve 5. satırlardaki terimlerin ayırıcıları totoloji olmadığı için, $y'z$, yz' ve xt fazlalık olmayıp, Φ için tüm minimal ayırıcı normal formlarda buluncaklardır. ξ_i , bu örnekte $i = 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere ϕ_i nin Φ formu için, verilen ayırıcı normal formun bir ayırıcısı olduğunu ifade etmek için kullanılmış olsun. Buna göre, 3. satırdan ötürü eğer $(\xi_3)'$ ise bu durumda $\xi_2 \cdot \xi_4$ olur. Bunun anlamı ; eğer ϕ_3 , Φ de yer almazsa, ϕ_2 ve ϕ_4 de oluşmayacak demektir. Buna göre $\xi_3 + (\xi_2 \cdot \xi_4)$ doğrudur. Tamamen benzer bir yorumla, dördüncü satırdan dolayı $\xi_4 + (\xi_1 \cdot \xi_3)$ de doğrudur. Böylece,

$$\xi_1 \xi_2 \xi_5 (\xi_3 + \xi_2 \cdot \xi_4)(\xi_4 + \xi_1 \cdot \xi_3)$$

olduğu yazılabilecektir. Bu ifadeyse,

$$\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_5 + \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_5$$

ile denktir. Bu bulgular bize, şu açıklamayı yapmamızı olanaklı kılar :

$y'z + yz' + zt + xt$ ve $y'z + yz' + yt + xt$ *eksikli ayırıcı normal form* 'lardır. Bunlar aynı zamanda *eşdeğer* de oldukları için, her ikisi de minimal ayırıcı normal form olarak alınabilecektir.

8. 7. QUİNE - Mc CLUSKEY YÖNTEMİNİN UYGULAMASINDA FARKLI BİR YAKLAŞIM

Minimizasyon konusu, *lojik devre sentezi* kavramı içinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle konu değişik yönleriyle incelendiği gibi, çeşitli yöntemler üretmek suretiyle, herhangi bir boşluğun kalmasına da izin verilmemektedir. Daha sonra ayrıntılarıyla inceleyeceğimiz ve etkin bir yöntem olarak kullanılan *Karnaugh Diyagramları*'na geçmeden önce, yukarıda *asal bileşenler* bulunarak bir uygulama alanı oluşturan Quine-Mc Cluskey Yönteminin bir farklı yorumu ve buna bağlı olarak uygulamaya yansımış biçimi aşağıda açıklanmaktadır. Bu yoldan yapılan açıklamalar daha pragmatik görülmekte ve pratik açıdan yaklaşıldığında, öncekilerden daha kolay uygulanabilirlik göstermektedir. Ancak her iki yöntem karşılaştırıldığında, birinin daha kuramsal diğerinin daha pratik bir yaklaşımla oluşturulduğu hemen kavranabilmektedir.

Hatta okuyucu, zaman zaman ya da bazı problemlerde, her iki yolu üstüste çakıştırarak bir çalışma düzeni kurabilirse, sanırım bazı şeyler çok daha açıklık kazanacak ya da berraklaşmış olacaktır. Quine - Mc Cluskey Yöntemi, minimizasyon problemlerinde sıkça kullanıldığı için, her yönüyle incelenmeye değerdedir.

Bu yöntem uygulanırken kullanılacak bağıntı, $x y + x y' = x (y + y') = x$ olup, bu sürekli uygulanarak, gerekli ve uygun olan bileşimlerde minimumlaştırma işlemini sağlayacaktır. Burada biraraya getirilerek minimumlaştırma işlemine sokulan bileşenlere *kombine edilmesi olanaklı terimler*, bu işleme uygun olmayanlaraysa *kombine edilemeyen terimler* denilecektir.

Yöntemin uygulamaya dönük yönü dikkate alınarak, bazı açıklamaların örneklerden hareket ederek yapılması, burada kuşkusuz daha akılcı bir yaklaşım olacaktır. Bu düşünceyle, önce aşağıdaki örneği inceleyelim. İşlemler sürdürülürken bir yandan da gerekli açıklamalar yapılmış olacaktır. Bu işlemler sırasında *Komitasyon Cebiri* konusu içinde oluşan bilgiler ve bazı simgesel ifadeler burada kullanılmış olacaktır. Bir ilkeyi de bir kez daha belirtmekte yarar vardır. Bu tür işlemler genellikle *minterimler* kullanılarak yapılmaktadır.

ÖRNEK. $x, y, z \in \beta$ olmak üzere, $f(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z'$ lojik fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun minterimler cinsinden, *tam-ayırıcı normal form*'da ifade edilmiş olduğu dikkatimizden kaçmamaktadır. Fonksiyonun *minimizasyonu* işlemi için uygulanacak olan *Quine-Mc Cluskey Yöntemi*' ne geçmeden önce bu fonksiyon, yukarıda açıklandığı gibi

$$f(x, y, z) = \sum 7, 6, 4, 3, 2, 0$$

şeklinde, tablodaki sıra numaralarından yararlanarak, ya da aşağıda görüldüğü gibi *iki tabanlı sayı sistemi*' ne göre

$$f(x, y, z) = \sum 111, 110, 100, 011, 010, 000$$

şeklinde yazılarak ifade edilmiş olacaktır. Bu ikinci şekil yazılırken, minterim içinde değişkenlerin değilsiz olmaları 1 ile değilli olmaları 0 ile temsil edilmektedir. Burada daha çok ikinci şekil uygulamaya yatkın olup, bu ifadedeki sayılar içlerindeki 1 sayısının çokluğuna göre gruplara ayrılır.

1. grup (içinde 3 tane 1 bulunanlar)	111
2. grup (içinde 2 tane 1 bulunanlar)	110
	011
3. grup (içinde 1 tane 1 bulunanlar)	010
	100
4. grup (içinde 1 bulunmayan)	000

olur.

Bu işlemin bir düzenleme biçimi de, yine grupların arasına çizgi çekerek ancak bu kez yukarıdaki gösterim biçimlerinin her ikisini birden kullanarak bir düzen kurmaktır. Bunu da aynı problem için aşağıda görüyoruz. Burada ilk sütunda, bileşenlerin ait oldukları satır numarası belirtilmektedir. Bu satır numaraları ay-nı zamanda onların *decimal sistemdeki* karşılıklarıdır.

7	111	✓
6	110	✓
3	011	✓
4	100	✓
2	010	✓
0	000	✓

Tablo 1

Bu gruplaşmaları gözönünde bulundurarak ve $x y + x y' = x$ olması ilkesini de kullanarak, aşağıdaki analizler yapılabilecektir :

Örneğin : $10 + 11 = 1-$; $11 + 10 = 1-$; $01 + 00 = 0-$; $00 + 01 = 0-$ demektir ki burada eşitten sonraki sayıda - ile elemine edilen y bileşeni (0 ya da 1 dir) temsil edilmektedir. Bu işlemler bir kural haline getirilerek ifade edilirse, gruplar arasında, yer sırası gözetilerek, aynı yerde bulunan elemanlar farklı değerliyse bunlar elemine edilecek, aynı değerliyse, 1 olduğu takdirde, o sıranın değişkeni değilsiz, 0 olduğu takdirde o sıranın değişkeni değilli yazılmış olacaktır. Bu açıklama ışığında üstteki ara örneği şöyle geliştirebiliriz :

$$xy' + xy \rightarrow 10 + 11 = 1- \rightarrow x \text{ (y elenmiştir ; - ile bu anlaşılıyor)}$$

Bunlardan sonra kendi örneğimize dönebiliriz. Şimdi düzenlenmiş olan gruplarla yola çıkarak, aşağıdaki işlemleri yapalım :

- 1. grup içinde bir bileşen bulunduğundan bu grupta işlem yapılamaz.
- 2. grupta, 110 ve 011 vardır. Eleminasyon kuralı gereğince : -1- yazılır. Değişken cinsinden karşılığı : y dir. İlk sıra ile üçüncü sırada farklı değerler bulunmaktadır.
- 3. grupta, 010 ve 100 vardır. Eleminasyon kuralı gereğince : - - 0 yazılır. Değişken cinsinden karşılığı z' dür. İlk iki sırada farklı değerler bulunmaktadır.
- 4. grupta bir bileşen bulunduğundan bu grupta işlem yapılamaz.

Bu işlemler, ardışık tablolar düzenlenerek yapılmaktadır. Tablolarda kullanılan sayıların yanına okey (✓) sembolü konularak, onun işleme sokulduğu anlatılmış olmaktadır. Ayrıca sıra numaraları belirtilmek suretiyle, hangi satırların işleme sokulduğu açıklanmaktadır.

İkinci bir tablo düzenlenirken, ilk tabloda oluşan *komşu gruplar (araları çizgi ile ayrılan gruplar)* arasındaki ilişkiler düzene sokulur. Bu tablo düzenlenirken hem alınan satırlar ✓ ile saptanır hem de onluk düzendeki karşılıkları olan satır numaraları birleştirilerek yazılır. Bu açıklamalara uygun olarak düzenlenmiş ikinci ve hemen yanında üçüncü tablo, aşağıda görülmektedir.

7 ile 6 dan	1 1 - ✓	7,6,3,2 den	- 1 -
7 ile 3 den	- 1 1 ✓	7,6,3,2 den	- 1 -
6 ile 4 den	1 - 0 ✓	6,4,2,0 dan	- - 0
6 ile 2 den	- 1 0 ✓	6,4,2,0 dan	- - 0
3 ile 2 den	0 1 - ✓		
4 ile 0 dan	- 0 0 ✓		
2 ile 0 dan	0 - 0 ✓		

Tablo 3

Tablo 2

Böylece tablolar tamamlanmıştır. Tablo 3 de artık daha fazla elemine edilmesi olanaklı olmayan bileşenlere ulaşıldığı için işlem bu aşamada durdurulmuştur. Ayrıca bu tabloda, Tablo 2 den kaynaklanan işlem çeşitlemesi karşılığı her iki grup içinde aynı sonuçlarla karşılaştıldığı kolayca gözlemlenebilmektedir. Doğal olarak bunlardan sadece biri alınacağından diğerinin üzeri çizilerek iptal edilmiş olduğu apaçık gösterilmiş olmaktadır. Tablo 2 de kullanılan her satır işleme sokulduğundan ✓ ile işaretlenmiş ; oysa sonuncu tabloda artık böyle bir işlem yapılması sözkonusu değildir. Demek ki basite indirgenirse son tablodan çıkacak sonuç aşağıda olduğu gibi yorumlanabilecektir :

$$\frac{7,6,3,2 \text{ den } - 1 -}{6,4,2,0 \text{ dan } - - 0} \rightarrow y$$

$$\rightarrow z'$$

demektir. Artık *indirgenmiş biçimdeki temel bileşen* yazılabilecektir ki bu da

$$f(x,y,z) = y + z'$$

den ibarettir. Bu sonuç yukarıda, daha kısa yoldan da elde edilmişti.

Yukarıdaki son ifadede artık kombine edilmesi olanaksız bileşenler bulunmak-tadır ki bundan sonra yeni bir tablo düzenlenmesi hem olanaksız hem de gereksizdir. Ayrıca görülüyor ki ilk tabloda sıra numaraları olarak yer alan 7,6,4,3,2,0 burada da tam olarak vardır. Yani bu sonuçta, bütün bu satırlar temsil edilmiş olmaktadır.

Bu yöntemin uygulanmasında kullanılan bir çalışma şekli de aşağıda gösterilmiştir. Bu da gerçekte, yapılan tabloların karşıtı işlemleri içermiş olsa da teknik olarak daha kolay bir çalışmadır. Önce yapılacak işi düzenleyip sonra da gerekli açıklamaları yapalım. Aynı örnek üzerinde çalışıldığını düşünülerek,

$$f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z'$$

fonksiyonu alınmıştır.

$$\begin{array}{cccccc} xyz & xyz' & xy'z' & x'yz & x'yz' & x'y'z' \\ 111 & 110 & 100 & 011 & 010 & 000 \end{array}$$

olarak değerlendirilir. Değişkenin kendisi için 1, bütünleyeni için 0 yazılarak oluşturulan gruplarda 1 sayısının çokluğuna göre, altalta gelecek şekilde yeni bir düzen kurulur :

3 tane 1	2 tane 1	1 tane 1	0 tane 1
<u>bulunan grup</u>	<u>bulunan grup</u>	<u>bulunan grup</u>	<u>bulunan grup</u>
111	110	100	000
	011	010	
	↓	↓	
	1	0	
	↓	↓	
	y	z'	

bulunur. Buna göre,

$$f(x,y,z) = y + z'$$

yazılabilecektir.

Bu hesaplama tekniğinde 111 ile 000 dan oluşan gruplar tek oldukları için *bağdaşmaz*'dırlar. Yukarıda kullanılan deyimle *kombine edilemez* terimlerdir. Bir başka yaklaşımla bunları birarada düşündüğümüz takdirde, ikisi tam bir eliminasyon ile ortadan kalkan terimler olurlar. Görülüyor ki yukarıda tablolar yapılarak ulaşılan sonuca, bu şekilde, daha toplu bir çalışmayla ulaşılmış olabilecektir.

ÖRNEK. Tam-Ayırıcı Normal Form'da düzenlenmiş bir Boole Fonksiyonu,

$$xyzt + xy'zt + x'yz't' + xy'z't' + x'yz't' + xyzt' + xy'zt' + xy'z't + x'yzt + x'yz't + x'y'z't'$$

olarak verilmiştir. Bu fonksiyonun bileşenleri için aşağıdaki düzeneği kuralım :

xyzt	→	1111	<u>1111 ✓</u>	1-11 ✓	1-1-
xy'zt	→	1011	<u>1011 ✓</u>	111- ✓	<u>-11-</u>
x'yz't'	→	0110	<u>1110 ✓</u>	<u>-111 ✓</u>	
xy'z't	→	1000	<u>0111 ✓</u>	101- ✓	10--
x'yz't	→	0100	<u>0110 ✓</u>	10-1 ✓	01--
xyzt'	→	1110	<u>1010 ✓</u>	-110 ✓	
xy'zt'	→	1010	<u>1001 ✓</u>	1-10 ✓	
xy'z't	→	1001	<u>0101 ✓</u>	011- ✓	
x'yzt	→	0111	<u>1000 ✓</u>	<u>01-1 ✓</u>	
x'yz't	→	0101	<u>0100 ✓</u>	01-0 ✓	
x'y'z't'	→	0000	<u>0000 ✓</u>	10-0 ✓	
				100- ✓	
				<u>010- ✓</u>	
				-000	
				0-00	

Burada - ile elemine edilmiş değişkenin yeri temsil edilmekte, ✓ ile işleme sokulan bileşen işaretlenmiş olmaktadır. Sonuçta buradan (asal bileşenler olan)

$$\begin{aligned} &xy' + x'y + y'z't' + xz \\ &xy' + x'y + y'z't' + yz \\ &xy' + x'y + x'z't' + xz \\ &xy' + x'y + x'z't' + yz \end{aligned}$$

gibi birbiriyle farklı dört indirgenmiş (minimumlaştırılmış) lojik toplama ulaşılmış olmaktadır ki bunlardan herhangi biri verilen fonksiyona denk olan yeni yapı olmaktadır. Yukarıdaki çalışmada bileşenlerden 1 ile 0 değerdirmesine geçişı, onların en çok 1 bulunanlara göre gruplandırılışıını, bunların aralarında ve komşu grupla elemine edilmesindeki seçimleri ve böylece oluşan yeni grupları, bunların yeniden işleme sokulurken ✓ işareti ile belirlenmiş olmasını ve diğder ayrıntıları okuyucum artık yorumlayabilmeli ve açıklayabilmelidir.

Yapı olmaktadır. Yukarıdaki çalışmada bileşenler ile 0 değerlendirmesine geçişi, onların en çok 1 bulunanlara göre gruplandırılışını, bunların aralarında ve komşu grupla elemine edilmesindeki seçimleri ve böylece oluşan yeni grupları, bunların yeniden işleme sokulurken ✓ işareti ile belirlenmiş olmasını ve diğer ayrıntıları okuyucum artık yorumlayabilmeli ve açıklayabilmelidir.

8. KAFES SİSTEMİ VE PETRİCK YÖNTEMİ

8. 8. 1. Kafes Sistemi

Minimumlaştırılmak amacıyla verilmiş ve çoğu kez min-terimler cinsinden ifade edilmiş bir Boole fonksiyonunun son olarak *Quine-Mc Cluskey Yöntemi* yardımıyla incelenmesinden sonra, bu kez bazı ayrıntıları da içerecek şekilde, daha çok *bağdaşmaz* nitelikte, yani *kombine edilemeyen terimler* ölçeğinde konuyu derinleştirmek için, *Kafes Sistemi* denilen bir çeşit yöntemden söz edilecektir. Burada araştırılacak olan, kombine edilemeyen terimler arasında *gereksiz (lüzumsuz)* olanların bulunup çıkarılması işidir. Eğer bunlar belirlenebilirse, bunları işlem dışına atarak, böylece minimumlaştırma işleminin çalışma alanı, o oranda daraltılmış olacaktır. Bu ise işlerimizde biraz olsun rahatlık yaratacaktır.

Kombine edilemeyen terimlerin hizalarında, desimal sayı sistemindeki karşılığıyla gösterilen kotu vardır. Bu kot hangi kombine edilebilir terimlerin bir araya gelmesiyle oluştuğunu da göstermektedir. Bir önceki alt-bölümdeki örnekler, bu konuda oldukça açıklayıcıdır. Burada hemen şu ilkedden hareket edilebilecektir : *Eğer kombine edilemeyen bir terimin kotunda yer alan desimal sayılar, diğer bir kombine edilemeyen terimde de yer alıyorsa, bu kombine edilemeyen terim **gereksiz terim** olur.* Çünkü biliyoruz ki bu kombine edilemeyen gereksiz terimdeki *minimum terimler* diğer bir kombine edilebilir terim içinde yer almış olacaklardır.

Şimdi, bu kavram ve tanımdan hareket ederek, sistemli bir şekilde, bu tür terimlerin nasıl belirlenebileceği araştırılmalıdır. Bu amaçla, ayrıntıları aşağıda açıklanmış olan ve *Kafes Sistemi* olarak adlandırılan bir düzenek üzerinde çalışılacaktır.

Bu sistemde çalışılırken, minimum terimleri temsil eden desimal sayılar, büyüklük sırasına göre yanyana yazılarak, altlarına gelecek şekilde *dikey çizgiler* çizilir. Tablonun sol tarafına ise, önceden kombine edilemeyeceği saptanan terimler yazılır. Bunların herbirinin hizasına gelecek şekilde *yatay çizgiler* çizilir. Böylece *Kafes* ortaya çıkmış olacaktır. Bundan sonra ise, işaretleme işine geçilecektir. Bu, her kombine edilemeyen terim için tekrarlanacak bir işlem olup, bu terim hangi minimum terimlerin kombine edilmesinden oluşmuşsa, o minimum terimleri temsil eden desimal sayı karşılıklarının bulunduğu *kesişme (düğüm) noktasına* birer * (bir çeşit çapraz) işareti konacaktır. Bu işlem de tamamlandıktan sonra, işaretlenmiş düğüm noktalarına bakarak, en küçük minimum terimler grubu seçilir. Bunun için ise şöyle hareket etmek gerekecektir :

Öncelikle kombine edilemeyen terimlerden hangisinin mutlaka alınması gerektiği belirlenmelidir. Eğer minimum terimlerden biri, kombine edilemeyen terimlerde temsil edilmişse bu terim öncelikle alınacaklar arasında olacaktır. Bunu belirtmek içinse, kafeste bu kombine edilemeyen terim üzerine * işareti (sembölü) konur. Bu tür kombine edilemeyen terimler, kafeste (tabloda) üzerinde bir tek * işareti bulunan düşey çizgiler taranarak bulunacaktır.

Kombine edilemeyen terimlerden üzerinde * işareti bulunanlar, incelenen fonksiyonun bütün minimum terimlerini temsil ediyorlarsa, diğerleri *gereksiz* olanlardır. Mutlaka alınması zorunlu hale gelen kombine edilemeyen terimlerin toplamından oluşan fonksiyon, *minimumlaştırılmış fonksiyon* olacaktır.

Bu seçimin bir ayrıntısı vardır ki o da aşağıda açıklanmıştır. Şöyle ki, eğer * ile gösterilen kombine edilemeyen terimler, incelenen fonksiyonun bütün minimum terimlerini temsil etmiyorsa, temsil edilmeyen minimum terimleri temsil eden ve kendi sayıları ile içindeki değişken sayıları toplamı en küçük olan kombine edilemeyen terimlerin, üzerinde * işareti bulunan terimlere eklenmesi gerekmektedir. Ancak bunlar içinde, değişken sayısı bir tane olan terimler varsa, bunları terim sayısına katmamak gerekmektedir.

Aşağıda bu yöntem ve sistemin nasıl uygulanabileceği, örnekleme yoluyla, daha anlaşılabilir bir biçimde açıklanmış olacaktır.

ÖRNEK. İncelenmek üzere gözönüne alınan fonksiyon

$$f(x,y,z,t) = x'y'z't + x'yz't + x'yz't + xy'z't + xyz't + xyz't + xyz't$$

olsun. Bu min-terimler cinsinden verilmiş bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun aşağıda ifade edildiği biçimde, iki farklı şekilde gösterilebildiği bilinmektedir :

$$f(x,y,z,t) = \Sigma 0001,0100,0101,1001,1101,1110,1111$$

$$f(x,y,z,t) = \Sigma 1, 4, 5, 9, 13, 14, 15.$$

Bununla ilgili olarak, önceki bilgilerimizi de kullanmak suretiyle aşağıdaki tablolar oluşturulacaktır :

1	0001	✓	1, 5	0-01	✓	1, 5, 9, 13	--01
4	0100	✓	1, 9	-001	✓	1, 5, 9, 13	--01
5	0101	✓	4, 5	010-			
9	1001	✓	5, 13	-101	✓		
13	1101	✓	9, 13	1-01	✓		
14	1110	✓	13, 15	11-1			
15	1111	✓	14, 15	111-			

Tablo 3

Tablo 1

Tablo 2

Bu tablolarda ✓ işareti konmamış olanları alarak sıralarsak :

Tablo 2 den	4, 5	x' y z'
	13, 15	x y t
	14, 15	x y z
Tablo 3 den	1, 5, 9, 13	z' t

bileşenleri elde edilir. Bunlar yardımıyla, aşağıda görülen, *kombine edilemeyen terimler tablosu* oluşturulabilecektir :

	1	4	5	9	13	14	15
4, 5 x'yz' *							
13, 15 xyt							
14, 15 xyz *							
1,5,9,13 z't *							

Böylece *kafes* oluşturulmuştur. Burada, sol tarafta * ile işaretlenen *asal bileşenler* kombine edilemeyen, dolayısıyla mutlaka alınması gereken terimler olmaktadır. Kafes oluşturulurken sütunlardaki numaralar ile kombine edilen terimlerin numaralarına bakarak, ilgili satırlarda oluşan düğüm noktalarının ✕

ile işaretlenmiş olduğu gözden kaçmamalıdır. Bu sisteme göre incelenen fonksiyonun indirgenmiş biçimi,

$$f(x,y,z,t) = x'yz' + xyz + z't$$

şeklinde ifade edilmiş olacaktır.

Burada Kafes Sisteminden yararlanılmışsa da bunun bazı uygulamaları, yeteri kadar açık olmadığından, aşağıdaki yöntemin incelenmesinde yarar vardır.

8. 8. 2. Petrick Yöntemi

Bu yöntemin amacı, kombine edilemeyen terimlerden hiçbirinin mutlaka alınması gereken terim olmaması halinde, indirgenmiş biçimdeki fonksiyonu ifade edebilmek için, hangi *asal bileşenleri*' in seçilmesi gerektiğine karar verme aşamasında, bir seçenek oluşturmaktır. Buna göre, yöntem, aşağıda açıklandığı ve uygulamayla pekiştirildiği anlamda, seçicilik için bir düzenleme yapmış olmaktadır.

Bu yöntem uygulanırken, her kombine edilemeyen terime iki değerli bir değişken karşılık getirilir. Bu değişkenlerin **1** değerini alması, karşılık geldikleri kombine edilemeyen terimin *alınacağını* ; **0** değerini alması ise, karşılık geldiği kombine edilemeyen terimin *alınmayacağını* ifade etmiş olacaktır. Bu değişkenlerle kurulacak olan F fonksiyonunun **1** değerini alması, kombine edilemeyen terimler tablosundaki (kafesteki) bütün minimum terimlerin temsil edildikleri anlamına gelecektir. **0** değerini alması da, doğal olarak, bu terimlerin temsil edilmedikleri anlamında değerlendirilecektir. Temel ilkeleri bu şekilde oluşturulan *Petrick Yöntemi*' nin uygulamada nasıl kullanıldığı, aşağıdaki örnek yardımıyla açıklanmaya çalışılmıştır.

ÖRNEK . İncelenmek için gözönüne alınan fonksiyon,

$$f(x,y,z) = x'y'z + x'yz' + x'yz + xy'z' + xy'z + xyz'$$

olarak verilmektedir. Bu fonksiyon diğer şekilleriyle ;

$$f(x,y,z) = \sum 001, 010, 011, 100, 101, 110$$

$$f(x,y,z) = \sum 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

olarak da gösterilebilecektir. Buna ait tablolar aşağıda görüldüğü gibi düzenlenecektir :

1	001	✓	1 , 3	0-1
2	010	✓	1 , 5	-01
4	100	✓	2 , 3	01-
3	011	✓	2 , 6	-10
5	101	✓	4 , 5	10-
6	110	✓	4 , 6	1-0

Tablo 1

Tablo 2

Burada Tablo 2 de oluşan bileşenlerin tümü kombine edilemeyen terimler olarak görülmektedirler ki bunlar :

1 , 3	$x'z$
1 , 5	$y'z$
2 , 3	$x'y$
2 , 6	yz'
4 , 5	xy'
4 , 6	xz'

olarak sıralanacaklardır. Bunlar için oluşacak *kafes sistemi* aşağıda görülmektedir :

	1	2	3	4	5	6	Karşılık Getirilen Değişken
1 , 3 $x'z$							a
1 , 5 $y'z$							b
2 , 3 $x'y$							c
2 , 6 yz'							d
4 , 5 xy'							e
4 , 6 xz'							g

Bu tabloda, kombine edilemeyen terimlerden hiç birinin alınması gereken terim olmadığı görülmektedir. Nitekim bileşenlerin hiç birinde * işareti bulunmamaktadır. İşte *Petrick Yöntemi* bu aşamada iş görmeye başlamaktadır.

Yukarıdaki *Kafes Tablo*'nun sağında, her bileşeni sırasıyla temsil etmek üzere ve **1** ve **0** değerlerini alabilecek olan, yani *iki değerlikli* birer değişken karşılık getirilmiştir. Bunların sırasıyla a,b,c,d,e,g (f, fonksiyon için kullanıldığından alınmamıştır) olmaları öngörülmüştür. Yukarıda açıklandığı gibi, bunlarla, bir

F fonksiyonu oluşturulacaktır ki bu $f(x,y,z)$ fonksiyonunu temsil edecektir. Burada F fonksiyonu ;

$$F = (a + b) (c + d) (a + c) (e + g) (b + e) (d + g)$$

şeklinde gerçekleşecektir. Zira, 1.minimum terimin ($x'y'z$) temsil edilebilmesi için a veya b alınmalıdır. 2.minimum terimin ($x'yz'$) temsil edilebilmesi için c veya d nin alınması gerekmektedir. Böylece her minimum terim için alınması gerekenler yazıldığında F fonksiyonu oluşacaktır. Burada bazı düzenlemelerin yapılabilmesi, önceki bilgilerimiz yardımıyla, olanaklıdır. Bunları ise aşağıda görüldüğü gibi sıralayabiliriz :

$$(a + b) (a + c) = a + b . c$$

$$(e + g) (e + b) = e + b . g$$

$$(d + c) (d + g) = d + c . g$$

Bunlar yardımıyla F fonksiyonu yeniden düzenlenir ve minterimler cinsinden ifade edilmek üzere ara işlemler de yapılırsa ;

$$\begin{aligned} F &= (a + b.c) (e + b.g) (d + c.g) \\ &= (a.e + a.b.g + b.c.e + b.c.g) (d + c.g) \\ &= a.d.e + a.b.d.g + b.c.d.e + b.c.d.g + a.c.e.g + a.b.c.g + b.c.e.g + b.c.g \end{aligned}$$

bulunur. İşte bu fonksiyon, bütün minimum terimlerin temsil edilebilmesine olanak sağlayacak ; kombine edilemeyen terimlerden hangilerinin alınması gerektiğini açıklamaya yardımcı olacaktır. Bu örnekte kombine edilemeyen terimlerin içindeki değişken sayıları aynıdır. Ancak burada kombine edilemeyen terimlerden a.d.e ile b.c.g, üç kombine edilemeyen terimle bütün terimlerin temsil edilebildiğini göstermektedirler. Zira diğerleri dört değişken içermekte, bu iki bileşen ise değişkenlerin hepsini içermektedirler. Bunlarla minimumlaştırılmış iki fonksiyon kurulabileceği ; diğer bir söylemle bunlardan hareket ederek eşdeğer olan aynı özellikte ve fakat farklı terimlerle iki fonksiyon kurulabileceği söylenebilecektir. Bunlar ise :

$$(1) \quad f(x,y,z) = x'z + xy' + yz' \quad (a.d.e \text{ karşılığı})$$

$$(2) \quad f(x,y,z) = y'z + x'y + xz' \quad (b.c.g \text{ karşılığı})$$

olarak gerçekleşeceklerdir.

8. 9. QUİNE - Mc CLUSKEY YÖNTEMİNİN UYGULAMASINDA UYULMASI GEREKEN TEMEL İLKELER

Bir Boole Fonksiyonunun *indirgenmesi (minimumlaştırılması)* işlemleri arasında etkin bir yöntem olarak kullanılabilen *Quine - Mc Cluskey Yöntemi* hakkında, yukarıdaki çalışmalar yardımıyla hayli bilgi edinildiği kuşkusuz doğru bir savdır. Ayrıca yerine göre, bazı açılımları sağlaması bakımından, örneğin *Petrick Yöntemi* gibi, konuya destek veren özel bir - iki yöntemin de katkısıyla, bu çalışma alanında, örneklerden de açıklayıcı destek almak suretiyle, konuya bir bütünlük kazandırılmış olmaktadır. Bütün bu birikim sonunda, uygulamayla ilişkili olarak bazı ilkelerin oluştuğu görülmektedir. Her ne kadar bu ilkelerin belirtilmesi işi buraya bırakılmışsa da, aşağıda sözü edilecek bu ilkeleri çok iyi kavrayabilmek ve yorumlayabilmek için bu birikime gereksinme olduğu da kuşkusuz doğru bir savdır. İşte bu yaklaşımla, şimdi bu ilkeleri, öz bir biçimde ve uygulamaya getireceği güvenceler açısından açıklayarak, konu toparlanırken bazı hususlarda, artık daha kesin yargılara varmak olanağı bulunacaktır :

1) İndirgenmek istenilen fonksiyonun minimum terimlerini temsil eden on'luk (desimal) sayılar iki tabanlı sisteme göre yazıldığında, buradaki sayılarda 1 lerin sayısına göre gruplar oluşturulduğu bilinmektedir. Bu bir tablo şeklinde düzenlenir ki genellikle **Tablo 1** in oluştuğu bu aşamadır. Bu şematik olarak aşağıda açıklandığı şekilde gerçekleşir. Burada sembolik bir tablo düzenlenmiştir :

On'luk düzendeki sayılar	İki'lik düzendeki sayıların içindeki 1 lerin sayısı
0 ✓	0 tane
2 ✓	1 "
8 ✓	
3 ✓	
6 ✓	
9 ✓	2 "
10 ✓	
7 ✓	3 "
13 ✓	

Tablo 1

2) Bu şekilde gruplandırılan On'luk sayılar arasında, terimlerin kombine edilebilmesi bakımından bir karşılaştırma, ancak 1 lerin sayısı bir farklı olan gruplar arasında yapılabilir. Bu grupların elemanlarının kombine edilebilmesi için şu iki koşulun gerçekleşmesi gerekmektedir :

- a) Alt gruptaki On'luk sayı, üst gruptaki On'luk sayıdan büyük olmalıdır ;
- b) On'luk sayılar arasındaki fark, 2 nin bir kuvveti olmalıdır.

Gerçekte bu koşullar, elemanların kombine edilebilmesi için bir tek değişken değeri bakımından farklı olmaları gerektirmesinin bir sonucudur. Kombine edilen iki elemandan alttaki grup elemanlarında 1 lerin sayısı bir fazla olacağından, buna karşılık gelen On'luk sayı kuşkusuz daha büyük olacaktır.

Yukarıda düzenlenen Tablo 1 de gözönünde bulundurularak, kombinasyon olanakları araştırılırken, On'luk sayı, alt grupta bulunan kendisinden büyük On'luk sayılarla karşılaştırılmalı ve bu iki On'luk sayı arasındaki fark 2 nin bir kuvveti kadar olmalıdır. İşte bu durumda, bu iki sayının temsil ettikleri terimler kombine edilebilecek demektir. Bu ise yanlarına ✓ şeklinde bir kontrol işareti konularak belirtilir. Bu şekilde büyüklüklerine göre sıralanmış bu sayılar düzenlenecek yeni bir tabloda yer almalıdırlar ki bu **Tablo 2** olmaktadır. Böyle bir tablo, yine sembolik anlamda ve **Tablo 1** in bir devamı olarak, aşağıda olduğu gibi gerçekleşecektir :

0 , 2	(2 = 2 ¹) ✓
0 , 8	(8 = 2 ³) ✓
2 , 3	(1 = 2 ⁰) ✓
2 , 6	(4 = 2 ²) ✓
2 , 10	(8 = 2 ³) ✓
8 , 9	(1 = 2 ⁰) ✓
8 , 10	(2 = 2 ¹) ✓
3 , 7	(4 = 2 ²) ✓
6 , 7	(1 = 2 ⁰) ✓
9 , 13	(4 = 2 ²) ✓

Tablo 2

Bu tabloda ikinci sütunda 2 nin kuvvetleri şeklinde görülen sayılar, İki tabanlı sayı sistemine göre belirtilmiş olan terimlerin, kombine edilmesi sırasında,

hangi değişkenin ortadan kalktığını açıklamaya yaramaktadır. Buna göre 2 nin üssü olarak görülen kuvvet sayıları, o kombinasyonda, sağdan itibaren kaçınıcı basamakta bu işlemin gerçekleşeceğini göstermektedir. Örneğin burada herhangi bir sıradaki bileşimi gözönüne alarak bir açıklama getirilmek istenirse, ilk sırada görülen 0 , 2 bileşiminde, On'luk sayıların temsil ettiği, minimum terimlerin kombine edilmesi halinde $2 - 0 = 2 = 2^1$ olduğunu görerek, ortadan kalkan değişkenin sağdan ikinci değişken olacağı anlaşılır. (Burada sağdan ilk değişkenin 2^0 lı basamakta olduğuna dikkat edilmelidir.)* Keza bir ikinci örnek verilmek istenirse, Tablo 2 de sonuncu satırda yer alan 9 , 13 bileşimde karşılık olarak 4 görülmektedir ki bu apaçık $13 - 9 = 4$ olarak elde edilmiştir. Burada 4 ün, 2 nin 2.kuvveti olarak elde edilmiş olmasıyla, bu bileşim için ortadan kalkacak değişkenin, sağdan üçüncü değişken olacağı anlaşılmaktadır. Bu aşağıdaki örneklemeyle daha iyi açıklanmış olmaktadır. 9 un ikilik sistemde karşılığı 1001 ; 13 ün ikilik sistemdeki karşılığı 1101 dir. Buna göre :

$$13 - 9 = 1101 - 1001 = 1-01$$

olur ki kombine edilebilen bu iki sayıda farklı eleman, ikilik sayılarda görüldüğü gibi, her iki sayıdaki sağdan üçüncü sayılardır. İşte buna karşılık gelen değişken elemine edilmiştir ve bu husus, önceki uygulamalardaki yöntemle, değişkenin boşalan yerine - (çizgi) konmak suretiyle temsil edilmiş olmaktadır.

Tablo 2 oluşturulduktan sonra, burada işlemlerin devamlılığı bakımından bazı ilkelerin oluşması sürecinde, aşağıdaki açıklamaları da izlemek gerekmektedir. Çünkü Tablo 2 den hareketle, Tablo 3 ün oluşturulması aşamasında, yine bazı teknik düzenlemelere gereksinme olduğu apaçıktır.

Tablo 2 de görülen ve birbirini izleyen grupların kombine edilebilmesi için öncelikle bunlarda bulunan değişkenlerin aynı olması gerekmektedir. Bu özellikle ortadan kalkan değişkenin belirlenebilmesi için bir zorunluluktur. Bunun - konarak belirttiğimizde, bu çizgilerin aynı basamakta olması gerekmektedir. Bunu ise Tablo 2 de parantez içine alarak gösterdiğimiz basamaklara ilişkin sütunda, aynı kuvvet sayısına bakarak seçebiliriz. Bu karşılaştırma sonucu kombine edilmesi olanaklı terimler seçilirken bir başka koşul gözden kaçmamalıdır. O da, alt grupta bulunan sayıyla, üst grupta bulunan sayı arasındaki farkın 2 nin tam kuvveti olmasıdır. Bir örnek vermek gerekirse, Tablo

(*) Bu konudaki ayrıntılı açıklamalar için, BÖLÜM 3 deki bilgilerden yararlanılmalıdır.

2 de 0 , 2 bileşimiyle, 8 , 10 bileşimi bu özelliğe uygun bileşimlerdir. Zira her ikisi de $2 - 0 = 2 = 2^1$ ve $10 - 8 = 2 = 2^1$ şeklinde aynı basamağı işaret etmektedirler : Sağdan ikinci basamak. Böylece bunların kombine edilebileceği anlaşılmaktadır. Çünkü bunların küçük sayılarının farkı : $8 - 0 = 8 = 2^3$ olarak 2 nin bir tam kuvveti olarak görülmektedir. Buna göre, bu kombinasyon,

$$\begin{array}{ll} 0, 2 \quad (2) & : \quad 00-0 \\ 8, 10 \quad (2) & : \quad 10-0 \end{array}$$

şeklinde gerçekleşir. Her ikisinde de, ortadan kalkan değişkeni temsil eden - , sağdan ikinci basamakta görülmektedir. Bunlar kombine edildiğinde -0-0 elde edilir. Çünkü her ikisinde de farklı ortak değer, sağdan dördüncü basamakta görülmektedir. Bunların kombinasyonundan da,

$$0, 2, 8, 10 \quad (2, 8)$$

elde edilecektir. Bu olanaklı olduğu için **Tablo 3** düzenlenir. Bu ise aşağıda görülmektedir.

$$\begin{array}{ll} 0, 2, 8, 10 & (2, 8) \\ \hline 0, 2, 8, 10 & (2, 8) \\ 2, 3, 6, 7 & (1, 4) \\ 2, 3, 6, 7 & (1, 4) \end{array}$$

Tablo 3

Burada birbirinin aynı olan kombinasyonlardan birer tanesi elemine edilmiştir. Ayrı iki grupta bulunan, parantez içindeki sayılardan ortak olanlar bulunmadığı için artık işlem durdurulmuş olacaktır. Bütün tablolar incelenerek, ✓ işaretli bileşenlerin kombine edildikleri, bu işaretin bulunmadığı bileşenlerin ise asal bileşenler olarak alınacağı anlaşılır. Örneğimizde, kombine edilemeyen terimler, on'luk sistemdeki karşılıklarıyla,

$$\begin{array}{ll} 8, 9 & (1) \\ 9, 13 & (4) \\ 0, 2, 8, 10 & (2, 8) \\ 2, 3, 6, 7 & (1, 4) \end{array}$$

olarak sıralanacaklardır. Bundan sonra kombine edilemeyen terimler tablosu

(kafes) kurularak, minimumlaştırılmış fonksiyonun hangi kombine edilemeyen terimlerden oluşacağı belirlenir. Örneğimize göre bu tablo aşağıda olduğu gibi gerçekleşecektir :

	0	2	3	6	7	8	9	10	13
8 , 9 (1)									
9 , 13 (4) *									
0 , 2 , 8 , 10 (2 , 8) *									
2 , 3 , 6 , 7 (1 , 4) *									

Bu tablodan görüldüğü gibi, bütün minimum terimler, üzerinde * işareti bulunan kombine edilemeyen terimlerle oluşacağından, minimumlaştırılmış fonksiyon bu terimleri içermiş olacaktır. Şimdi bütün problem, kombine edilemeyen terimlere uygun olan asal bileşenlerin, hangi değişkenlerle nasıl belirleneceğini bir kural haline getirmektir. Bunun içinse, aşağıda açıklandığı şekilde hareket etmek yeterli olacaktır.

Bunun için, kombine edilemeyen terimdeki On'luk sayılardan herhangi biri İki' lik tabanda bir sayı olarak yazılır. Parantez içindeki sayılar, kalkan değişkenin sağdan itibaren basamağını gösterdiğinden, bu basamağa rastlayan yerdeki 1 ya da 0 ın üzeri çizilerek, bu basamağa rastlayan değişkenin alınmayacağı işaret edilmiş olur. Geride kalan 1 ve 0 lar için, sırasıyla, değişkenin kendisi ya da bütünleyeni (değillisi) alınacaktır. Bu açıklamaya göre, örneğimize dönersek.

$$\begin{array}{llll}
 9 , 13 & (4) & \rightarrow & 1-01 \rightarrow xz't \\
 0 , 2 , 8 , 10 & (2 , 8) & \rightarrow & -0-0 \rightarrow y't' \\
 2 , 3 , 6 , 7 & (1 , 4) & \rightarrow & 0-1- \rightarrow x'z
 \end{array}$$

terimleri bulunur. Öyleyse, artık minimumlaştırılmış fonksiyon yazılabilir. Bu da, aşağıdaki şekilde ifade edilir :

$$f(x,y,z,t) = xz't + y't' + x'z .$$

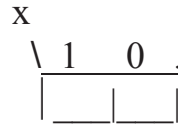
8.10. KARNAUGH DİYAGRAMI

8.10.1. Diyagramın Fonksiyonu Betimlemesi

Bir Boole fonksiyonunun basitleştirilmesi veya zaman zaman kullandığımız bir deyimle minimumlaştırılması işinde etkin olarak kullanılan yöntemlerden biri de *Karnaugh Diyagramı* olarak adlandırılan bir çalışmadır.

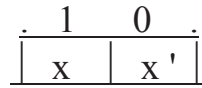
Bunu bir yöntem olarak değerlendirmek de olanaklıdır. Bu çalışmalar sırasında, aksi söylenmedikçe fonksiyonlar yine min-terimler cinsinden verilecektir.

Çalışma sisteminin adından da anlaşılacağı gibi burada daha ağırlıklı olarak, bir tür çizelgeyle (diyagramla) ilgili düzenlerden söz edilecektir. Bu diyagramların oluşmasında, fonksiyondaki değişken sayısı önemli bir etkindir. Örneğin tek değişkenli bir Boole fonksiyonu için düzenlenecek diyagram aşağıda görüldüğü gibi olacaktır.



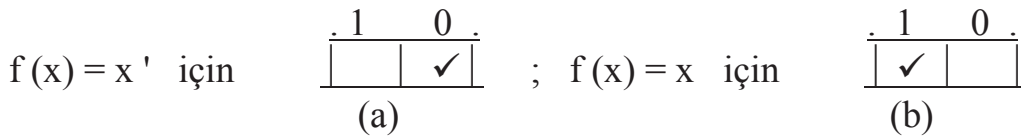
Şekil 52

Burada, sadece x gibi tek bir değişkene bağlı bir fonksiyon için düzenlenmiş olan diyagramda, değişkenin alabileceği değerlere ki bunlar ancak ve ancak 0 ile 1 dir ve böylece birer dikdörtgen bölge tahsis edilmiş olmaktadır. Şimdi bu diyagram yorumlanırsa, gerçekte anlatılmak istenilen, aşağıdaki şekilde görülen yerleşme biçimidir.



Şekil 53

Bunların kullanılışı amacıyla, fonksiyonu bu diyagramda temsil etmek ya da betimlemek şekli, aşağıda görüldüğü biçimde bir işaretleme sistemi uygulanarak gerçekleştirilmektedir.



Şekil 54

Burada yanyana görülen dikdörtgenler, *bitişiklik* özelliği olan alanlardır ki bunlar için *Hamming uzaklığı*, $d = 1$ dir.

Fonksiyonun $f(x,y)$ gibi iki değişkenli olması halinde düzenlenecek diyagram biraz daha gelişmiş olacaktır. Bunun ilk algılanacak şekli ve ona ait yorum aşağıdaki iki şekilde görülmektedir.

		x	
y \		1	0
1			
0			

(a)

		1	0
1		xy	$x'y$
0		xy'	$x'y'$

(b)

Şekil 55

ÖRNEK. $f(x,y) = xy' + x'y$ fonksiyonuna ait Karnaugh diyagramını çizelim :

		x	
y \		1	0
1			✓
0		✓	

(a)

		x	x'
y			✓
y'		✓	

(b)

Şekil 56

Karnaugh diyagramlarının bir özelliği, fonksiyondaki değişken sayısı arttıkça, dikdörtgen alanı, yatayda (horizontal) ve düşeyde (vertical) olmak üzere uygun bölmelere (bölgelere) ayırmak suretiyle, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere 2^n tane bağımsız bölgeyi oluşturmak olanağının bulunmasıdır.

Bazı yorumculara göreyse, bu diyagramda oluşan bölgeleri, bir matrise benzeterek, bunlar için, yanyana olanlara *satır (row)*, üstüste olanlara *sütun (column)* denildiği olabilmektedir. Eğer Φ ile tam ayırıcı normal formda bir fonksiyon (dnf) temsil edilmişse, bu fonksiyonun terimlerinin karşılıkları, diyagramda o bileşenle ilgili (ona tahsis edilmiş) bölgeye ✓ işareti konulmak suretiyle belirtilecektir. Biz de çalışmalarımız sırasında bu işaretleme biçimini yeğleyeceğiz. Buna alternatif olan diğer ifade biçimlerine yukarıda değinilmiştir.

ÖRNEK 1. Φ ile $x y + x' y$ fonksiyonu temsil edilmiş olsun. Bunun Karnaugh diyagramı Şekil 57 de görülmektedir.

		x	
y \		1	0
1		✓	✓
0			

Şekil 57

		x	
y \		1	0
1			✓
0		✓	✓

Şekil 58

ÖRNEK 2. Φ ile $x y' + x' y + x' y'$ fonksiyonu temsil edilmiş olsun. Bunun Karnaugh diyagramı (önceki sayfa) Şekil 58 de görülmektedir.

Önceden açıklandığı ve bu örneklerde de görüldüğü gibi, Φ nin her bir bileşenine karşılık gelen dikdörtgencik bölge belirlenerek, buraya ✓ işareti konarak Φ fonksiyonu bu sembol yardımıyla, adeta bir çeşit betimlenmiş olmaktadır. Bu aşamada yapılmak istenilen bu betimleme işinin anlaşılmasına çalışılmasıdır. Böylece, min-terimleri verilmiş bir Boole fonksiyonunun bir anlatım biçimi oluşmuş olmaktadır. Şimdi karşıt bir yaklaşımla, yukarıda olduğu gibi düzenlenmiş bir Karnaugh diyagramı verilmiş olsa, işaretleme de yapılmış olmak koşuluyla biz buradan Φ fonksiyonunu yazmayı başarabiliriz. Aşağıdaki örnek bu savı doğrulamaya yetecektir.

ÖRNEK . Karnaugh diyagramı Şekil 59 da görülen Φ fonksiyonu nedir ?

	x	
	1	0
y		
1		
0	✓	✓

Şekilden ; $\Phi : x y' + x' y'$
olduğu yazılabilecektir.

Şekil 59

Bir bölgeyi çek etmek (✓ sembolünü kullanarak göstermek) ne demektir ? Gerçekte yapılan, Φ fonksiyonundaki 1 değerini alan bileşenlere ait bölgeleri işaretlemekten ibarettir. Şimdi bu açıklamaya göre, işaretli bölgeler test edilirse,

$$x = 1, y = 1 \text{ için : } x y' + x' y' = 1.0 + 0.0 = 0 + 0 = 0 \text{ (işaretsiz),}$$

$$x = 1, y = 0 \text{ için : } x y' + x' y' = 1.1 + 0.1 = 1 + 0 = 1 \text{ (işaretli),}$$

$$x = 0, y = 1 \text{ için : } x y' + x' y' = 0.0 + 1.0 = 0 + 0 = 0 \text{ (işaretsiz),}$$

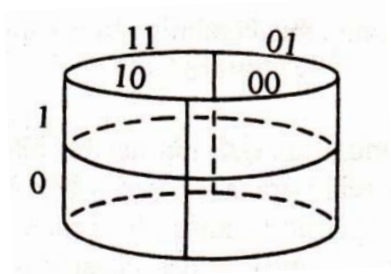
$$x = 0, y = 0 \text{ için : } x y' + x' y' = 0.1 + 1.1 = 0 + 1 = 1 \text{ (işaretli)}$$

oldukları saptanacaktır. Şimdi bir soru daha yöneltilebilecektir : Niçin 1 ?

Bölüm 4 deki çalışmalar anımsanırsa, dnf olarak ifade edilen bir Boole fonksiyonu için *birim eleman 1* 'dir. Çünkü bu bileşim şeklinde, bileşenler çarpımlardan oluşmaktadır. Aksiyom 2 gereğince *çarpma işlemi için birim eleman 1* dir.

Üç değişkenli bir fonksiyon için Karnaugh diyagramı aşağıda olduğu gibi düzenlenir. Bunun düzenlenmesinde esas alınan Şekil 60 da görülen silindirik

yapıdır. Silindirin yüzeyi simetrik şekilde 4 bölgeye ayrılırsa ve yatayda da ikiye bölünürse, şekilden izlendiği gibi sekiz bölgeyi bir şekil oluşacaktır. Önemli olan bu düzenin, Şekil 61 de görülen açılmış biçimine yansıtış şeklidir.



Şekil 60

xy		11	10	00	01
z	1				
	0				

Şekil 61

Silindirik yüzeyin üzerinde oluşan bölgelerde x,y ye ait karşılıklı simetrileri denk getirebilmek için, 11 in karşısına 00 ; 10 in karşısına da 01 konulmuştur. Bunun açılımı halinde, düzlem şekilde üst sıradaki ikili değerlerin sıralanışına dikkat edilmelidir. Bu diyagram yardımıyla $f(x,y,z)$ gibi bir Boole fonksiyonu betimleniyor ya da temsil ediliyorsa, iki değişkenli fonksiyon örneklerinde olduğu gibi, fonksiyonun temel bileşenlerine karşı gelen bölgeler (dikdörtgencikler)* belirlenerek, yine açılmış şekliyle çek edilmek suretiyle işaretlenir.

ÖRNEK 1. $f(x,y,z) = xyz + x'yz + x'yz' + x'y'z'$ fonksiyonuna ait Karnaugh diyagramı Şekil 62 de görülmektedir.

ÖRNEK 2. Şekil 63 de bir Boole fonksiyonu Karnaugh diyagramı düzenlenerek tanımlanmıştır. Bu fonksiyon nedir ?

xy		11	10	00	01
z	1	✓			✓
	0			✓	✓

Şekil 62

xy		11	10	00	01
z	1		✓		✓
	0		✓		✓

Şekil 63

Şekil 63 de çek edilmiş bölgeler değişkenler için değerlendirilirse, fonksiyon

$$f(x,y,z) = xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz'$$

olur.

(*) Bu dikdörtgenciklere bazen lup (loop) denildiği de olmaktadır.

ÖRNEK 3. Bir Boole fonksiyonu doğruluk tablosu yardımıyla tanımlanmıştır. Fonksiyonu yazmadan doğrudan Karnaugh diyagramını düzenleyerek, fonksiyonu tanımlayabiliriz.

	x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	0	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

	xy	11	10	00	01
z \					
1		✓	✓	✓	
0			✓		✓

Şekil 64

Bu doğruluk tablosuyla tanımlanmış fonksiyonun Karnaugh diyagramı Şekil 64 de görülmektedir.

Eğer fonksiyonun min.terimler cinsinden yazılması istenilmiş olsaydı, bu da

$$f(x,y,z) = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xy'z + xyz$$

şeklinde ifade edilecektir. Bir de anımsanacağı gibi böyle bir fonksiyon, satır numaraları kullanılarak, On'luk sisteme göre ifade edilebilmektedir. Bu gösteriliş biçimine göre fonksiyon, $f = \sum 1,2,4,5,7$ şeklinde de ifade edilebilmektedir.

Şimdi bu yaklaşımları birarada değerlendirirsek, bir Boole fonksiyonuna ait Karnaugh diyagramının düzenlenmesinde yeni bir tarz yeni bir biçimsellik yaratmak olanağı bulunacaktır. Bu da satır numaralarını, diyagramda oluşan dikdörtgenlere vermek suretiyle sağlanabilecektir. Bu ise doğal olarak, her sıra numarasının temsil ettiği bileşenin diyagramdaki karşılığı olan dikdörtgencik ile karşılaştırılmalı olarak numaralanmasıyla, birebir bir eşleme yapılmış olacaktır. Bu açıklamanın ışığında, örneğin $f(x,y)$ gibi iki ve $f(x,y,z)$ gibi üç değişkenli bir Boole Fonksiyonunu temsil etmek üzere düzenlenmiş diyagramlar Şekil 65 ve Şekil 66 da görülmektedir.

	x	1	0
y \			
1		③	①
0		②	④

Şekil 65

	xy	11	10	00	01
z \					
1		⑦	⑤	①	③
0		⑥	④	②	⑧

Şekil 66

Ancak görülüyor ki böylesine düzenlenmiş bir diyagramda dikdörtgen bölgelere düşen numaralar oldukça karışıktır. İşte bunu önlemek ve daha düzenli bir numaralama sistemi elde etmek için diyagramın aşağıda Şekil 67 de görüldüğü gibi düzenlenmesi daha yerinde olacaktır. Ayrıca bu numaralama işi, numaranın bulunduğu dikdörtgen içinde bir köşeciğe (genellikle sağ üst köşeciğe), bölgenin içini fazlaca örtmeyecek şekilde, uygun olan küçüklükte yazılarak yapılır. Bu numara yazılsa dahi, yine dikdörtgen içine, tanıma uygun olanlarına çek işareti konulabileceği gibi, daha ileride açıklanacak olan başkaca işlem işaretleri de konulabilecektir. Ancak şimdilik, bu uyarıya uygun diyagram, aşağıda görüldüğü gibi numaralanacaktır.

		xy			
z \	00	01	11	10	.
0	①	②	⑥	④	
1	①	③	⑦	⑤	

Şekil 67

Bu diyagramın, numaralama sistemine göre, daha tutarlı olduğu söylenebilir. Bu nedenle biz de bundan sonra, diyagramın düzenlenmesinde bu numaralama sistemine uygun diyagramlarla çalışmayı yeğleyeceğiz. Değişken sayısı artsa da, artık temel ilke oluşmuş bulunmaktadır.

Örneğin, $f(x,y,z) = xyz' + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z'$ fonksiyonu verildiğine göre, son belirlediğimiz diyagram ifadesi esas alınarak, bu fonksiyonun betimlemesi aşağıda görüldüğü şekilde yapılmış olacaktır :

		xy			
z \	00	01	11	10	.
0	✓	✓		✓	
1		✓	✓		

Şekil 68

Gerçekte bu şekilde betimleme, yani temel bileşenleri numaralarına göre, ayrılan dikdörtgenciklerin içine yerleştirme işlemi, fonksiyonun,

$$f(x,y,z) = \Sigma 6,4,3,2,0$$

şeklinde ifade edilmesiyle eşanlamlıdır.

Değişken sayısı arttıkça diyagramın düzenlenmesinde de güçlükler artar. Bu tür diyagramların, dört değişkenlisinden sonrası için yapay bazı düzenlemelerle elde edildiği bilinmektedir. Bunlara elbette değinilecektir. Ancak önce dört değişkenli bir Boole Fonksiyonu için düzenlenecek Karnaugh diyagramını inceleyelim. Buradaki yaklaşım oldukça makul ve işlem açısından da pratik bir çözümlemeye elverişli bir ortam oluşturabilmektedir. Diyelim ki değişkenler x, y, z, t ise ilk ikisi için üst kısımda oluşan ikililerin benzerlerini solda sütun olarak düzenlemek bu iş yeterli olabilmektedir. Bu düzenin bir açıklaması Şekil 69 da ve buna ait yorum ise hemen yanında, Şekil 70 de görülmektedir.

	xy			
zt \	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Şekil 69

	xy			
zt \	00	01	11	10
00	$x'y'z't'$	$x'yz't'$	$xyz't'$	$xy'z't'$
01	$x'y'z't$	$x'yz't$	$xyz't$	$xy'z't$
11	$x'y'zt$	$x'yzt$	$xyzt$	$xy'zt$
10	$x'y'zt'$	$x'yzt'$	$xyzt'$	$xy'zt'$

Şekil 70

Burada da görülmektedir ki 4 değişken için oluşabilecek maksimum terim sayısına göre ki burada $2^n = 2^4 = 16$ dır ; her temel bileşen için bir yer vardır.

ÖRNEK . $f(x, y, z, t) = xyz't' + xy'zt + xy'z't' + xy'z't + x'yz't + x'yz't' + x'y'z't'$ fonksiyonu veriliyor. Karnaugh diyagramı Şekil 71 de görüldüğü gibi düzenlenmiş olacaktır.

	xy			
zt \	00	01	11	10
00	✓			✓
01		✓		✓
11		✓		✓
10			✓	

Şekil 71

$n = 4$ için yukarıda açıklandığı şekilde çözümlenen Karnaugh diyagramı uygulamasını ve yorumlamasını, değişken sayısı arttıkça ifade etmek giderek güçleşmektedir. Değişken sayısının artması kavramı da yine sınırlı tutulmaktadır. Örneğin bu nihayet $n = 5$ ve $n = 6$ için gerçekleştirilebilmektedir. Kaldı

ki aşağıda açıklanan ifade biçimleri incenirse, bunların biraz zorlama bir ifade biçimi olduğu anlaşılacaktır. Ayrıca pratik yaklaşımda da o kadar kullanışlı oldukları iddia edilemez. Bunlara karşın yine de bir ifade biçimi oluşturmaları nedeniyle bilgi olarak sunulması yararlı olacaktır. İki ayrı yaklaşımla ifade edilen bu diyagramların önce $n = 5$ için olan gösterilişleri verilmektedir.

x	0					1								
	yz					yz								
	st	\	00	01	11	10	.	st	\	00	01	11	10	.
	00							00						
	01							01						
	11							11						
	10							10						

Şekil 72

Bu şekilde görülen diyagram ile $f(x,y,z,s,t)$ gibi beş değişkenli bir fonksiyon betimlenebilecektir. x değişkeninin 0 değerleri için soldaki blok ; x değişkeninin 1 değerleri içinse sağdaki blok içinde düzenlenmiş olan tablo kullanılabilir. Böylece x in dışında kalan diğer dört değişken için ikili ikili olmak üzere, önceki uygulamanın bir benzerini burada tekrarlamak suretiyle bu gösterim sağlanmış olabilecektir. Buna dair bir uygulama aşağıdaki örnekte görülmekte olup, beş değişkenli bir fonksiyon Şekil 73 de betimlenmiştir.

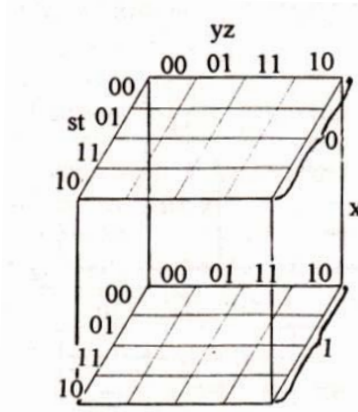
ÖRNEK . $f(x,y,z,s,t) = xyzst + xyz's't + xyz's't' + x'yzst + x'yz's't + x'y'z's't' + x'yz's't + x'y'z's't + x'y'z's't'$

fonksiyonu için düzenlenmiş ve fonksiyonu betimleyen Karnaugh diyagramı Şekil 73 de görülmektedir.

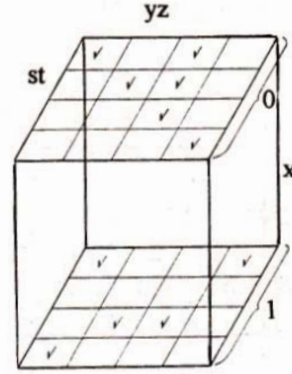
x	0					1						
	yz					yz						
	st	\	00	01	11	10	st	\	00	01	11	10
	00		✓	✓			00					
	01					✓	01				✓	
	11		✓		✓		11			✓		
	10					✓	10				✓	

Şekil 73

$n = 5$ olması halinde bir gösteriliş biçimi de aşağıda verilmiştir. Yukarıdaki diyagram düzlemde çözümlenmişken, bu kez çözümleme hacimde sağlanmış olacaktır. Bu da Şekil 74 de görülmektedir.



Şekil 74



Şekil 75

Bu gösteriliş biçiminde de, bloklar üstüste gelecek şekilde yerleştirilmişlerdir. Böylece oluşan hacimsel gösteriliş yorum olarak hiç de öncekinden farklı boyutlar taşımamaktadır. Değişkenlerden birinin alacağı 0 ve 1 değerleri düzlemlere verildikten sonra, bu düzlemler içinde ki bunlar birer kare gibi düşünülmüş olup, kenarları yine ikili ikili değişkenlere paylaştırıldığında, fonksiyonu betimleme işi burada da bir biçimde çözümlenmiş olmaktadır. Bunu, Şekil 74 incelendiğinde, daha ayrıntılı olarak anlamak olanaklıdır.

ÖRNEK . $f(x,y,z,s,t) = xyzst + xy'zst + xyzs't + x'y'z's't + x'yz'st + xy'zs't + x'y'z's't + x'y'z's't$

fonksiyonu için Karnaugh diyagramı hacimsel biçimde düzenlenirse, Şekil 75 de görülen betimleme şekli elde edilmiş olacaktır.

Burada üst düzlem x değişkeninin 0 değerlerini, alt düzlem ise 1 değerlerini aldığı kısımlar olarak paylaştırılırsa, geriye kalan yz ve st değişkenleri bu şekilde ikililer oluşturarak, kare düzlemlerin birer kenarında, önceki $n = 4$ için olan uygulamaya benzer şekilde değerlendirildiğinde, hacimde bütün değişkenler toplam 32 dikdörtgencikten oluşan bölgeler yardımıyla, eksiksiz olarak yerleştirilmiş olacaktır. Bu yerleşim şekline uygun bölgecikler, dnf yapısında

iş bir fonksiyonun her terimine karşılık bir yer gösterebilmiş olmaktadırlar. Bu da yine $n = 5$ halinde de birebir bir eşleşmenin yapılabildiğini göstermektedir.

$n = 6$ olması halinde yani fonksiyondaki değişken sayısının altı tane olması halinde uygulamaya konulabilecek bir Karnaugh diyagramı tasarımı aşağıda Şekil 76 da görülmektedir.

		x				1			
		0				1			
y	uv	st				st			
		00	01	11	10	00	01	11	10
	00								
	01								
	11								
	10								
1	uv	st				st			
		00	01	11	10	00	01	11	10
	00								
	01								
	11								
	10								

Şekil 76

Yukarıdaki açıklamalardan ve ortaya konan tasarımlardan yola çıkarak denilebilir ki Karnaugh diyagramının bir Boole fonksiyonunu betimlemesinde ve daha sonra görüleceği gibi minimumlaştırılması sürecinde bir yöntem olarak kullanılması aşamasında galiba lojik olan yaklaşım, en fazla $n = 4$ için, yani en fazla dört değişkenli bir fonksiyon için olanıdır. n nin daha büyük değerleri için kullanılması düşünülse bile, bunun dahi $n = 5$ ve $n = 6$ ile sınırlı olduğu zaten görülmektedir. Bu uygulama yeteneği, Karnaugh diyagramının ancak sınırlı sayıda değişkeni olan fonksiyon için kullanılmasına olanak sağlayacaktır. Bu ilkeye dayanarak, bundan sonraki çalışma ve örnekleme sürecinde biz de en fazla dört değişkenli fonksiyonları seçmiş ve incelemiş olacağız.

8.10.2. Karnaugh Diyagramında Bitişiklik İlkesi

Karnaugh diyagramının, bir fonksiyonun indirgenmesi ya da diğer bir deyimle minimumlaştırılması sürecinde bir araç olarak kullanılması sırasında ortaya çıkacak en önemli deyim *bitişiklik* olarak görülmektedir. Bu deyim ile kast

edilen kavram, çizilmiş olan bir diyagramda oluşan dikdörtgenciklerin ya da loopların birbirlerine göre olan durumlarıdır. Eğer iki dikdörtgencik'in ortak sınırı varsa bunlar *bitişik iki dikdörtgencik*'tir. Bu durumda, bu iki dikdörtgencik için *Hamming Uzaklığı* yani d , $d = 1$ olarak ifade edilecektir. Demek ki karşıt bir ifadeyle, Hamming uzaklığı 1 e eşit olan dikdörtgencikler *bitişik (komşu) dikdörtgencikler*'dir. Bu dikdörtgenciklerin komşuluğu, hem düşey anlamda hem de dikey anlamda gerçekleşmektedir. Bu tür bir komşuluğun ayrıca belirtilmiş olması da gerekmemektedir. Şekil 77 ve Şekil 78 incelendiğinde, bazı komşu bölgelerin, özel olarak işaretlenmiş oldukları görülmektedir. Bunlar, ilkinin üç, ikincisinin ise dört değişkenli fonksiyon için düzenlendiği düşünülmektedir, modellenirilmiş bulunmaktadır. Özellikle Şekil 77 de görülen komşulukların özel bir açıklaması vardır ve bunun için Şekil 60 bir kez daha gözden geçirilmelidir. Burada 000 ile 100 ın ve keza ikinci sırada 001 ile 101 in komşu bölgeler olduğu, Şekil 60 yardımıyla açıklanabilmektedir. Burada sözü edilen değerler,

xy \ z	00	01	11	10
0	✓	✓		
1	✓			✓

Şekil 77

zt \ xy	00	01	11	10
00	✓	✓	✓	
01				
11				✓
10	✓	✓		✓

Şekil 78

tanım ve oluşturulan algoritma gereğince test edildiğinde, her ikisinde de Hamming uzaklığının $d = 1$ olduğu görülmektedir. Bu yaklaşımla da esasen, bunların *bitişiklik özelliği* olduğu söylenebilecektir.

Şekil 78 deki komşuluklar, yani *bitişiklik özelliği* olan dikdörtgencikler (karecikler ki bu şekillerimizde böyle çizilmiş oldu) dikkatlice incelenir ve belirlenirse, ✓ ile işaretlenmiş olanlar olarak görülmektedir ki :

- a) 0000 ve 0100 ve 1100 işaretli olarak, ikili bir blok oluşturmaktadırlar. Yatayda oluşan bu blok ; 0000 - 0100 ile 0100 - 1100 şeklinde iki ayrı *bitişiklik* olarak değerlendirilebilecektir. Bunun nasıl seçileceği ve yararlılık il-

kesi bakımından nasıl kullanılacağı ve yorumlanacağı daha sonra açıklanacaktır. Buradaki ikililer için :

$$d = (0\underline{1}00 ; 0\underline{0}00) = 1 \quad ; \quad d = (\underline{1}100 ; \underline{0}100) = 1$$

oldukları görülmektedir.*

- b) 0010 ve 0110 ın bitişiklik özelliği bulunmaktadır. Bunlar için de Hamming uzaklığı hesaplanırsa,

$$d = (0\underline{1}10 ; 0\underline{0}10) = 1 \quad **$$

olduğu görülür. Öyleyse gerçekten bitişiktirler. Yatayda oluşan bu bitişikliği, ister gözlem ister hesap yoluyla olsun belirlemiş bulunuyoruz.

- c) 1011 ve 1010 ın bitişiklik özelliği vardır. Düşeyde gerçekleşen bu bitişiklik için Hamming uzaklığı hesaplanırsa,

$$d = (101\underline{0} ; 101\underline{1}) = 1$$

olduğu bulunur. Bu sonuç bize bitişikliğin varlığını ifade eder.

- ç) 1100 ve 1011 bitişiklik özelliği olmayan iki bölgedir. Bunları şekilde bulunuz ve gözlem yoluyla bitişik olmadıklarını görünüz. Ancak hesap yoluyla

$$d = (1\underline{0}11 ; 1\underline{1}00) = 3 \neq 1$$

olduğu görülerek, bitişiklik özelliği olmadığı kesin olarak söylenebilecektir.

- d) Örneğin 0110 ve 1010 için de bitişiklik özelliği olmadığı hem gözlem yardımıyla hem de,

$$d = (\underline{1}010 ; \underline{0}110) = 2 \neq 1$$

olarak hesap yoluyla belirlenmiş olacaktır.

Kuşkusuz bu örnekleri çoğaltmak olanaklıdır. Bunun için sadece yukarıdaki

(*) Hamming Uzaklığı için : Bkz. Sayfa 195

(**) İkilik düzendeki sayılardan, aynı basamakta, ancak farklı olanların altları çizilmiştir.

örneklerimizle sınırlı kalmak da gerekmez. Ancak bundan sonraki alt-bölümde ele alınacak olan konu esasen bu yorumu da içermiş olduğundan, yer yer bu bilgilerden yararlanılabileceği gibi, bunlara da yeni bilgiler eklenmesi her an için olanaklı bulunmaktadır.

8.10.3. Minimumlaşmanın Karnaugh Diyagramı Yardımıyla Gerçekleşmesi

Bu bölümün ana teması, bir Boole fonksiyonunun minimumlaştırılması ya da diğer bir deyişle indirgenmiş biçimde ifade edilebilmesidir. Bunu, bir bakıma *ekonomikleştirme* olarak da açıklayabiliriz. Bu kavramla ilgili olarak, önceki bölümlerimizde yeteri kadar bilgi sunulmuştur. Bunu bir mühendislik uygulaması olarak değerlendirdiğimizde, bu kavram gereğinde *maliyet faktörü* gibi bir başka deyimle yer değiştirebilmektedir.

Yukarıdan beri yapılmış olan çalışmalarda, bu konuda değişik yaklaşımlar ve algoritmalar yardımıyla bunun nasıl sağlanabileceği ; önerilmiş olan ve kullanılan yöntemler açısından bunların olumlu ya da olumsuz yönleri, hem kuramsal olarak hem de uygulama ve örneklerle, yeterince açıklanmış bulunmaktadır. Hatta bunlar arasında, hayli ayrıntı içeren ve zaman zaman oldukça karmaşık bir doku oluşturan, örneğin bir Quine-Mc Cluskey Yöntemi gibi, bir yöntemi de incelemiş bulunuyoruz.

İşte, *Karnaugh Diyagramı* ile yapılacak minimumlaştırma ya da sadeleştirme işlemini, bir yöntem olarak benimsemek ve sunmak, çalışmamıza önemli ve oldukça da pratik bir boyut kazandırmış olacaktır. Yukarıdaki tanım ve açıklamalar ışığında oluşacak algoritma, aynı zamanda *gözlem gücümüzü* de işin içine kattığından, sonuca varmada, sadece hesap ya da hesaplar yapma dışında bu çalışma biçimi de uygulamada kullanılmış olmaktadır ki bu çeşit bir çalışma öncekilerden oldukça farklı kabul edilebilecektir.

Karnaugh diyagramının kullanılmasıyla, min-terimleriyle verilmiş bir fonksiyonun minimumlaştırılmasında nasıl bir yol izlenecektir ve bu iş yapılırken hangi ilkeler oluşacaktır ? Şimdi bu sorularımıza yanıt bulmaya çalışalım. Bunun için çoğu kez örneklerden güç almak gerekecek, belki bazı açıklamalar bu yolla yapılabilecektir. Ancak unutulmamalıdır ki esasen yapılmak istenilen, zaten uygulamaya dönük bir çalışmanın açıklanmasıdır.

Burada, önceki alt-bölümlerdeki bilgiler sıkça kullanılacaktır. İşte onlardan yararlanarak ortaya konacak ilk ilke aşağıdaki basit örnekte görülmektedir.

Şekil 79 da görülen diyagram, üç değişkenli bir fonksiyon için düzenlenmiştir.

		xy			
		00	01	11	10
z	0		✓		
	1		✓		

Şekil 79

		xy			
		00	01	11	10
z	0	✓			✓
	1				

Şekil 80

Önceki bilgilerimizi kullanarak, bu diyagramın $f(x,y,z) = x'yz' + x'yz$ fonksiyonuna ait olduğunu kolayca söyleyebiliriz. Oysa bu fonksiyon,

$$f(x,y,z) = x'yz' + x'yz = x'y(z + z') = x'y.1 = x'y$$

olarak, hesap yoluyla sadeleştirilebilecektir. Şekil 79 da görüldüğü gibi, bunu diyagramdan elde etmek şöyle açıklanabilecektir. Burada 010 ile 011 bitişiklik özelliği bulunan bölgelerdir. Üstüste gelen bu iki bölgenin ortak çizgisi z değişkeni için sözkonusudur. Yani farklı iki değeri alan z değişkenidir. Öyle ise burada z değişkeni elemine edilecektir. Diyagrama göre, minimumlaştırılmış fonksiyon $f(x,y,z) = x'y$ olacaktır.

Şekil 80 de ise daha özel bir açıklamayı gerektiren bir bitişiklik sözkonusudur. Bunun için bir kez daha Şekil 60 dan yararlanılmalıdır. Burada 000 ile 100 bitişik bölgeler olup, bunlar da sadeleşmeye elverişli bir durum gösterirler. Şöyle ki yatayda oluşan bu bitişiklikte değişmeyen değerler y, z değişkenleri için 00 olarak görülmektedir. Buna karşın farklı değerleri alan bu kez x dir. Öyleyse x elemine edilecektir. Buna göre diyagrama bakarak, minimumlaşmış fonksiyonun $f(x,y,z) = y'z'$ olduğu belirlenecektir.

Aşağıdaki iki örnekte ise bitişiklik sayısı daha fazla olan diyagramlar incelenecektir. Yan sayfada görülen Şekil 81 ve Şekil 82 deki diyagramlar benzerlik göstermektedirler. Bu diyagramlarda izlenmesi gereken yol şöyle açıklanabilecektir :

-Her ikisinde de ortak olan, düşeyde olan bitişiklikte z farklı iki değeri de alan değişken olarak görülmektedir. Öyleyse bu değişken elemine edilecektir.

xy z	00	01	11	10
0		✓	✓	
1		✓	✓	

Şekil 81

xy z	00	01	11	10
0	✓	✓		
1	✓	✓		

Şekil 82

- Düşeydeki bitişiklik bu şekilde ortadan kalkınca, yataydaki bitişiklik incelenecektir.
- Bu iki türlü gerçekleştirilebilir. Ya z nin 0 değerini aldığı 1. satırda ya da z nin 1 değerini aldığı 2. satırda ...
- Şekil 81 de, ilk satırda farklı olan değerler x e aittir. Öyleyse bu elemine edilir ve böylece $f = y$ bulunur. İkinci satırda farklı değerler yine x e aittir ve yine x elemine edilir. Yani sonuçta fonksiyon yine $f = y$ dir. Demek ki bu aşamada ilk ya da ikinci satıra göre bir işlem yapılması farklı bir sonuç vermez. Bu demektir ki düşeydeki eliminasyondan sonra yatayda herhangi bir satırdaki işlemin sonucu, bütün satırlara ait olacaktır.
- Bu açıklamalara göre Şekil 81 de görülen diyagrama bakarak fonksiyonun minimumlaştırılmış halinin $f(x,y,z) = y$ olduğu söylenebilecektir.
- Şekil 82 de görülen diyagrama göre, fonksiyonun minimumlaştırılmış hali $f(x,y,z) = x$ dir. Okuyucu, yukarıdakine benzer bir usavurma yaparak bunu açıklamaya çalışmalıdır.

Diyagram üzerinde yapılan çalışmanın bir türü de, eliminasyonda kullanılan ve bitişiklik özelliği olan bölgelerden alınanları bir (genelde düzgün) bir kapalı eğri çizerek göstermektir. Bunun önemi, bitişiklik özelliği birden çok olan bölgelerle yapılan çalışmada, seçenek olarak kullanılan bölgelerin belirlenmesini sağlamaktır. Şekil 83 ve Şekil 84 teki diyagramlarda bu tartışılıyor.

xy z	00	01	11	10
0	✓	✓		
1	✓	✓	✓	✓

Şekil 83

xy z	00	01	11	10
0	✓	✓		
1		✓	✓	✓

Şekil 84

İkinci şekilde kesik çizgili olarak gösterilen eğriler, alternatif seçenekleri temsil etmektedirler.

Şekil 83 de, bitişiklik özelliği itibarıyla, hangi bölgelerin dikkate alınacağı ve ilişkilendirileceği bu kapalı eğriler yardımıyla anlatılmaya çalışılmıştır. Bu diyagrama bakarak, fonksiyonun minimumlaştırılmış halinin $f(x,y,z) = x + z$ olduğu söylenebilecektir.

Şekil 84 de, hem yatayda hem de düşeyde bitişiklik özelliği olan bölgeler, ikili bölgeler olarak kapalı eğrilerle belirtilmiş bulunmaktadır. Bunlardan bir seçenek olarak, 000 ile 010 bir çevrim oluştururken, alternatif düşeyde 010 ile 011 olmaktadır. Demek ki ya önceki ya da sonrakini alabiliriz ama ikisini birden almak olanaklı değildir. Bir benzer oluşum, 011 ile 111 in bitişikliğine karşın alternatif olarak 111 ile 101 in bitişikliğidir. Burada da yine ancak biri kullanılabilecektir. Bu türlü bir problemde de doğal olarak, fonksiyonun minimumlaştırılmış hali, yukarıdaki seçeneklerin kullanımına bağlı olarak, birden çok sonuç verebilmektedir. Nitekim burada da

$$f(x,y,z) = x'z' + xz + x'y$$

$$f(x,y,z) = x'z' + xz + yz$$

oldukları yazılabilecektir.

Şekil 84 deki uygulamada bu sonuçlar elde edilirken, farklı olan bileşenin, şekilde çizgili olarak gösterilen seçeneklerin kullanılmasından ortaya çıktığı anlaşılmaktadır.

Aşağıda, dört değişkenli fonksiyon için düzenlenmiş, çeşitli diyagram örnekleri görülmektedir. Şekil 85 ve Şekil 86 da görülen bu diyagramlarda temel ilkeler yine bitişiklik ve alternatif seçimler üzerinde bütünleşecektir. Verilen şekillerde alternatif bitişiklikler var olmakla birlikte, burada kesin olan seçim kapalı eğriyle belirtilmiş olduğundan, ayrıca kesikli çizgi kullanılarak bir seçenek gösterilmemiştir. Kaldı ki bu seçenekler kullanılırken, bunlardan en olumlu sonucu verecek olan bitişiklik yeğlenecektir. Bu nedenle, seçenek oluşturmaya karşın, iyi bir sonuç vermeyecek, diğer bir anlatımla, minimumlaştırmaya diğerine göre daha az katkıda bulunacak bir seçim herhalde yeğlenmeyecektir. İşte bu yaklaşımla, seçenek oluşturan bitişiklikler, işleme sokulmadan önce, bu gözle eleştirilmiş olmalıdır.

xy \ zt	00	01	11	10
00			✓	✓
01	✓			✓
11	✓			✓
10			✓	✓

Şekil 85

xy \ zt	00	01	11	10
00				✓
01		✓	✓	
11	✓	✓		
10				

Şekil 86

Bu diyagramlara bakarak, ilk diyagramla fonksiyonun minimumlaştırılmış hali,

$$f(x,y,z,t) = xt' + y't$$

olarak ifade edilecektir. Şekil 86 daki diyagramdaysa, fonksiyon, minimumlaştırılmış olarak ifade edildiğinde,

$$f(x,y,z,t) = xy'z't' + yz't + x'zt$$

yazılacaktır. Burada özellikle sağ-üst köşede bulunan ✓ edilmiş bölge yatayda ve/veya düşeyde bir başka ✓ edilmiş bölgeyle bitişiklik özelliği göstermediğinden, bununla ilgili bir eliminasyon söz konusu olamaz. Öyleyse, bir minterimi gösteren bu temel bileşen, fonksiyonun minimumlaştırılmış halinde de bir terim olarak aynen görülecektir. İşte yukarıdaki fonksiyonda $xy'z't'$, bu şekilde gelmiş olan bir bileşen olmaktadır.

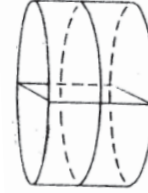
Daha özel bir örnek olarak, Şekil 87 de görülen diyagram incelenebilir. Bu diyagramda bitişiklik özellikleri yatayda ve düşeyde özel olarak değerlendirilmelidir. u diyagram ile düşeydeki bitişikliğin bir çeşidinin de ilk ve son sırada ✓ edilmiş bölgelerde görüldüğü şekilde oluştuğudur. Şekil 60 da öngörülmüş olan silindir yüzeyini bu kez, Şekil 88 de görüldüğü şekilde yorumlamak olanaklıdır. Böylece, 0000 ile 0010 ın ; 0100 ile 0110 ın ; 1100 ile 1110 ın

xy \ zt	00	01	11	10
00	✓	✓	✓	✓
01				
11				
10	✓	✓	✓	✓

Şekil 87

ve 1000 ile 1010 ın düşeyde bitişiklik özelliği gösterdikleri kolayca anlaşılabilecektir. Kaldı ki bu özellikte oldukları bir başka tanıma dayalı olarak da kanıtlanabilir. Burada sözkonusu edilen bitişikliklerin oluşması koşulu, herbirinde *Hamming uzaklığı*'nın 1 olmasıdır. Oysa görüyoruz ki gerçekten de hepsinde bu böyle gerçekleşmektedir.

$$\begin{aligned} d &= (00\underline{1}0 ; 00\underline{0}0) = 1 \\ d &= (\underline{1}100 ; \underline{0}110) = 1 \\ d &= (11\underline{1}0 ; 11\underline{0}0) = 1 \\ d &= (10\underline{1}0 ; 10\underline{0}0) = 1. \end{aligned}$$



Şekil 88

Bitişiklik özelliği olan bu bölgeler dikkate alınarak yapılacak minimumlaştırma işlemi sonrasında fonksiyonun, en sade şekliyle, Şekil 87 ye göre,

$$f(x,y,z,t) = t'$$

den ibaret olduğu görülmektedir. Buraya ulaşmada, ara işlemlerin, yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda nasıl gerçekleştiği, artık yorumlanabilmelidir.

8.11. KEYFİ ÇIKIŞ (D'ont Care) KOŞULLARI

Buna *Negatifleme Lojigi* de denilmektedir. Çünkü görülecektir ki burada temel iki terim, **Ve Değil (NAND) Lojigi** ile **Veya Değil (NOR) Lojigi** olarak görülmektedir. Her iki deyim de **değil** kavramını içermektedir.

Bu konu, daha çok teknik uygulamaya dönük bir içerik göstermektedir. Burada uygulama, çeşitli yapıdaki kapılar yardımıyla *giriş koşullarına göre*, bir fonksiyon düzenlenmesi amacını gütmektedir. Bunun yardımıyla bir *lojik kapı* sonuçta **VE** ya da **VEYA** fonksiyonu verecektir. *Lojik 1* ve *Lojik 0* * tanımlarına göre bu ilişkiler *Ve-Değil* , *Veya-Değil* kapılarında geçerli olduğundan, bu elemanlara "Ve-Değil Elemanı / Veya-Değil Elemanı" denilmektedir. Örneğin De Morgan ilişkilerinde olduğu gibi, Ve ile Veya arasında kurulmuş olan bir birliktelik, bu iki bağlacın değil'leriyle yapılan bir birliktelik olarak ifade edilebilecektir. Burada De Morgan ilişkileri bir kez daha anımsanırsa,

$$\forall x,y \in \beta \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} (x + y)' &= x' \cdot y' \\ (x \cdot y)' &= x' + y' \end{aligned}$$

(*) Bkz. Syf. 208

oldukları yazılacaktır. Bu ilişkiler Ve-Veya dan, **Değil Ve - Değil Veya'** ya geçişi simgelemektedirler.

Fonksiyon çıkışlarının bazı kombinezonlar için önemli olmadığı durumlar olabilmektedir. Yani çıkışın 1 ya da 0 ile sonuçlandığının önemi bulunmayabilir. İşte bu tür çıkışlara *Keyfi Çıkış Koşulları* denir. Bunlar $\times$ ile gösterilir. Ancak $\times$, 1 ise artık 0 olamaz ; $\times$, 0 ise artık 1 olamaz.

Bu işlemler sırasında yine minimumlaştırma ya da sadeleştirme, bir temel işlem olarak görülmekte ve bunun için sıkça Karnaugh diyagramından yararlanılmaktadır. Nitekim bu konunun burada işlenmesinin bir nedeni de Karnaugh diyagramıyla ilgili yeteri kadar bilgiyi daha önce edinmiş olmamızdır. Karnaugh diyagramı işlenirken, min-terimler yine alışıldığı gibi $\checkmark$ sembolü kullanılarak, buna karşı keyfi-çıkış koşulları işlenirken $\times$ sembolü kullanılarak gösterilmiş ve bu ayırım bir bakıma sağlanmış olacaktır. Bunu aşağıdaki uygulamalarda da görmek olanaklıdır.

Min-terimleriyle verilmiş bir Boole fonksiyonu için *keyfi çıkış koşulları* yine bu terimler cinsinden seçilmiş, ancak bileşenler içinde olmayan bazı bileşimlerdir. Ancak bu seçimde temel özellik, yukarıda De Morgan ilişkileri verilerek yapılan açıklamadan da anlaşıldığı gibi, seçilecek bileşimlerin, min-terimlerin bir değillemesini (hiç olmazsa bir değişken için bile olsa) içermesidir. Bunları açıklamaya yardımcı olacağı düşüncesiyle, aşağıdaki örneği inceleyelim :

ÖRNEK . $\Phi : f(x,y,z,t) = x'y'z't' + x'yz't' + x'yz't + xy'z't' + x'yz't'$
fonksiyonu verilmektedir. Keyfi çıkış koşulları : $xy'z't'$, $x'y'zt'$, $xy'zt'$, $x'yz't$, $xyzt$ olarak seçilmişlerdir.

Fonksiyona göre düzenlenmiş olan Karnaugh diyagramı Şekil 89 da görülmüyor.

zt \ xy	00	01	11	10
00	$\checkmark$	$\checkmark$		$\times$
01		$\checkmark$		$\checkmark$
11		$\times$	$\times$	
10	$\times$	$\checkmark$		$\times$

Şekil 89

Bu diyagramda, başta yapılmış olan açıklamaya koşut olarak, min-terimler ✓ ile işaretlenerek, keyfi çıkış koşulları da × ile işaretlenerek gösterilmişlerdir. Bu işaretleme sistemine göre, diyagramda bu bileşenlerin ne şekilde yer aldığı ve bunların nasıl yorumlandığı çizgilerle (kapalı eğrilerle) açıklanmaktadır.

Keyfi Çıkış Koşulları'nın nasıl seçilmiş oldukları incelenmelidir. Kuşkusuz bu koşullar başka türlü de oluşturulabilirdi. Çünkü *keyfi* sözcüğü bu olanağı size vermektedir. O zaman akla gelecek soru şu olmalıdır : Acaba hangi kıstas ya da ölçek kullanılarak bu koşullar seçilmelidir ? Acaba herhangi seçimlerden sonra, daima aynı sonuca varmak olanaklı mıdır ?

Bu sorulara yanıt araştırılırken, sanırım problemin çözümü için de gerekli açıklama yapılmış olacaktır.

Keyfi Çıkış Koşullarının seçimini yaparken, bir öneri olarak, önce fonksiyonun Karnaugh diyagramının düzenlenmesinde yarar vardır. Şekil 89 a önce bu gözle bakalım. Yani sadece min-terimleri temsil eden ✓ ile işaretlenmiş bölgeleri belirleyelim. Sonra komşuluk ya da bitişiklik özelliği gözönünde bulundurularak, bunlarla en iyi kombine edilebilecek bölgeleri belirleyelim. Keyfi Çıkış Koşullarını seçtiğimiz bölgeler içine × işaretini koyarak belirteyim. Bu bölgelere ait bileşenlerin ne olması gerektiğini yazalım.

İşte bu yaklaşımlarla, yukarıdaki örneğimiz incelenmeye devam edilirse, şekilden birleştirilebilecek biricik ikili kombinasyonun 0100 ile keyfi koşuldan gelen 1001 olduğu görülür ki bu Şekil 89 da bir kapalı eğriyle belirtilmiştir. Buradan $xy'z'$ bileşeni gelecektir. Başka en iyi kombinasyon 01 kolonunda görülmektedir. Burada da üstüste bölgelerin tümünün komşuluk ilişkisi olduğu görülür. Bu bölgelerin tümü birarada birleştirilmişlerdir. Öyleyse buradan da sadece $x'y$ bileşeni gelecektir. İlk kolonda 0000 da bulunan ✓ ile 0010 da bulunan × birarada düşünülürse (Şekil 88 deki ilke doğrultusunda) bir yaklaşımla $x't'$, diğer bir yaklaşımla $y't'$ verecektir. 1111 de 1010 da × ile işaretlenerek gösterilmiş olan keyfi çıkış koşulları, kullanılmadığı ya da önceki seçeneklere göre bunlara gerek kalmadığı için alınmamışlardır. Böylece, bu *keyfi çıkış koşullarına göre*, Φ fonksiyonunun min-terimler cinsinden minimumlaştırılmış ifadesi şu iki fonksiyona indirgenmiş olacaktır :

$$f_1(x,y,z,t) = xy'z' + x'y + x't'$$

$$f_2(x,y,z,t) = xy'z' + x'y + y't' .$$

Burada keyfi çıkış (don't care) koşulları, Karnaugh diyagramının da katkısı ile bir minimumlaştırma problemi için kullanılmışlardır.

ÖRNEK. Şimdi daha farklı verilmiş bir fonksiyon için problemi inceleyelim. Burada fonksiyon

$$f(x,y,z) = y' + x'z'$$

olarak verilmektedir. Keyfi Çıkış Koşulları : $x y + y z$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu verilerden hareket ederek, aşağıdaki analiz yapılabilecektir.

Öncelikle fonksiyon min-terimler cinsinden ifade edilmiş olmalıdır. Buna koşut olarak, keyfi çıkış koşulları da min-terimler cinsinden ifade edilmelidir. Bu yaklaşıma göre öncelikle $a + a' = 1$ olduğu ilkesinden hareketle ;

YZ	00	01	11	10
x \				
0	✓	✓	×	✓
1	✓	✓	×	×

Şekil 90

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= y' + x'z' = y'(x+x')(z+z') + x'z'(y+y') = \\ &= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + x'yz' + x'y'z' = \\ &= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + x'yz' \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde keyfi çıkış koşulları düzenlenirse :

$$x y + y z = x y (z + z') + (x + x') y z = xyz + xyz' + x'yz + x'yz' = xyz + xyz' + x'yz$$

olur ki buradan bu bileşenlerin : xyz ; xyz' ; $x'yz$ oldukları belirlenir. Bir yoruma göre, fonksiyon veriliş biçimiyle, bu anlatım içindedir.

Fonksiyonun Karnaugh diyagramı Şekil 90 da görülmektedir. Burada, temel bileşenler ✓ ile işaretlenmişlerdir. × ile de keyfi çıkış koşulları gösterilmiştir. Görülmektedir ki bileşenlerle keyfi koşullar diyagramı tümüyle kaplamışlardır. Yani diyagramdaki sekiz bölgecikten her birinde ✓ ya da × işareti bulunmaktadır. Öyleyse bütün komşu (bitişiklik özelliği bulunan) bölgecikler arasında, minimumlaştırma işlemi yapılabilecektir. Öyleki bu işlem sonunda × işaretli yerlerde 1 olduğu varsayılırsa, fonksiyonun bir çıkışı da $f_1 = 1$ olur.

8.11.1. Ve - Değil (NAND) Lojiği

Ve-Değil Lojiğinde ; Ve, yani $.$ (= çarpma operatörü) lojiğinde olduğu gibi min-terimler ve maks-terimler için var olan , işlemler tanımlıdır.

a°) Çarpımların Toplamını 2 Kademeli Gerçekleme :

- Fonksiyondaki en az 2 elemana sahip, her bir $\wedge$ ifadesi için ki Boole'deki karşılığı . işlemidir ; bir Ve-Değil kapısı çizilir. Her bir Ve-Değil kapısının girişleri terimin elemanlarıdır. Bu 1. kademeyi oluşturur.
- 1. kademedeki kapıların çıkışlarından gelen girişlerle, 2. kademede bir tek Ve-Değil kapısı çizilir.
- Tek başına olan terim ise, tümleyeni alınıp 2. kademeye girilir.

ÖRNEK . Bir Boole fonksiyonu min-terimleriyle

$$f(x,y,z,t) = \sum 0,1,3,7,8,9,10,14,15$$

olarak tanımlanmıştır. Bu fonksiyonu Ve-Değil kapılarıyla, 2 kademeli gerçek-lenmesi şeklinde basitleştiriniz ve çıkış fonksiyonunu gösteriniz.

zt	00	01	11	10
xy	0	1	3	2
00	✓	✓	✓	
	4	5	7	6
01			✓	
	12	13	15	14
11			✓	✓
	8	9	11	10
10	✓	✓		✓

Şekil 91

Buna ait Karnaugh diyagramı Şekil 91 de görülmektedir.

Şekilde kombine edilebilen bölgeler ✓ ile işaretlenerek gösterilmiştir.

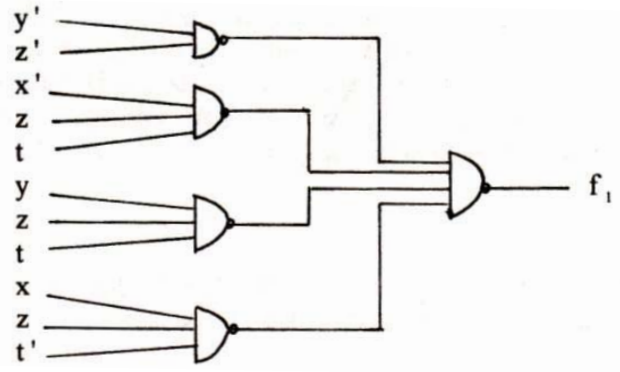
Fonksiyonun ve çıkış lojik devresinin aldığı durum Şekil 92 de görülmektedir.

$$f_1(x,y,z,t) = y'z' + x'zt + yzt + xzt'$$

olur ki bu fonksiyona ait 2 kademeli çıkış fonksiyonu şekil 92 görüldüğü gibi yorumlanmış olmaktadır.

b°) Toplamların Çarpımını 3 Kademeli Gerçekleme :

- Fonksiyonda en az 2 elemanlı terimlere sahip, her bir $\vee$ terimi için ki Boole' deki karşılığı + işlemidir ; bir Ve-Değil kapısı çizilir. Her bir Ve-Değil kapısının girişleri terimdeki elemanların tümleyenleridir. Bu 1.kademeyi oluşturur.
- Girişleri 1. kademe kapıların çıkışlarından gelen, bir tek Ve-Değil kapısı çizilir.
- Kendi başına görülen her bir eleman, 2. kademedeki Ve-Değil kapısına girilir.



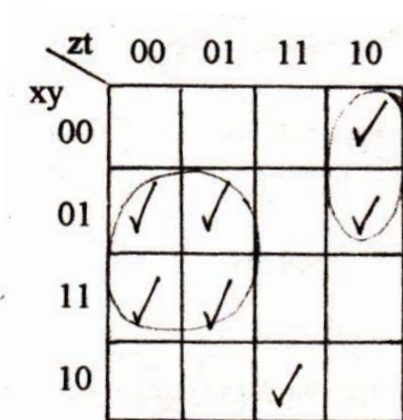
- 2.kademedeki Ve-Değil kapısının çıkışına, bir girişli Ve-Değil kapısı çizilir ve 3. kademe oluşturulur.

ÖRNEK . Max-terimleriyle bir fonksiyon,

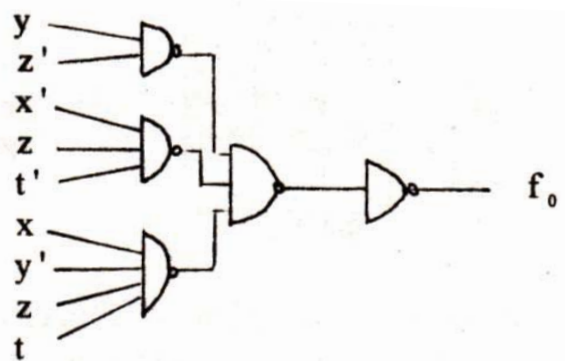
$$f(x,y,z,t) = \prod 2,4,5,6,11,12,13$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu fonksiyonu, Ve-Değil kapılarıyla, maks-terimlerin 3 kademeli gerçekleştirilmesi şeklinde basitleştiriniz.

Bu fonksiyona ait Karnaugh diyagramı Şekil 93 de, çıkış fonksiyonuna ilişkin lojik devre ise Şekil 94 de görülmektedir.



Şekil 93



Şekil 94

Burada problemin kurulması sırasında, daha önce pek uygulanmamış olan bir düzen kullanılmaktadır ki Karnaugh diyagramı düzenlenirken, 0 elemanı esas alındığından, bölgecikler, bu değer esas alınarak ✓ ile işaretlenmişlerdir. Çıkış fonksiyonu ise :

$$f_0 = (y' + z).(x + z' + t).(x' + y + z' + t')$$

olarak bulunmaktadır.

8.11.2. Veya-Değil (NOR) Lojiği

Veya-Değil Lojiğinde ; Veya , yani + (= toplama operatörü) lojiğinde olduğu gibi, min-terimler ve maks-terimler için var olan işlemler tanımlıdır.

a°) Toplamların Çarpımlarını 2 Kademeli Gerçekleme :

- Fonksiyonda en az iki elemanı olan, her bir $\vee$ terimi için, bir Veya-Değil kapısı çizilir. Her bir Veya-Değil kapısının girişleri terimin elemanlarıdır. Bu 1.kademeyi oluşturur.
- 1.kademedeki kapıların çıkışlarından gelen girişlerle, 2.kademede bir tek Veya-Değil kapısı çizilir.
- Tek başına olan terim, tümleyeni alınıp 2.kademeye girilir.

ÖRNEK. Maks-terimleriyle verilmiş bir fonksiyon,

$$f(x,y,z,t) = \prod 5,6,7,10,11,13,14,15$$

olarak tanımlanmıştır. Boole fonksiyonunu, Veya-Değil kapılarıyla, toplam- ların çarpımlarını 2 kademeli gerçekleyiniz.

Fonksiyona ait Karnaugh diyagramı Şekil 95 de, buna bağlı olarak düzenlenmiş lojik devre ise Şekil 96 da görülmektedir.

Çıkış fonksiyonu : $f_0 = (y' + t).(y' + z).(x' + z')$ olarak görülmektedir.

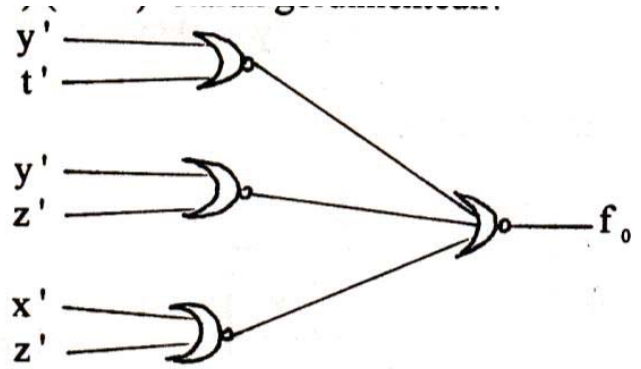
[Şekil 95 ve şekil 96 çıkış fonksiyonunu temsil etmektedir.]

b°) Çarpımların Toplamını 3 Kademeli Gerçekleme :

- Fonksiyonda en az iki elemanlı olan, her bir $\wedge$ terimi için bir Veya-Değil kapısı çizilir. Her bir Veya-Değil kapısının girişleri, terimin elemanlarının tümleyenleridir. Bu 1.kademeyi oluşturur.

zt	00	01	11	10
xy				
00				
01		✓	✓	✓
11		✓	✓	✓
10			✓	✓

Şekil 95



Şekil 96

-1.kademedeki kapıların çıkışlarından giriş alan, bir tek Veya-Değil kapısı çizilir.

-Sadece kendi başına olan her terim, 2.kademedeki Veya-Değil kapısına girilir.

-2.kademe Veya-Değil kapısının çıkışına, bir 3.kademe Veya-Değil kapısı çizilir.

ÖRNEK. Min-terimleriyle verilmiş bir fonksiyon,

$$f(x,y,z,t) = \sum 0,1,2,3,4,8,9,12$$

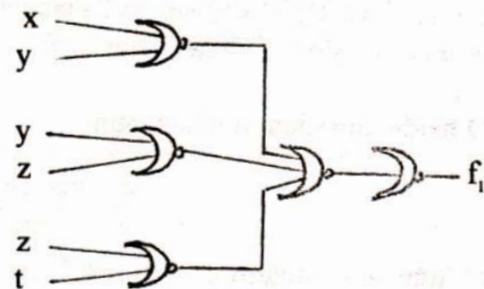
olarak tanımlanmıştır. Boole fonksiyonunu, Veya-Değil kapıları ile, çarpımların toplamını 3 kademeli olarak gerçekleyiniz.

Fonksiyona ait Karnaugh diyagramı Şekil 97 de, çıkış fonksiyonuna uyan lojik devre ise Şekil 98 de görülmektedir. Çıkış fonksiyonu ise :

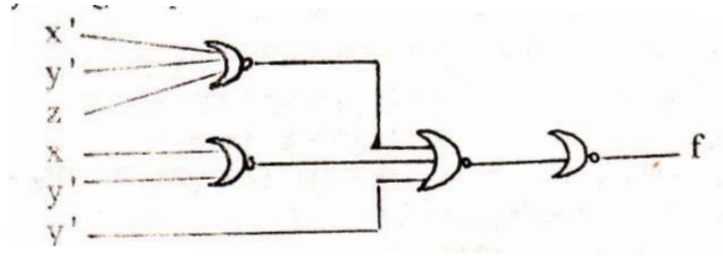
$$f_1 = z't' + x'y' + y'z'$$

olarak belirlenmektedir.

zt	00	01	11	10
xy				
00	✓	✓	✓	✓
01	✓			
11	✓			
10	✓	✓		



ÖRNEK. Aşağıdaki devreden f çıkış fonksiyonunu belirleyiniz ? Daha az sayıda Veya-Değil kapısı kullanıp, buna denk (eşdeğer) bir devre elde ediniz!



Şekil 99

Şekilden hareket ederek, fonksiyonun,

$$f(x,y,z) = \{[(x' + y' + z)' + (x + y')' + y']'\}'$$

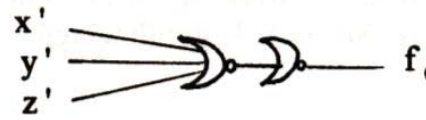
ile ifade edileceği anlaşılabacaktır. Bu fonksiyon, min-terimler cinsinden yazılır ve sadeleştirilirse,

$$f(x,y,z) = x y z' + x' y + y'$$

olacak kadar basitleştirilerek ifade edilebilecektir. Bu aynı zamanda çıkış fonksiyonu olup, buna ait Karnaugh diyagramı Şekil 100 de, fonksiyona ait basitleştirilmiş lojik fonksiyon ise Şekil 101 de görülmektedir.

x \ yz	yz			
	00	01	11	10
0	✓	✓	✓	✓
1	✓	✓		✓

Şekil 100



Şekil 101

En az Veya-Değil kapısını kullanabileceğimiz durum, 7 no.lu bölge için, maks-terimler cinsinden ifade edilmesidir.

O halde, buradan, fonksiyonun

$$f_0 = x' + y' + z'$$

olduğu, toplamaların çarpımının 2 kademeli gerçekleştirilmesi halinde Şekil 101 de görülen lojik devrenin gerçekleştirileceği anlaşılmaktadır.

8. 12. ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

Aşağıda verilmiş olan fonksiyonları Analiz yöntemiyle basitleştiriniz :

1. $f(x,y) = xy + xy' + x'$
2. $f(x,y) = x + y + x'y'$
3. $f(x,y) = xy' + x' + y$
4. $f(x,y) = xy + xy' + x'y$
5. $f(x,y) = (x + y)(x' + y')$
6. $f(x,y) = x \cdot (x' + y)$
7. $f(x,y,z) = x + x'y'z + xz'$
8. $f(x,y,z) = (x + y')(y + z')(z + x')$
9. $f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz' + y'z + x'y'$
10. $f(x,y,z) = x'y'z + x'y'z' + x'yz' + x'yz$

* Gösteriniz ki $yz + x't$ mantıksal olarak,

$x'yzt' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't + x'y'zt + x'y'zt + x'y'zt + x'y'zt$
bileşimine denktir ?

* $x'yz' + x'y' + yz't'$ lojik fonksiyonu veriliyor. Asal bileşenleri neler olabilir ?

* dnf formunda verilmiş olan aşağıdaki iki lojik fonksiyona mantıksal olarak denk olan fonksiyonları bulunuz :

- a) $x'yz't + x'y't + z't' + x'y't + x'y'z'$
- b) $x'yz't' + x'z' + x'y't + y'z't' + y't$

* dnf formunda verilen aşağıdaki lojik fonksiyonları minimize ederken Quine-Mc Cluskey yöntemini kullanınız. Bunun için asal bileşenlerin tablolarını düzenleyiniz :

- a) $xyz' + x'yz + x'y'z' + xy'z$
- b) $xyzt + x'y'z't' + x'yz't + x'y'zt' + xy'zt$
- c) $xyzts + xyz'ts + xy'zts + xy'zt's + xyz't's + x'y'zts + x'y'zt's + xy'zt's + x'y'zt's + xy'zt's'$
- ç) $xyzt + xyz't + xy'zt + x'y'zt + x'yz't + x'y'zt' + x'y'zt' + xy'zt' + x'y'zt'$
- d) $x'y'zt's' + x'y'zt's' + x'y'zts' + x'y'zt's + x'y'zts + x'y'zts + xy'zts + xyzts + xyz't's + xyz'ts$

* Aşağıda verilmiş olan lojik fonksiyonlar dnf formunda olup bunlara ait bütün asal bileşenleri bularak Consensus yöntemini uygulayınız :

- a) $xyz + xyz't + x'y'z + yz't'$; b) $xyzt + x'y' + yz't + xy'zt' + x'yz't'$

* Aşağıda dnf formunda verilmiş olan lojik fonksiyonlara ait Karnaugh diyagramlarını düzenleyiniz :

a) $xy'z + xyz' + x'y'z + x'yz + x'yz'$

b) $x'yz + xyz' + x'y'z$

c) $xyzt + xy'zt' + xy'zt + x'y'z't' + x'yzt + xyz't + x'yz't$

ç) $xy'zt + xy'zt' + xyz't + x'y'z't' + x'yzt + x'yz't' + x'yz't$

d) $x'y'zts + x'yzts + xyzt's + xy'zt's + x'y'zt's + xy'z't's + x'y'z't's + xyz'ts + xy'z'ts + xyzts' + x'yzt's' + xyzt's' + xy'zt's' + x'y'z't's' + x'yz't's' + xyz'ts'$

* $\Phi : x'yz't' + xyzt' + x'yz't + x'y'zt + x'yzt + xyzt$

fonksiyonu için Karnaugh diyagramını düzenleyiniz. Bitişiklik özelliklerini dikkate alarak sadeleştirilmiş fonksiyonu bu yolla bulunuz.

* Aşağıda Karnaugh diyagramı düzenlenmiş olan lojik fonksiyonları dnf formunda ifade ediniz. Bir önceki örnekte olduğu gibi, fonksiyonun sadeleştirilmiş ifadelerini diyagram yoluyla elde ediniz :

a)

z \ xy	00	01	11	10
	0	1	1	1
0	✓			✓
1	✓			✓

b)

z \ xy	00	01	11	10
	0	1	1	1
0	✓	✓		✓
1	✓			✓

c)

zt \ xy	00	01	11	10
	00	01	11	10
00	✓	✓		
01				
11				
10	✓	✓		

ç)

zt \ xy	00	01	11	10
	00	01	11	10
00		✓		
01		✓		
11		✓		
10		✓		

d)

zt \ xy	00	01	11	10
	00	01	11	10
00		✓	✓	
01		✓	✓	
11		✓	✓	
10		✓	✓	

e)

zt \ xy	00	01	11	10
	00	01	11	10
00	✓			✓
01				
11				
10	✓			✓

DİZİN

- **A** - Açık önerme(ler) 41,42 / Açık önerme polinom(u-ları) 48,52 / Açılım yasaları 50,52 / Açılım yöntemi 49,51 / Akıl 2 / Akım 112 / Aksiom(lar) 99 / Aksiyomatik 111 / Aksiyomatik sistem 4 / Aksiyomatik tanım 7,118,125 / Algoritma 80,81,82,84,85,86,87,89,195,212,235 / Alt devre(ler) 173,175,176, 181,182,184,188 / Alt programlar 166 / Amerikan sistemi (sayılar için) 58 / Anahtar çeşitleri 167,174 / Anahtar devresi 168,192 / Anahtar(lar) 112,113,168,169,172, 181,194 / Analiz yöntemi 28,220 / Anlık 2 / Analitik geometri 3 / Analitik gösterilim 151 / Arakesit 117,156 / Ard bileşen 17,27, / Ardışık gerektirme yasası 54 / Aristoteles 7 / Aristoteles mantığı 3 / Asal bileşen(ler) 221,222,223,224,225,226,227,228,229,230,232,233,234,235,236 238,239,248 / Asal bileşenler tablosu 226 / Assosiyatif özellik 21,99,116,122, 129,130 / Atomsal önerme 10 / Avrupa sistemi (sayılar için) 58 / Aynı yönlü anahtar(lar) 175 / Ayırıcı normal form 137,138,140,161,183,222,223,226,235, 236 / Ayırıcı normal formda fonksiyon 134,159 / Ayrıcalıklı veya 15,16 / Ayrık bölgeler 158,196 / Ayrıklık 158 / Ayrılmış birleştirme işlemi 212 /

- **B** - Bağdaşmaz(lık) 15,19,243,245 / Bağımlı anahtar(lar) 174,175,177 / Bağımsız anahtar(lar) 174,175,183 / Bağlaç(lar) 10,12,15,35,43 / Bardeen (John) 8 / Basamak 56,57,58 / Basit boolien değer 205 / Basit boolien nicelik 112, 113,124,165,202 / Basit devre 180 / Basit önerme 10 / Baskın satır işlemi 229, 230 / Baskın sütun işlemi 229,230 / Baz komplement 90 / Biçimsel düzenleme 134 / Bileşik önermeler 10,42 / Bileşim 115,156,192 / Bilgi 166 / Bilgisayar(lar) 165 / Bilgisayar bilimleri 111 / Bilgisayar dili 166 / Bilim dili 14 / Bilim tarihi 165 / Billion 58 / Bilyon 58 / Binary (sayı) sistem(i) 68,69,76, 111,112,197 / Birim eleman 117,126,138,139,144,146,155,197,258 / Birinci kanonik şekil 139,196 / Birleşim 117 / Birleşme özelliği 21,99,116, 122,126 / Birleştirici normal form 141 / Birleştirici normal formda fonksiyon 134,141, 159 / Birlikte değilleme 15,19 / Bitişiklik özelliği 256,265,266,269, 270,275 / B komplement 90 / Bolzano 4 / Boole aritmetiği 55,69,70,99 / Boole cebiri 1,4,6,7,8,20,68,69,98,110,111,112,116,117,118,119,122,125,126 131, 133, 134,140,156,157,165,170,171,181,192 / Boole fonksiyon(u-ları) 134,135,142, 150,151, 156,157, 159,166, 203,204,205, 206,207,211,219, 221 221,244,245,257, 258, 259,260,273,276,278,279 / Boole (George) 4,5, 6,69, 111 / Boole mantığı 7 / Boole psikolojisi 6 / Boole sınıfı 98,137 / Boolien değerler 112 /

Boolien nicelik(ler) 121,122 / Boolien yöntem 231,232 / Boş küme 45 / Bölme işlemi 110,115 / Brattain (W.Houser) 8 / Bütünler fonksiyon 143,147 / Bütünler(i) 119,130,156,202 / Bütünley(ici-en) 119,143,204,222,255 / Büyük sayılar 58 /

- **C - Ç** - Cantor 4 / Cebir 1,118 / Cebirsel norm 219 / Cebirsel yapı 114 / Centillion 58 / Column 257 / Consensus 234,235,236 / Consensus yöntemi 234,236,237 / Copernic 2 / Çarpma devresi 171 / Çarpma (işlemi) 104,107,170 / Çarpma (işlemi) 12,107,108,121,212 / Çekirdek 227 / Çelişki 3, 23,40 / Çelişme 22,23,25,119,126 / Çelişme tablosu 147 / Çıkarma (işlemi) 98,100,115 / Çıkış fonksiyonu 212 / Çift değilleme 51,126,142,175 / Çift değilleme bağıntısı 14 / Çift değilleme yasası 36,159,203 / Çift gerektirme 15, 18,27,29 /

- **D** - Dağılımlı 118 / Dağılma özelliği 30,37,99,100,103,104,117,122, 126, 135,139,142 / Dağılma yasası 54 / Dallanma yöntemi 233,234 / Daraltma yasası 54 / Data 166 / Decillion 58 / Decimal sistem 241 / Dedekind 4 / Değilleme 13,35,50,119,192,225 / Değilleme yasa(sı-ları) 19,33,50,54 / Değilli sayısı 228 / Değişmeli 118 / Değişme özelliği 20,99,116,122,126 / De Morgan 4,5,6,20,34,54,111,126,160 / De Morgan denklikleri 19,22,33,36,-51,123 / De Morgan formülleri 123,132,137,178 / De Morgan ilişkileri 19,51,132 / De Morgan özelliği 22,142 / De Morgan yasası 159,205 / Denk devre(ler) 176, 178,179 / Denk fonksiyon(lar) 178 / Denk güçlü(lük) 22,29,126 / Denklik 177 / Denklik bağıntısı 13,18,31,32,33,34 / Denk önerme(ler) 13 / Denk polinom-lar 13,30 / Descartes (René) 3 / Desilyon 58 / Desimal sistem 76,166 / Destek küme 114 / Dijital computerler 210 / Dijital devreler 210 / Dijital sayı(lar) 210 / Dijital sistem 1,8,166 / Dil 55 / Dinamik diyalektik 3 / Distribütif 118 / Distribütif özellik 99,117,122,129,138 / Distribütivite 100 / Diyalektik felsefe 3 / Doğal sayı(lar) 53,56,60,61,62, 64,65,103,208 / Doğru 9,10,19,23, 49,208 / Doğrulama bağlamları 3 / Doğru (lojik 1) 208 / Doğruluk değer analizi 17,18,22,23,31,41,52,213 / Doğruluk değer(i-leri) 9 / Doğruluk değer kümesi 41,43,45,48 / Doğruluk (değer) tablosu 17,24,38,40,124,201,259 / D'ont care 272 / Dönüştürme(ler) 35 / Dual(i) 123,126,127 / Dual içerik 134 / Dualite 113,114,115,119,123,132 / Dualite ilkesi 126,127,130 / Dual özellik 113 / Dual sistem 7,20,52,69,76, 111,159 / Duodecillion 58 / Duodesilyon 58 / Durum tablosu 9,11,24,144 / Duyarlılık 2 / Düğüm noktası 245,246 / Düzlemsel devre(ler) 167,168 /

- **E** - Eklemler 10 / Ekonomik devre 167,180,181,219 / Eksikli ayırıcı

normal form 239 / Eksiklik 237 / Elde artan 96 / Eldeli toplam 96 / Elde sayı(lar) 95,106 / Eldesiz toplam 96 / Elektriksel büyüklükler 193 / Elektronik 8,111 / Elektronik hesaplayıcı(lar) 165 / Eleminasyon kuralı 241 / Empirik bilimler 3 / Eşdeğer 239 / Evren 41,42,47,50,52,156 / Evrende açık önerme 41 / Evrensel niceleme 46,48 / Evrensel niceleyici 46 / Evrensel önerme 54 /

- **F** - Fazlalık ayırıcılar 238 / Fazlalık (harf) 237,238 / Fichte (Gottlieb) 3 / Fonksiyon 145,146,148,154,155,163 / Fonksiyonun bütünleyeni 144,159 / Form 145 / Formel mantık 1 / Full adder 213 /

- **G** - Geçerli(lik) 23,48,52 / Geçerli standart biçim 23 / Geçersiz(lik) 23 / Geçersiz standart biçim 23,29 / Geçişme özelliği 34 / Genel boolien nicelik 114 / Genel fonksiyon 207 / Genel nicelenmiş önerme(ler) 51 / Gerek koşul 17 / Gerektirme 15,17 / Germanium kristalleri 8 / Goethe 3 / Gözlem yasaları 2 / Grafikte gösterim 155,194 / Grafik yöntemi 150 /

- **H** - Half adder 213 / Hamilton (W.Rowan) 5 / Hamming uzaklığı 194,195, 215,256,265,266,272 / Hegel felsefesi 3 / Hegel (W.Friedrich) 3 / Hiperküp 152 / Horizontal 256 / Huntington 112,118 /

- **I** - **İ** - Idempotent 22,29 / Integre devre kuramı 1 / İnternet 165 / İrredundant 237 / İki değerlikli 249 / İkiler komplementi 91,101 / İkili işlem 115 / İki(li)lik düzen(i) 12,75,76,251,266 / İkili(k) sistem 7,52,69,70,90,93, 101,103,134,159,166,197 / İkinci kanonik şekil 142,196 / İki tabanlı (sayı) sistem(i) 55,72,76,240,251 / İndirgeme yasası 54 / İndirgenmiş biçimdeki temel bileşen 242 / İndirgenmiş biçim(ler) 35 / İndirgenmiş lojik devre 184 / İyi sıralı kümeler 4 /

- **K** - Kafes 245,247,254 / Kafes sistemi 245,247,249 / Kafes tablo 249 / Kalan 63,66,71,72,73,79,85 / Kalanlı bölme 63,64 / Kanonik şekil 206 / Kant felsefesi 3 / Kant (Immanuel) 2,3 / Kapı(lar) 192 / Karnaugh diyagramı 239,255,256,257,258,259,260,261,262,263,264,265,267,268,273,274,275,276 ,277,278,280 / Karşılıklı koşullu bileşim 18,29 / Karşıt önerme 17,21 / Karşıt ters önerme 17 / Katordesilyon 58 / Katrilyon 58 / Kendesilyon 58 / Kentilyon 58 / Kesir(li) sayı(lar) 59,72,82,83,87 / Kesişim 115,117,156,192 / Kesişme noktası 245 / Keyfi çıkış koşulları 272,273,274,275 / Kısır döngü 70 / Klasik mantık 7 / Kodlama işlemi 207 / Kombine edileme(z-yen) terimler 243,245, 246,248,249,250,254 / Kombine edilemeyen terimler tablosu 247 / Komplement 90,92,102,202,204,205 / Komplement sayı 100 / Komşu gruplar 242 /

Komütasyon cebiri 1,165,192,193,194,196,209,219,240 / Komütasyon değişkenleri 193,194 / Komütatif 118 / Komütatif özellik 20,99,116,122,129 / Koşullu bileşim 17 / Köprü devre 181,182,183,184 / Kübik 152 / Küme(ler) 4,52,60,61,70,114,156 / Kümeler cebiri 118 / Kümeler kuramı (teorisi) 111, 156,157 / Kümeler kümesi 52 /

- **L** - Leibniz (G.Wilhelm) 4 / Lojik anahtarlar 168,193 / Lojik anlatım 224 / Lojik 1 208,272 / Lojik büyüklükler 193 / Lojik çarpım 192,210 / Lojik değişken(ler) 193,194 / Lojik devre(ler) 69,165,167,172,173,174,176,177,178,179, 180,182,184,187,188,193,209,210,211,212,213,276,278,279,280 / Lojik devrelerin indirgenmesi 219 / Lojik devre sentezi 1,209,239 / Lojik fonksiyon 175, 178,179,182,183,198,199,200,201,209 / Lojik kapı(lar) 210 / Lojik 0 208,272 / Lojik toplam 192,197,210,244 / Lojik yaklaşım 55,57 / Lojik yapı 196

- **M** - Makina dili 1,70,166 / Maliyet 219 / Maliyet faktörü 267 / Mantıken denk polinomlar 29 / Mantıki denklik bağıntısı 34 / Mantıksal 1 / Mantık yasaları 119,174 / Matematiksel 1 / Matris 155,226,227 / Metodoloji 4 / Million 58 / Milyar(lar) 57,58 / Milyon(lar) 57,58 / Minimal ayırıcı normal form 227, 228,231,233,237,239 / Minimizasyon 219,239,240 / Minimum alan(lar) 158, 196 / Minimumlaştırılmış fonksiyon 246,254,255 / Modern mantık 1,3,4,5,6,7, 8,13,54,70,111, 119,121,122,123,165 / Modüler aritmetik 92 / Molekül sel önerme 10 /

- **N** - Negatifleme lojigi 272 / Negatif sayı(lar) 90,93 / Nesnel olgu 4 / Nesnel değer(ler) 42 / Nesnel eleman(lar) 51 / Neumann (John Von) 7,70 / Newton fiziği 3 / Newton yasası 3 / Niceleme mantığı 52 / Nicelikli önerme(ler) 46,50, 52,53 / Nonillion 58 / Nonilyon 58 / Normal biçim 36,37,40, 231 / Normal biçime indirgeme 36 / Normal form(lar) 140,142,179 / Novemdecillion 58 / Novemdesilyon 58 / Nümerik analiz 7,70,167 /

- **O - Ö** - Octillion 58 / Octodecillion 58 / Oktal sistem 76 / Oktilyon 58 / Oktodesilyon 58 / Oluşum yasası 199 / Onaltı tabanlı sistem 55,80,200 / Ondalık(lı) 59,69 / Onlar komplementi 90,91 / Onluk düzen 59,62,69,76,77, 78,83,96,98,99,104,251 / Onluk (sayı) sistem(i) 57,70,78,103,105,166, 197,252,255 / On tabanlı sistem 55,208,259 / Ön bileşen 17,27 / Önerme 2,9,22,207 / Önerme kalıbı 14 / Önergeler mantığı 8,12,111,171,207 / Önerme polinom(u-ları) 10,30,34,37,42,43,114,145 / Önermesel 9,207 / Örnek önerme(ler) 48,49 / Öz 227 / Özdoğruluk polinomu 30 /

- **P** - Paradoksal durum 4 / Paralel bağlama 170 / Peano 4 / Peano aksiyomları 57,208 / Petrick yöntemi 245,248,249,250 / Poincaré (Henri) 6 / Poretzky yasası 133 / Postülat(lar) 118,130 / Pozitif sayı(lar) 90 /

- **Q** - Quadrillion 58 / Quattuordecillion 58 / Quindecillion 58 / Quine yöntemi 25,31 / Quine-Mc Cluskey yöntemi 222,226,239,240,245,250,267 / Quintillion 58 /

- **R** - Radiks 56 / Radiks noktası 56,69,71,73 / Rakam 55,61,80,84,112 / Reel sayı(lar) 194 / Reymond (De Bois) 4 / Row 257 / Russel (Bertrand) 7 /

- **S** - **Ş** - Sabit(ler) 112,113 / Sağduyu 2 / Santilyon 58 / Satır 257 / Sayı(lar) 4,55 / Sayılar teorisi 57 / sayının bütünleri 90 / Sayının komplementi 90 / Sayısal analiz 70,167 / Sayısal gösteriliş 207 / Sayısal işlem(ler) 93,167 / Sayı sistem(i-leri) 55,67,68,69,75,99 Sedesimal sistem 76 / Seksdesyion 58 / Sekstilyon 58 / Sembolik mantık 6,7,166 / Sentetik a priori 3 / Sentetik önerme(ler) 3 / Septendecillion 58 / Septendesilyon 58 / Septillion 58 / Septilyon 58 / Seri bağlama 169 / Sexdecillion 58 / Sextillion 58 / Shannon 111 / Shannon teoremi 135,198 / Shannon yasası 54,198,199 / Shockley (William) 8 / Sınırlı olmayan kümeler 4 / Sınır sayısı 90 / Sıralama bağıntısı 113,119 / Silikon 8 / Silindirik yüzey 258 / Simetri bağıntısı 114 / Simetri özelliği 34 / Soğuran 22 / Soğurma özelliği 21,32,126,128 / Soğurulan 22 / Sonlu küme 61 / Sonuç sütunu 24,32 / Soyut bilimler 1 / Soyut olgu 4,193 / Standart biçim 14,17,22,25,39 / Şifre 55,76 / Superfluous 237 / Sütun 257 /

- **T** - Taban sayısı 74 / Tablo yöntemi 18,24,38,39,44,160,161 / Tam ayırıcı normal form 139,140,145,146,147,148,150,155,179,196,204,206,223,226,240,244 / Tam birleştirici normal form 142,145,146,147,148,149,179,196,206 / Tam fonksiyon(lar) 160,161 / Tam formlar 223 / Tam indirgenmiş biçim 35 / Tam normal form(lar) 179 / Tam sayı(lar) 80 / Tam toplama hesaplayıcısı 213 / Tanım tablosu 43,145,147,149,150,163,176,201,203,206,207,208,213 / Temel ayırıcı 226 / Temel bağlaçlar 20 / Temel bileşen(ler) 37,39,40,186,236,261,275 / Temel birleştirici 221,222,223,224,226 / Temel devre 168,180 / Temel düşünce 202 / Temel eleman 168 / Temel ilkeler 248 / Temel işlem(ler) 94,157 / Temel nitelik 10 / Temel özellik 9 / Temel problem 48,52 / Teorik evren 51 / Ters önerme 17 / Toplama 12,120,171,210 / Toplama devresi 171 / Toplam tablosu 98 / Totoloji 22,25,28,29,30,33,119,126,174,223,226,237,238,239 / Transistör 8 / Tredecillion 58 / Tredesyion 58 / Trillion 58 / Trilyon 58 / Tutarlı(lık) 7,23,40 / Tutarlı standart biçim 23,29 / Tutarsız(lık) 23 / Tutarsız standart biçim 23 / Tümleme 192 / Tümleme bağlacı 192 / Tümlleyen 222 /

- **U** - Undecillion 58 / Undesilyon 58 /

- **V** - Varlıksal niceleme 46,47 / Varlıksal önerme 54 / Ve 13,15,20,33,121, 170,272 / Ve-değil 272 / Ve-değil kapısı 276,277 / Ve-değil (Nand) lojiği 272, 275 / Ve devresi 169 / Vertical 256 / Ve-Veya devre(si-leri) 167,172,174,178, 183,186,206 / Veya 13,15,20,33,120,272 / Veya-değil 272 / Veya-değil kapısı 278,279,280 / Veya-değil (Nor) lojiği 272,278 / Veya devresi 170 / Veya kapı-ları 192 / Vigintillion 58 / Vijintilyon 58 /

- **W** - Wenn çizimi 155,156,157,158,159,196,197 / Wenn diyagramı 155,157 / Wenn gösterilimi 155 / Whitehead (Alfred N.) 7 /

- **Y** - Yabancı sayı 55 / Yabancı sözcük 55 / Ya da 15,16,124,212 / Yalın fonksiyon 207,209 / Yanlış 9,10,23,49,208 / Yanlış (lojik 0) 208 / Yansıma özelliği 34 / Yarı toplama hesaplayıcı 212,213 / Yerine koyma örneği 24 / Yeter koşul 17 / Yorum 23,24,30,31,43,48,67,75,203,263 /

- **Z** - Zermelo 4 / Zıt yönlü anahtar 175,177 /

YARARLANILAN KAYNAK ESERLER (*)

- Yavuz AKSOY Modern Mantık (Sembolik Mantık)
Yıldız Teknik Üniversitesi Yayını, Sıra Nr. 300 , İstanbul,1995
- Yavuz AKSOY Bilim Tarihi ve Felsefesi
Yıldız Teknik Üniversitesi Yayını, Sıra Nr.290,İstanbul,1994
- Behiç ÇAĞAL Nümerik Analiz (cilt 1)
Yıldız Teknik Üniversitesi Yayını, Sıra Nr.199, İstanbul,1988
- EDF - GDF Algèbre De Boole
Dunod, Paris, 1971
- H.G.FLEGG L'Algèbre De Boole Et Son Utilisation
Dunod, Paris, 1967
- Emre HARMANCI Lojik Devreleri Dersleri
İstanbul Teknik Üniversitesi Yayını, Sıra Nr.1268,İstanbul,1984
- Timur KARAÇAY Soyut Matematiğe Giriş
Devlet Kitapları -Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1975
- J. KUNTZMANN Algèbre De Boole
Dunod, Paris, 1965
- S.Nabi KUTLU -
Bahriye KUTLU Modern Temel Matematik
(Soyut Matematiğe Giriş)
Fil Yayınevi, İstanbul, 1990
- C.L.LIU Elements of Discrete Mathematics
Mc Graw Hill Book Company, Newyork, 1977
- Elliott MENDELSON Boolean Algebra And Switching Circuits
Schaum's Outline Series
Mc Graw Hill Book Company, Newyork, 1970

(*) Yazarların soyadlarına göre sıralanmıştır.

Prof. Yavuz AKSOY



ÖZGEÇMİŞ

İstanbul (Tuzla)'da 1935 yılında doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini İstanbul'da yaptı. Kabataş Erkek Lisesi mezunudur. Yükseköğrenimini İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yaptı. İkinci lisans dalı Astronomi'dir. 1962 yılında üniversiteden mezun oldu. 1962-1964 yıllarında vatani görevini tamamladı.

1964 yılında Matematik Asistanı olarak İstanbul Yüksek Teknik Okulu'nda göreve başladı. 1972 yılında öğretim görevlisi oldu. Yıldız Üniversitesi'nde, 1976 yılında Doçent, 1983 yılında Profesör oldu. Öğretim üyeliği yanısıra çok çeşitli görevlerde bulundu. Birkaç kez Dekan Yardımcılığı bir kez de Matematik Bölümü Başkanlığı yaptı (1988-1991). Matematğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim Dalı Başkanlığını kuruluşundan itibaren, emekli oluncaya kadar, kesintisiz 19 yıl sürdürdü. Çok sayıda bilimsel toplantıya katıldı. Konferans ve söyleşiler dışında seminer ve panellerde görev aldı ; bazılarını bizzat yönetti. 1996 yılında Fransız düşünürü Descartes'in doğumunun 400.yılı nedeniyle düzenlenen ulusal sempozyumun yürüttücüsü olup, aynı zamanda bilim kurulu başkanlığını da yaptı. Çok sayıda akademik jüride görev aldı. Çok sayıda lisans ve yüksek lisans tezi ve iki de doktora tezi yönetti. Bir çok akademik çalışması, kitap, makale ve bildiri olarak yayımlandı. 2001 yılı Ekim ayı itibariyle emekli oldu. Toplam olarak, 38 yılı YTÜ'de olmak üzere 41 yıl hizmet yapmıştır.

Türk Bilim Tarihi Kurumu, Türkiye Matematikçiler Derneği, Yıldız Teknik Üniversitesi Çağdaş Yıldızlılar Derneği üyesi olup, babasından miras kalan istiklal madalyasının da sahibidir.

Halen İstanbul Üniversitesi Bilim Tarihi Bölümü'nde **Matematik Tarihi I** ve **Matematik Tarihi II**, Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde **Bilim Tarihi** ile **Matematik Tarihi** derslerini vererek öğretim etkinliğine katkıda bulunmaktadır. Yayınlarına devam etmektedir.

Yayınlanmış Kitapları

* işaretli kitaplar YTÜ ; ** işaretli kitaplar YTÜ Vakfı yayınıdır. Diğerleri özeldir.

- 1) **Çözümlü Lineer Cebir Problemleri** [Prof.Yaşar Özdemir'le] 1.baskı 1971 , 2.baskı 1977 , 3.baskı 1986, 4.baskı 1992*, 5.baskı 1995 ; 2) **Trigonometri** 1972* ; 3) **Matematik Problemleri** 1975* ; 4) **Matematik Lojik (Modern Mantık)** 1978* ; 5) **Integral Denklemler – cilt 1** 1.baskı 1983, 2.baskı 1986* ; 6) **Çağdaş Bilim (Manuskri)** 1988 ; 7) **Diferansiel Denklemler – cilt 1** 1. baskı 1990, 2.baskı 2001, 3.baskı 2004, 4.baskı 2006, 5.baskı 2011* ; 8) **Bilim Tarihi ve Felsefesi** 1994* ; 9) **Modern Mantık (Sembolik Mantık)** 1.baskı 1995, 2.baskı 2005* ; 3.baskı 2013* ; 10) **Sevgi Damlaları Şiirler** 1997 ; 11) **Boole Cebiri ve Lojik Devre Sentezi** 1998* ; 12) **Matematik [Ve] Tarihi - cilt 1** 1999* ; 13) **Matematik [Ve] Tarihi – cilt 2** 1999* ; 14) **Dünya Matematikçileri** 2000** ; 15) **Matematik [Ve] Tarihi – cilt 3** 2001* ; 16) **Salih Zeki / Yaşam Öyküsü ve Eserleri** 2001* ; 17) **Matematik [Ve] Tarihi – cilt 4** 2002* ; 18) **Evren'den Atom'a [Deneme-İnceleme]** 2003 ; 19) **Bulanık Mantığa Giriş** [E.M.Özkan ve S.Karanfil ile] 2003** ; 20) **Yaşanan Matematik – cilt 1** 1.baskı 2006, 2.baskı 2010 ; 21) **Bu Da Benim Hikayem** 2008 ; 22) **Yaşanan Matematik – cilt 2** 2010 ; 23) **Yaşanan Matematik – cilt 3** 2011 ; 24) **Yüzüncü Yılında Yıldız Teknik Üniversitesi (1911-2011)** 2011* ; 25) **Bana Yıldızı Anlat**, [Editör] Anılar kitabı 2011*, 26) **Bilimler Sözlüğü [X-Loji, X-Bilim]** Derleme, 2012 ; 27) **100. Yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Vakıf ve Dernekleri**, 2013*

ISBN: 975-461-048-7

12 TL (KDV Dahil)