YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

CİLT 2

Prof. Yavuz AKSOY **Yrd. Doç. Dr. E .Mehmet ÖZKAN**

DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ – LİNEER SİSTEMLER – HOMOGEN SİSTEMLER – MATRİSLER - LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ – KUVVET SERİLERİ - SAYISAL YÖNTEMLER – OPERATÖRLER - GRAFİK YÖNTEM – ÇEŞİTLİ ALANLARDA UYGULAMALAR

ÜNİVERSİTE YAYIN NO: **YTÜ.FE.DK-2017.0905**
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BASIM-YAYIN MERKEZİ / İSTANBUL-2011

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ

Bütün Hakları Saklıdır. © 2017, Yıldız Teknik Üniversitesi
Bu eserin bir kısmı veya tamamı, Y.T.Ü. Rektörlüğü'nün izni olmadan,
hiçbir şekilde çoğaltılamaz, kopya edilemez.

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

(Cilt 2)

Prof. Yavuz AKSOY
Yrd. Doç. Dr. E .Mehmet ÖZKAN

ISBN: 978-975-461-541-8

Y.T.Ü. Kütüphane ve Dokümantasyon Merkezi Sayı
YTÜ.FE.DK-2017.0905

Baskı
Yıldız Teknik Üniversitesi
Basım-Yayım Merkezi-İstanbul
Tel: (0212) 383 34 43

Yıldız Teknik Üniversitesi Yönetim Kurulu'nun
12.10.2017 tarih ve 2017/23 sayılı Toplantısında Alınan karara göre
Üniversitemiz Matbaasında 550 (Beşyüzelli) adet bastırılan,
"Diferansiyel Denklemler" adlı telif eserin her türlü
bilimsel ve etik sorumluluğu yayına hazırlayanlara aittir.

Prof. Yaşar ÖZDEMİR'in

ANISINA

DİFERANSİYEL DENKLEMLER ~ CİLT 2
2017

Prof. Yaşar ÖZDEMİR

KİMDİR ?

Yaşar ÖZDEMİR 1932 yılında, Ağrı ilinin Doğu Beyazıt ilçesinde dünyaya gelmiştir. Henüz çocuk iken babasının işi gereği İstanbul'a gelmişler ve bundan sonraki yaşamı burada geçmiştir. Öğrenimini sırasıyla Sultanahmet İlkokulu, Cağaloğlu Orta Okulu ve İstanbul Erkek Lisesi'nde tamamlamıştır. Yükseköğrenimini 1954 yılından başlayarak İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Enstitüsü (Bölümü)'nde yapmıştır. 1962 yılında mezun olduktan sonra, 1962-1964 yılları arasında askerlik görevini tamamlamıştır.

1964 yılında İstanbul Teknik Okulu'na matematik asistanı olarak kabul edildi. Bu kurumun bütün değişim süreçlerini bizzat yaşadı ve görevlerine devam etti. Akademik çalışmalarını devam ettirdi. 1974 yılında öğretim görevlisi oldu. Bu sırada, doçentlik çalışmaları ile ilgili olarak Fransa'ya gitti. Dönüşünde doçentlik çalışmalarına hız verip 1979 yılında doçent oldu. Bu görev daha sonra Yıldız Üniversitesi bünyesinde de devam etti. 1987 yılından itibaren, Matematik Bölümü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı Başkanlığına yürüttü. 11.5.1989 tarihi itibariyle profesör olarak atandı. 1994 yılından itibaren üç yıl süreyle Matematik Bölümü Başkanlığı yaptı. 1997 yılında emekli oldu.

Prof. Özdemir öğretim üyeliği süresi içinde lisans ve yüksek lisans eğitim programlarında şu dersleri vermiştir: Diferansiyel ve İntegral Hesap, Matematik Analiz, Kısmi Diferansiyel Denklemler, Operasyonel Hesap, İki Değişkenli Laplace Dönüşümleri, İleri Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, Özel Diferansiyel Denklemler

Üniversitenin bazı birimlerinde yönetim görevlerinde bulunmuştur. Atatürk İlkeleri ve İnkılap Tarihi Bölümü Başkanlığı; Atatürk İlkeleri ve İnkılap Tarihi Araştırma ve Uygulama Merkezi Müdürlüğü de yapmıştır. Yıldız Koruma ve Yaşatma Derneğinde, aktif olarak 1976-1994 yılları arasında yönetim kurulunda görev almış, bu yıllar içinde 2 yönetim dönemi, Dernek Başkanlığı yapmıştır.

O, Aksoy'un 62 yıllık arkadaşı, Özkan'ın da öğretmenidir. Aksoy ile 1954 yılında başlayan üniversite sınıf arkadaşlığı hiç kesintisiz devam etmiştir. 7 Ekim 2016 günü aramızdan ayrıldı. Nurlar içinde yat sevgili kardeşim.

Ö N S Ö Z

NİHAYET

Bu kitabımın 1.cildi 1990 yılında yazıldı ve ilk baskısı o yıl yapıldı. Aynı zamanda bir ders kitabı olması nedeniyle kısa sürede tükendi. Ancak uzun yıllar yeni bir baskısı yapılamadı. Bu, o zamanki teknik olanaksızlıklardan kaynaklanan bir sonuçtu. Üniversitemiz Basım ve Yayın Merkezi kurulduktan bir süre sonra, 2001 yılında kitabın 2.Baskısı yapılabildi. Bunu 2004 yılındaki 3. Baskısı, 2006 yılındaki 4.Baskısı ve nihayet 2011 yılındaki 5.Baskısı izledi. Bu 5 baskının toplam tirajı 4750 adet oldu. Kitap halen satılmaktadır.

Bu baskıların hepsinde kitabın 2.cildinden söz edildi ve konuları bile belirlenmişti. Oysa ders notları olarak yazılım hazırdı. Yıllarca derslerde anlattığım konulardı. Ancak işin kitap olarak düzenlenmesi o zamanlar bizim için bir sorun oldu. O kadar yoğun matematik ifadeleri ve bunları yazabilmek için kullanılacak olan o kadar çok sembol düzenlemesi yapılması gerekiyordu ki işimizi engelleyen işin bu kısmıydı.

Çok sabır ve dikkat gerektiren bu yazılım işi, sevgili öğrencim ve mesai arkadaşım Yrd. Doç. Dr. E. Mehmet ÖZKAN tarafından yerine getirilmiştir. Kitaptaki iki konu onun tarafından düzenlenmiştir. Kitabın oluşumunda böyle bir iş paylaşımı vardır. Kitabın oluşumuna katkıları nedeniyle Yrd. Doç. Dr. E. Mehmet ÖZKAN'a çok teşekkür ediyorum.

İnanıyorum ki aranan-sorulan bu kitap, kısa sürede tanınacak ve kullanılacaktır. 1.cildin önsözünde bir de *Kısmî Türevli Diferansiyel Denklemler'* den söz edilmişti. Bu da belki, ileriye dönük ayrı bir çalışma olabilir.

Bütün çalışmalarımızda olduğu gibi, bu kitabın yazılımı sırasında da birçok kaynak eserden yararlanılmıştır. Bilimsel etik gereğince kaynak olarak kullanılan bu eserler ya dip not olarak sayfa altlarında ya da kitabın sonunda listelenerek gösterilmişlerdir. Yararlandığımız bu eserler için yazarlarına ve yayıncılarına teşekkür borcumuz vardır.

NİHAYET! **Diferansiyel Denklemler Cilt 2** adlı kitabımızı gerçekleştirmiş olduk. Böylece okuyucularımıza yıllar öncesinden verilmiş bir sözümüzü de yerine getirmiş olmanın mutluluğunu yaşıyorum. Bu benim 34. kitabım olacak. Böylece yazarlık kariyerime çok önemli bir kitapla son vermiş olacağım. Saygıyla, sevgiyle…

Beşiktaş, 14 Şubat 2017 Prof. Yavuz AKSOY

Çok değerli doktora danışmanım Prof. Yavuz Aksoy hocam,

Benden bir ikinci önsöz yazmamı rica ettiğinizde duyduğum sevinç ve sizin gibi kıymetli hocama ve bir o derece, matematiğe adım atmış ve ilerleyen herkese rehber olabileceğine inancımın tam olduğu bir kitabın muhteşem yazım gücüne gölge düşürmeme telaşı eşliğinde, önsözlerin okuyucuya yazılması adetinden ayrılarak, ben size ithafen tüm okuyucularınıza seslenmek isterim.

İnsanın özel bir minnettarlığı ifade etmek için kullandığı en harika ifadelerden biridir "Teşekkürler...". Ancak çoğu kez, bunun içinde, bu tek kelimenin söyleyebileceğinden daha fazlası vardır. Kalpten geldiğinde, "teşekkürler" çok şey ifade eder: Hayatımı değiştirdiniz, yoluma ışık kattınız, bana verdiğiniz katkının değerinin ölçüsünü sonsuz kıldınız, yapmak zorunda olmadığınız ama yaptığınız her şey için beni müteşekkir yaptınız ve tüm bunları hem şahsıma hem de öğrencilerime aşılayacak gücü ve buna ait hayat felsefesini öğrettiniz...

Ülkemizin, yaşamı boyunca 33 tane kitap yazarlığı yapmış yegâne matematikçisi ile hem mesai paylaşımı hem de akademik anlamda alışverişte bulunmuş olmaktan sonsuz mutluluk duyduğumu hem size hem de bu satırları okuyan sevgili okuyucuya en kalbi dileklerimle belirtmek isterim.

Öğrencilerimizin her daim sordukları "Diferansiyel Denklemler Cilt 2" başlıklı kitap ne zaman çıkacak sorusuna artık rahatlıkla sizin de belirttiğiniz gibi "Nihayet" cevabını veriyorum. Yalnız bu "nihayet" kelimesi sadece bu soruya yanıt olacaktır. Sizin "Elveda" yanıtınızı bu kitabınızla taçlandırmanızı şimdilik kısa bir mola olarak kabul ettiğimi de buraya not düşmek isterim. Bizleri matematik anlattığınız kitaplardan tarih anlattığınız kitaplara, şiirlerinizi paylaştığınız kitaptan çevirilerini yaptığınız matematik kitabına uzanan geniş spektrumdan mahrum bırakmayacağınız temennisiyle, bölümümüze, üniversitemize, ülkemize kattığınız değerden ve yetiştirdiğiniz binlerce öğrenci ve her birinin sizden almış olduğu bilgi ve görgü ile dolaylı olarak dokunduğunuz aile üyeleri adına bu kitabı bizlerle paylaştığınız için şükranlarımı sunarım.

Sevgi, saygı ve hürmetlerimle "Teşekkürler"...

12 Mayıs 2017, Beşiktaş — Yrd. Doç. Dr. E. Mehmet ÖZKAN

İÇİNDEKİLER

4. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN VE SİSTEMLERİN İNCELENMESİNDE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN KULLANILMASI

5. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİNDE KUVVET SERİLERİNİN KULLANILMASI

6. BÖLÜM

LEGENDRE VE BESSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

7. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİNDE SAYISAL HESABIN KULLANILMASI

8. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN İNCELENMESİNDE OPERATÖRLERİN KULLANILMASI

9. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GRAFİK YÖNTEM VE ALETLER

ŞEKİL LİSTESİ

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER VE TEOREMLER
[BAŞLANGIÇ BİLGİLERİ – HATIRLATMALAR]

01.01. Giriş

Bu bölümde diferansiyel denklemler hakkında bilinmesi gereken temel tanımlar ve teoremlerden söz edilecektir. Bunlar 1.Cild'in konuları olmakla birlikte, burada da kullanılacağından hatırlanmasında mutlaka fayda vardır. Bu nedenle bilgilerimizin tazelenmesi gerekmektedir. Sistemlerin yanı sıra, ayrıca birinci ya da ikinci mertebeden denklemlerle ilgili yapılacak çalışmalarda, işlemler sırasında birçok yerde ilk ciltteki konularla karşılaşılacağı görülecektir. Bu demektir ki bu iki kitap gerçekte bir bütündür; birbirinin tamamlayıcısıdır.

Temel bilgiler denilince: tanımdan başlayarak, ifade edilişi, var oluşu, sınıflara nasıl ayrıldığı, varlık ve teklik teoremleri, çözüm kavramı ve çeşitleri ve özellikleri gibi alt yapıya ait bilgiler öngörülmektedir.

01.02. Tanım

Bir y = f(x) fonksiyonunun, x serbest değişkeni, y bağlı değişkeni ve onun sınırlı sayıda herhangi mertebeye kadar türevleri arasında kurulmuş olan bir bağıntıya *Diferansiyel Denklem* denir. Bu tanıma göre bir diferansiyel denklemin genel ifadesi şu şekildedir:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Buradaki tanım, genel anlamda tüm diferansiyel denklemleri kapsamış olsa da uygulamada çok farklı durumlarla karşılaşılır. Özellikle çözüme yönelik formları oluştururken, daha farklı ve özel düzenlerin tanımlandığına tanık olacağız. Buna bağlı olarak *çözüm kavramı* da ayrıca konu edilmeyi gerektirecektir.

Yukarıdaki tanımda sözü edilen denklemlere, tek bir serbest değişken ile kuruldukları için *Adi Diferansiyel Denklem* ya da sadece *Diferansiyel Denklem* denir. Diferansiyel denklem denilince, kendiliğinden, Adi Diferansiyel Denklemler anlaşılacaktır.

z = f(x,y) gibi iki serbest değişkeni olan bir fonksiyon söz konusu ise bunun türevleri $\partial z / \partial x$; $\partial z / \partial y$ şeklinde ifade edileceğinden, bunlarla elde edilecek diferansiyel denklemler de bu tür türevleri içerecektir. Bunlara *Kısmî Türev* denildiği için, bunlarla oluşacak diferansiyel denklemlere de *Kısmî Türevli Diferansiyel Denklemler* ya da sadece *Kısmî Diferansiyel Denklemler* denir. Aşağıda bu tür denklemler için iki örnek gösterilmiştir.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$$

Bu konunun diferansiyel denklemler teorisi içinde ayrı bir yeri vardır. Bu nedenle kitabımızın konuları arasında yer almayacaktır.

01.03. Sınıflandırılma

Adi Diferansiyel Denklemler (Diferansiyel Denklemler), farklı şekillerde sınıflara ayrılarak incelenirler. Bunlardan biri mertebelerine göre bir diğeri de katsayılarının sabit ya da değişken oluşlarına göre yapılır.

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türev mertebesi, aynı zamanda diferansiyel denklemin mertebesi olur. Bir diferansiyel denklemde türev mertebesi bir ise, bunlar *Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler* olarak anılırlar. Eğer mertebe iki ya da daha büyük ise bu tür denklemler *Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler* olarak adlandırılacaklardır. Örneğin, x dx +,y dy = 0 birinci mertebeden bir diferansiyel denklem, y” + 3y’ – 2y = x ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olur. Denklemlerin bir başka sınıflandırılması da katsayıların *sabit* ya da *değişken* oluşuna göre yapılır. Bir diferansiyel denklemin bazı koşullara bağlı çözümü söz konusu ise bu tür problemlere *Sınır Değer Problemi* ya da *Başlangıç Değer Problemi* denir.

01.04. Bir Diferansiyel Denklemin Oluşumu

Diferansiyel denklemlerin çok yaygın uygulama alanları vardır. Doğrudan matematiğin bir konusu olmakla birlikte, uygulama alanlarında teknolojiden, ekonomiye; fizikten, mühendisliğin çeşitli alanlarına kadar pek çok yerde onunla karşılaşmak olanaklıdır. Bu konuda, çok ayrıntılı bilgiler içeren bir son bölüm yaptık. Orada bu denklemlerin nasıl kurulduğunu ve çözümleriyle nasıl yorumlandığını görmek olanaklıdır. Biz şimdilik burada sadece ilk bilgileri vermekle yetineceğiz. Bu konuda çok daha ayrıntılı bilgilere ulaşmak için 1.Cildin 3. sayfasında, alt bölüm 1.3. deki örnekleri incelemek faydalı olacaktır.

İlk ve en basit diferansiyel denklem y’ = y dir. y = y(x) dir. Bu bağıntı ile “türevi kendisine eşit bir fonksiyon var mıdır ?“ sorusuna yanıt aranmaktadır. Bunun çözümü sonucunda e^x fonksiyonuna ulaşılır. Burada e, matematik analizin temel sayısı olup değeri e = 2.7182818284590459… şeklinde uzayıp giden ve sonuncu ondalığı halen bilinmeyen bir *aşkın (transandant) sayı*’dır.

Bir y = f(x) fonksiyonu türetilirse y’ = f ’(x) olur. f ‘(x), x in yeni bir fonksiyonu olup bunu g(x) ile gösterelim: y’ = g(x) olur. İşte bu bir diferansiyel denklemdir. Bir örnek olarak gösterelim:

$$y = f(x) = 2x^2 - 7x \;\rightarrow\; y' = g(x) = 4x - 7 \;\rightarrow\; dy = (4x - 7)\,dx$$

y’ = g(x) yeniden türetilirse y” = g’(x) = h(x) olur. Bu ise ikinci metrebeden bir diferansiyel denklem demektir.

Bir diferansiyel denklemin derecesi, denklemdeki en yüksek mertebeden türevin derecesidir.

01.05. Lipschitz Koşulu

Bir düzgün bölgede, apsisleri x, ordinatları y_1 ve y_2 olan iki keyfi nokta seçilmiş olsun. Aynı D bölgesinde sürekli bir f(x,y) = 0 fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. Keyfi seçilen her nokta çifti için

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| < \ell \, |y_2 - y_1|$$

ilişkisi gerçekleşecek şekilde bir ℓ pozitif sayısı bulunabiliyorsa, f(x,y) fonksiyonu, D bölgesinde y ye göre *Lipschitz Koşulu'* nu sağlamış olur.

$0 < \Theta < 1$ olmak üzere, Ortalama Değer Teoremi

$$f(a+h\,,\, b+k) - f(a,b) = h.f_x(a+\Theta h\,,\, b+\Theta k) + k.f_y(a+\Theta h\,,\, b+\Theta k) \qquad (1.1)$$

şeklinde ifade edilir. Buradan (1.1) ifadesini elde etmek için uygun olan seçim :

$a = x$; $b = y_1$; $h = 0$; $k = y_2 - y_1$ dir. Bu kabullere göre

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) = (y_2 - y_1)\, f_y(x,\, y_1 + \Theta\,(y_2-y_1)) \qquad (1.2)$$

olur. Bunun sol yanı (1.1) ile aynıdır. Demek ki Lipschitz Koşulu, Ortalama Değer Teoremi'nin bir sonucudur. Bu iki bağıntı karşılaştırıldığında f(x,y) fonksiyonunun kısmi türevleri de sürekli olduğundan aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$f_y(x\,,\, y_1 + \Theta\,(y_2 - y_1)) < \ell$$

olacağından ℓ sabiti f_y nin üst sınırı olarak belirlenir. Bu ise $|\partial f / \partial y| \leq \ell$ demektir. Buna göre :

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = \left| \int_{y_1}^{y_2} [(\partial f / \partial y)\, dy \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} |\partial f / \partial y|\, dy \leq \ell\, |y_2 - y_1|$$

olur.

01.06. Çözüm Kavramı

Bir diferansiyel denklemin çözümü denilince, onu özdeş olarak sağlayacak fonksiyonun bulunması anlaşılacaktır. Bir diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için, denklemin türüne uygun çözüm yöntemleri uygulanır. Bunlar çok farklı olabilmektedir. Çözümün de çeşitleri vardır. Aksi söylenmedikçe çözüm, *Genel Çözüm* olarak anlaşılacaktır. *Özel Çözüm* başlangıç koşullarına bağlı çözüm olup, başlangıç koşulları denklemle birlikte verilmiş olmalıdır. Ayrıca *Tekil (Singüler) Çözüm* ve *Yalnız (İzole) Çözüm* de diğer çözüm çeşitleridir.

Genel çözüme *Genel İntegral* de denilmektedir. Genel çözümün temel özelliği, çözüm olan fonksiyonda denklemin mertebesine eşit sayıda keyfî sabitin bulunması zorunluluğudur. En basit anlatımla f(x,y,y') = 0 diferansiyel denkleminin genel çözümü, F(x,y,C) = 0 şeklinde, bir keyfi sabit içeren bir fonksiyon olacaktır. F(x,y,C) = 0 çözümü, diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayacaktır. Bu konunun diğer ayrıntıları hakkında bilgi edinmek için 1. Cilt'te 20.sayfadan itibaren yapılan açıklamalar gözden geçirilmelidir. Ayrıca, " n.mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümünde n tane keyfi sabit bulunur ! " teoremini, adı geçen kitabın 34.sayfasında bulmanız olanaklıdır.

01.07. Varlık Ve Teklik Teoremleri

Bir diferansiyel denklemin çözümünün varlığı ve tekliği, diferansiyel denklemler teorisinin en önemli konularından ikisidir. Bu konuda yapılmış çeşitli ispatlar bulunmaktadır. Biz kitabımıza Picard – Lindelöf tarafından yapılmış teoremi koyduk [Bkz : 1 Cilt , sayfa 29]. Burada bu teoremin ayrıntılarına girmeyeceğiz. Sadece teoremin ifadesini vermekle yetineceğiz :

$f(x,y)$ fonksiyonu, düzgün kapalı bir D bölgesinde sürekli ve tanımlı bir fonksiyon ise,$y' = f(x,y)$ diferansiyel denkleminin $y_0 = y(x_0)$ koşulunu sağlayan bir ve yalnız bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

2. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

02.01. Giriş

Bu bölümde *Diferansiyel Denklem Sistemleri* konu edilecektir. Sistem kavramı birden çok bağıntıyı bir arada göz önüne almayı gerektirir. Bu da kendine özgü bir inceleme alanı yaratır. Ayrıca çeşitli özellikler dikkate alınarak, genel bir tanımdan daha özel yapıdaki sistemlere doğru analizler yapılabilmektedir. Buna göre çözüm çalışmaları da çeşitlenmiş olmaktadır. Konu ile ilgili alanlarda bu tür denklemlere çokça rastlanabilmektedir. Bunlarla ilgili örnekler verilecektir.

02.02.Tanım

Tek bir serbest değişkenin birden çok fonksiyonunu birlikte ele alalım. Bu değişken ve buna bağlı değişken ve onun belirli bir mertebeye kadar türevleri arasında kurulmuş bu bağıntılar n tane olsun. Bu bağıntılar topluluğunu *Adi Diferansiyel Denklem Sistemi* denir. Ancak diferansiyel denklemlerde olduğu gibi, pratikte bu *Diferansiyel Denklem Sistemi* olarak anılır. Denklem sistemindeki bağıntılar birlikte ele alınacağı için bu tür sistemlere *Simultane Diferansiyel Denklem Sistemi* de denilmektedir. Sonuç olarak, *Diferansiyel Denklem Sistemi* denilince bu kavramlar bir bütün halinde böyle anlaşılacaktır.

t serbest değişkeninin n tane farklı fonksiyonu $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, …, $x_n = x_n(t)$ dir. Serbest değişken, bu fonksiyonlar ve bunların belirli bir mertebeye kadar türevlerini içeren n tane bağıntı aşağıdaki gibi olsun :

$$\begin{aligned}
&f_1(t,x_1,x_1{}',x_1{}'',\ldots, x_n,x_n',x_n{}'',\ldots)=0\\
&f_2(t,x_1,x_1{}',x_1{}'',\ldots,x_n,x_n',x_n{}'',\ldots)= 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_n(t,x_1,x_1{}',x_1{}'',\ldots,x_n,x_n',x_n{}'',\ldots)=0
\end{aligned}$$

Bu sistemde fonksiyonlar ve bütün türevleri 1.dereceden olduğu için ayrıca bu tür sistemlere *Lineer Diferansiyel Denklem Sistemi* ya da sadece *Lineer Sistem* denir.

Burada dikkat edilmesi gereken diğer husus, bilinmeyen ve denklem sayısının (n tane) eşit olmasıdır. Bunların farklı olması hallerinde oluşacak sistemler, bu çalışmada konu edilmeyecektir. Ayrıca bu tür simultane sistemlerin bazı yapısal özelliklerine göre ortaya çıkacak ayrıcalıklı durumları, örneğin lineer olup olmadığı, homojen olup olmadığı, sabit ya da değişken katsayılı olup olmadığına bakılarak, kendi içinde bir sınıflandırma yapılmaktadır. Bu sınıflandırma çözüm yöntemlerin çeşitlenmesine ve özel bazı yöntemlerin oluşmasına neden olmaktadır. Bunları konu ilerledikçe göreceğiz. Ayrıca, matematik analizin diğer ve farklı konularından yararlanarak ilginç çözüm yöntemleri geliştirilecektir. Örneğin bu tür sistemlerin çözümünde Matris Analizini kullanmak ya da Laplace Dönüşümlerinden yararlanmak, sanırım çalışmamıza ilginç bir boyut katacaktır. Bir matematikçi olarak, bu gibi konuları geliştirirken, hayli bilgi birikimine gereksinim olduğu anlaşılmaktadır. Matematikçi için bu gibi çalışmalar bir amaç iken, uygulayıcılar için bu bilgileri kullanmak, bir araç olmaktadır.

Örnek.[1]

Aynı mamulün satışını yapan A ve B firmaları, toplam satışları x ve y oranlarında paylaşmaktadırlar. Yani A nın piyasadaki hissesinin oranı x iken B ninki y olmak üzere, $x+y=1$ dir. Her iki firma da piyasadaki hissesini reklam yoluyla arttırmaya çalışmaktadır. A ve B nin yıllık reklam harcamaları sırasıyla s_1 ve s_2 liradır. A firmasının piyasa hisse-sinin değişme hızının (dx/dt) izafi reklam harcaması ile B nin piyasa hissesinin çarpımından B nin izafi reklam harcaması ile kendi piyasa hissesi çarpımının farkı ile orantılı değiştiği kabul edilmektedir.

Bu açıklamalara ve kabule göre, k_1 ve k_2 sabit katsayılar olmak üzere, A ve B firmaları için aşağıdaki ilişkiler oluşturulabilecektir:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_1 \cdot s_1}{s_1 + s_2} \cdot y - \frac{k_2 \cdot s_2}{s_1 + s_2} \cdot x$$

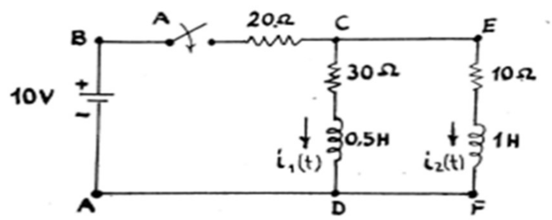
$$\frac{dy}{dt} = \frac{k_2 \cdot s_2}{s_1 + s_2} \cdot x - \frac{k_1 \cdot s_1}{s_1 + s_2} \cdot y$$

Bu bağıntılar, görülen ortak gösterimler yardımıyla, aşağıda görülen bir diferansiyel denklem sistemi şeklinde ifade edilmiş olacaktır.

$$\alpha = \frac{k_1 \cdot s_1}{s_1 + s_2} \quad , \quad \beta = \frac{k_2 \cdot s_2}{k_2 + s_2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha y - \beta x \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - \alpha y \end{cases}$$

[1] Bülent KOBU, İşletme Matematiği, Cilt 2, İÜ Yayınları No.1699, 3.Baskı, 1981, s.164

Örnek.[2]
Şekil 2.1. de görülen elektrik devresinde A anahtarı uzun süre açık bırakıldıktan sonra t=0 anında kapatılmaktadır. Endüktanslarda herhangi bir enerjinin depo edilmediğini, yani $i_1(0)=0$ ve $i_2(0)=0$ kabul ederek, anahtar kapatıldıktan sonra endüktanslardan geçecek olan $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ akımlarının, zamanın fonksiyonu olarak değişim ifadelerini bulunuz.



Şekil 2.1. Elektrik devresi

Kirchhoff kanunu sırası ile ABCD ve ABEF gözlerine uygulanırsa:

$$\left| \begin{array}{l} 10 = 20(i_1 + i_2) + 30 i_1 + 0.5 \dfrac{di_1}{dt} \\ 10 = 20(i_1 + i_2) + 10 i_2 + 1 \cdot \dfrac{di_2}{dt} \end{array} \right.$$ olup, yeniden düzenleyelim:

$$\left| \begin{array}{l} 0.5 \dfrac{di_1}{dt} + 50 i_1 + 20 i_2 = 10 \\ \dfrac{di_2}{dt} + 20 i_1 + 30 i_2 = 10 \end{array} \right.$$

olur.

Burada verilmiş olan iki örnek, değişik uygulama alanlarında nasıl kullanıldığını göstermek içindi. Burada sadece denklemlerin kuruluşu ile ilgili bir çalışma yapılmış olup, bunların nasıl çözüleceğine dair uygulamalar son bölümde yer alacaktır.

02.03. Çözüm Kavramı ve Çeşitleri

(2.1) sistemini sağlayan n tane fonksiyon

$$x_1 = \phi_1(t),\ x_2 = \phi_2(t),\ \ldots,\ x_n = \phi_n(t)$$

olsun. Bu fonksiyonlar, (2.1) sistemindeki her bağıntıyı özdeş olarak sağlayacaktır. Bunlar topluca, sistemin bir *çözüm takımı* olurlar. Çözüm olan bu fonksiyonlar ayrıca lineer bağımsız olmalıdırlar.

[2] Raşit MOCAN, Diferansiyel Denklemler ve Diferansiyel Denklem Sistemleri, Yıldız Üniversitesi Yayını No.137 1977,s.236

Diferansiyel denklemlerin çözümünde, keyfi sabitlerin bulunması kuralı sistemler için de geçerlidir. Keyfi sabitleri içeren bir çözüm *Genel Çözüm* olarak adlandırılır. Eğer sistemle birlikte yeterince başlangıç koşulu verilmiş ise bunlar yardımıyla keyfi sabitler belirlenir. Bu şekilde oluşacak çözüme ise *Özel Çözüm* denir.

Diferansiyel denklem sisteminin bir çözümü de, *Tekil (Singüler) Çözüm*' dür. Genel çözümden elde edilemeyen ve keyfi sabit bulundurmayan çözüm takımı, tekil çözüm olarak adlandırılır.

02.04. Mertebe

Bir diferansiyel denklem sistemindeki her bilinmeyen fonksiyonun en yüksek türev mertebelerinin toplamı, sistemin mertebesi olur. Örneğin,

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2 y}{dt^2} + x + 2y = t \\ \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 2x + y = t^2 \end{array} \right.$$

diferansiyel denklem sisteminde x(t) fonksiyonunun mertebesi 2 (ikinci denklemde) ve y(t) fonksiyonunun metresi de 2 (birinci denklemde) olduğundan *sistemin mertebesi* 2 + 2 = 4 olur.

Genel olarak, (2.1) sistemini meydana getiren $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ bilinmeyen fonksiyonlarının, sistem içinde hangi bağıntıda olursa olsun, en yüksek mertebeleri sırasıyla m_1, m_2, … , m_n ise (2.1) sisteminin metre-besi $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ toplamı olacaktır.

02.05. Türeterek Yok Etme Yöntemi

Bu yöntemin esas amacı, sistemdeki bağıntıları türetmek suretiyle bağıntı sayısını artırarak, bunlar arasında uygun seçilmiş denklemlerle yapılacak işlemler yardımıyla bilinmeyen fonksiyonlardan birini yok etmektir. Bu şekilde tek bir bilinmeyen fonksiyona bağlı bir bağıntı elde edilir ki artık bu bir diferansiyel denklemdir. Bu denklem çözülürse (çözülebilirse) bu yolla bilinmeyenlerden biri belirlenmiş olur.

Diğer bilinmeyenin belirlenmesi için iki seçenek vardır:

1) İlk uygulamada olduğu gibi hareket etmek;

2) Bulunan ilk sonucun uygun olduğu düşünülen denklemde yerine konularak, o bağıntıyı yeni değişkene göre düzenlemek…

Ancak bu uygulamalarda, keyfi sabitlerle ilgili bazı özel işlemlere gereksinme vardır. Farklı uygulamalar görülür. Burada anlatılmak istenilen çözüm kavramını aşağıda verilen sistem ile açıklayalım:

$$\begin{cases} F\left(t, x, y, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right) = 0 \\ G\left(t, x, y, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right) = 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

diferansiyel denklem sisteminde iki bağıntı bulunmaktadır. Bunları türetelim:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial x'} \cdot \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{\partial F}{\partial y'} \cdot \dfrac{d^2 y}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial t} + \dfrac{\partial G}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial G}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial G}{\partial x'} \cdot \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{\partial G}{\partial y'} \cdot \dfrac{d^2 y}{dt^2} = 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

olur. (2.2) ve (2.3) denklemlerinden herhangi işlemlerle y, y', y'' çözülerek uygun görülen bir bağıntıda yerlerine konursa, bu bağıntı düzenlendiğinde

$$H(t, x, x', x'') = 0 \qquad (2.4)$$

elde edilir. Bu bağıntı x bilinmeyenine göre düzenlenmiş 2.mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Çözümü iki keyfi sabit içerecektir. Çözüm:

$x = f(t, C_1, C_2)$

olur. Bundan sonra y bilinmeyeni belirleme için, yukarıda açıklanan yollardan biri seçilir. Ancak seçilen yolda işlemler açısından zorlukla karşılılırsa, diğer yol kullanılmalıdır. x belirlendiğine göre y için işlemlere yeniden başlanmalıdır. (2.2) ve (2.3) denklemlerinde bu kere x, x', x'' bulunarak, uygun bir bağıntıda yerlerine yazılırsa

$G(t, y, y', y'') = 0$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülür. Çözümünde iki keyfi sabit bulunacaktır. Öyle çözüm

$y = F(t, C_3, C_4)$

olur. Bunlar sistemin çözüm takımı olacaktır. Ancak sistemin mertebesi 2 olduğu için çözüm takımında ancak iki keyfi sabit bulunmalıdır. Şimdi yapılması gereken keyfi sabitler arasındaki ilişkileri düzene sokmaktır. Bu dört keyfi sabit birbirlerinden lineer bağımsız olamazlar. Bu amaçla bulunan x ve y çözümleri seçilen bir bağıntıda yerlerine konarak, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$C_3 = u(C_1, C_2)$; $C_4 = v(C_1, C_2)$

bulunur. Böylece y çözümü

$y = F[t, u(C_1, C_2), v(C_1, C_2)]$

olup, C_1 ve C_2 keyfi sabitlerini içerecek şekilde bulunmuş olur. Sonuçta sistemin genel çözümü:

$x = f(t, C_1, C_2)$

$y = F[t, u(C_1, C_2), v(C_1, C_2)]$

olur. İleride bu tür sistemlerin çözümüne dair örnekler verilecektir

02.06. Kanonik Sistem

Aşağıdaki özelliklere sahip bir sisteme *Kanonik Sistem* denir.

1) Bilinmeyen fonksiyon sayısı ile denklem sayısı eşit olacak,

2) Sistemdeki her denklem, bilinmeyen fonksiyonlardan birinin en yüksek türev mertebesine göre çözülmüş olacak.

Bu özellikte bir sistem örneğin

$$\left| \begin{array}{l} x_1''' = F_1(t, x_1, x_1', x_1'', x_2, x_3, x_3') \\ x_2' = F_1(t, x_1, x_1', x_1'', x_2, x_3, x_3') \\ x_3'' = F_1(t, x_1, x_1', x_1'', x_2, x_3, x_3') \end{array} \right.$$

görünüşündedir. Bu sistem öne sürülen iki koşula da uymaktadır. Aşağıdaki örnek konuya açıklık getirmektedir:

$$\left| \begin{array}{l} x'' = x' + 2y'' - y' \\ y''' = x - y' + t \end{array} \right.$$

Dinamikte bir noktanın hareket denklemleri bir diferansiyel denklem sistemi oluşturur. Bu denklem sistemi şudur:

$$\left| \begin{array}{l} m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_1\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \\[2em] m \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} = F_2\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \\[2em] m \cdot \dfrac{d^2z}{dt^2} = F_3\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \end{array} \right.$$

Bu sistem, kanonik sistemin bütün özelliklerine sahiptir.

02.07. Normal Sistem

Aşağıda belirtilmiş özelliklere sahip bir sisteme *Normal Sistem* denir.

1) Bilinmeyen fonksiyon sayısı ile denklem sayısı eşit olacak,

2) Sistemde her bilinmeyen fonksiyonunun ancak ve ancak birinci metre- beden türevleri bulunabilecek,

3) Sistemin her bir denklemi, bilinmeyen fonksiyonlardan birinin, birinci mertebeden türevine göre çözülmüş olacak…

Aşağıdaki örnek bu koşullara uyan bir sistemi temsil etmektedir:

$$\left|\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(t,x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(t,x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} &= F_3(t,x,y,z) \end{aligned}\right.$$

Normal sistem, kanonik sistemin özel bir durumunu temsil etmektedir. Dikkat edilirse, sistemdeki denklemlerden her biri bilinmeyen fonksiyonlardan birine göre çözülerek verildiğinden, ikinci yanlarda türevli terim bulunmamaktadır.

Aşağıdaki denklem sistemi, görüntü olarak böyle bir sistemi temsil etmektedir.

$$\left|\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2y + e^t \\ \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y + e^{-t} \end{aligned}\right.$$

diferansiyel denklem sistemi, Normal Sisteme ait bir örnektir.

02.08. Teorem

Her kanonik sistem, bir normal sisteme dönüştürülebilir.

Daha önce tanım için kullandığımız diferansiyel denklem sistemini yeni-den ele alalım. Bu sistemde bütün türevleri birinci mertebeye indirgeyecek şekilde yeni bilinmeyen fonksiyonlar kullanarak sistemi yeniden düzenleyelim. Şunları varsayalım:
$x_1' = x_4$; $x_3' = x_5$; $x_1'' = x_4' = x_6$; $x_3'' = x_5'$; $x_1''' = x_6'$.

$$\left|\begin{aligned} x_1''' &= F_1(t,x_1,x_1',x_1'',x_2,x_3,x_3') \\ x_2' &= F_2(t,x_1,x_1',x_1'',x_2,x_3,x_3') \\ x_3'' &= F_3(t,x_1,x_1',x_1'',x_2,x_3,x_3') \end{aligned}\right.$$

Bu sistem yukarıda öngörülen varsayım yardımıyla yeniden düzenlenirse,

$$\left|\begin{aligned} x_6' &= F_1(t,x_1,x_4,x_6,x_2,x_3,x_5) \\ x_2' &= F_2(t,x_1,x_4,x_6,x_2,x_3,x_5) \\ x_5' &= F_3(t,x_1,x_4,x_6,x_2,x_3,x_5) \\ x_1' &= x_4 \\ x_3' &= x_5 \\ x_4' &= x_6 \end{aligned}\right.$$

olur. Bu sistem bir normal sistemin bütün özelliklerini göstermektedir. Burada yeni bilinmeyenler katılmış olması nedeniyle denklem sayısı artmıştır. Ancak her iki sistemin mertebeleri eşittir. İlk sistemde mertebe 3 + 1 + 2 = 6 dır. Yeni sistemde ise hepsi birinci mertebeden olan altı denklem vardır ki bu sistemin mertebe sayısı da 6 dır. Demek ki bir kanonik sistem, bir normal sisteme, mertebeleri eşit olacak şekilde dönüştürülmektedir. Bu yargıya göre, bir kanonik sistem bir normal sisteme dönüştürülmek istendiğinde, mertebe sayısına bakarak, önceden kaç yeni değişken katılacağı kestirilmiş olur. Bu teoremin bir sonucu olarak son elde edilen diferansiyel denklem sisteminin çözümünden kolayca görülebileceği gibi, sistemin genel çözümünde bulunacak keyfi sabitlerin sayısı, sistemin mertebesine eşit olacaktır. Dolayısıyla genel çözümde mertebe sayısına eşit keyfi sabit bulunacaktır. Bu keyfi sabitler birbirinden bağımsızdırlar. Öyleyse varsayılan genel çözüm

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = f_1(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ x_2 = f_2(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ x_3 = f_3(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ x_4 = f_4(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ x_5 = f_5(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \\ x_6 = f_6(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \end{array}\right.$$

şeklinde (yapısında) olacaktır. Bu çözüm takımı her iki sistemime de aittir.

Örnek .

$$\frac{dx}{dt} = y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = x$$

sistemi bir normal sistem olup, çözüm için türetme-yok etme yöntemini uygulayalım. Her iki bağıntı türetilirse :

$$\frac{dx}{dt} = y \to \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = x \to \quad \frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$$

şeklinde sabit katsayılı bir diferansiyel denklem elde edilir.

Bu çözülürse genel çözüm $x = c_1\, e^{-t} + \; c_2 \cdot e^t$ olur. Bu sistemden seçilen bağıntılardan birine götürülürse

$$y = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(c_1 e^{-t} + c_2 e^t\right) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

elde edilir. Bu şekilde sistemin çözüm takımı bulunmuş olur ki bu çözüm aşağıdadır:

$$\left|\begin{array}{l} x = c_1 e^{=t} + c_2 e^t \\ y = -c_1 e^{=t} + c_2 e^t \end{array}\right.$$

Bu sistemin bir özelliği daha var. Bunu tartışalım. Kolayca görülüyor ki sistem x = 0 ve y = 0 için de sağlanmaktadır. Öyleyse {x = 0; y = 0} da bu sistemin bir çözümüdür. Ancak bu sonuç genel çözümden elde edilemez. Ayrıca hiçbir keyfi sabit içermemektedir. Çözüm takımında ancak $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olması halinde yukarıdaki sonuç elde edilebilir ki bu da keyfi sabitlerin lineer bağımlı olması demektir. Oysa daha önceden gördüğümüz gibi bunlar lineer bağımlı olamazlar. x = 0 ; y = 0 çözümü genel çözümden elde edilemez. Bu tür çözümlere *Aşikâr Çözüm* ya da *Trivial Çözüm* de denilmektedir.

Örnek .

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y - e^{-t} & \quad (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y + e^{t} & \quad (2) \end{array} \right.$$

Diferansiyel denklem sistemi bir normal sistem olup, çözümünü araştıralım : *türetme – yok etme* yöntemini uygulamak üzere her iki denklemi de türetelim :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 5 \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} + e^{-t} \qquad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} + 3 \cdot \frac{dy}{dt} + e^{t} \qquad (4)$$

olur. (2) bağıntısının her terimini 5 ile çarpar (1) bağıntısının terimleri ile toplarsak,

$$\frac{dx}{dt} + 5\frac{dy}{dt} = 17y + 5e^{t} - e^{-t}$$

$$\frac{dx}{dt} = -5\frac{dy}{dt} + 17y + 5e^{t} - e^{-t}$$

bulunur. Bu sonuç (4) de yerine konursa

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(-5\frac{dy}{dt} + 17y + 5e^{t} - e^{-t} \right) + 3\frac{dy}{dt} + e^{t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 17y = e^{-t} - 4e^{t}$$

elde edilir. Bu ise ikinci mertebeden sabit katsayılı, ikinci yanlı bir diferansiyel denklem olup çözülürse,

$$y(t) = e^{4t}\left(c_1 \sin t + c_2 \cos t\right) + \frac{1}{26} \cdot e^{-t} - \frac{2}{5}e^{t}$$

bulunur. Şimdi de x(t) fonksiyonunu bulmak üzere (2) bağıntısını kulla-

nalım. Bunun için (2) bağıntısını

$$x = -\frac{dy}{dt} + 3y + e^{t}$$

şeklinde düzenleyelim ve y(t) çözümünü buraya uygulayalım :

$$x(t) = -\frac{d}{dt}\left\{ e^{4t}\left(c_1 \sin t + c_2 \cos t\right) + \frac{1}{26}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{t} \right\} + 3\left\{ e^{4t}\left(c_1 \sin t + c_2 \cos t\right) + \frac{1}{26}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{t} \right\} + e^{t}$$

olup, bu ifade üzerinde gerekli hesaplamalar ve düzenlemeler yapılırsa,

$$x(t) = e^{4t}\left\{(c_2 - c_1)\sin t - (c_2 + c_1)\cos t\right\} + \frac{2}{13}\cdot e^{-t} + \frac{1}{5}\cdot e^{t}$$

bulunacaktır. Böylece araştırma konusu olan normal sistemin çözümü

$$\left|\begin{array}{l} x(t) = e^{4t}\left\{(c_2 - c_1)\sin t - (c_2 + c_1)\cos t\right\} + \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{t} \\ y(t) = e^{4t}\left\{c_1 \sin t + c_2 \cos t\right\} + \frac{1}{26}\cdot e^{-t} - \frac{2}{5}e^{t} \end{array}\right.$$

şeklinde elde edilir. Bu bir genel çözümdür. Örnek seçilen sistemin mertebesi 2 dir. Dikkat edilirse çözüm takımındaki keyfi sabitlerin sayısı da 2 dir.

Örnek .

$$\left|\begin{array}{ll} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y + z = e^{x} & (1) \\ \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^{-x} & (2) \end{array}\right.$$

diferansiyel denklem sistemini inceleyelim. Bu sistemin bazı özellikleri bulunmaktadır. Örneğin (2) bağıntısı (1) bağıntısına uygulanırsa

$$e^{-x} + y + z = e^{x} \quad \rightarrow \quad y+z = e^{x} - e^{-x} \quad (3)$$

olur. Bu ifade türetilirse :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = e^{x} + e^{-x} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2} = e^{x} - e^{-x}$$

olur. Bununla (2) bağıntısına gidilirse

$$e^{x} - e^{-x} + \frac{dy}{dx} = e^{-x} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2e^{-x} - e^{x}$$

diferansiyel denklemine varılır ki bu değişkenlerine ayrılabilen bir diferansiyel denklemdir ve çözümü

$$y(x) = -2\cdot e^{-x} - e^{x} + c_1$$

dir. Bunu kullanarak (3) bağıntısından z(x) de bulunabilecektir

$$y + z = e^{x} - e^{-x} \quad \rightarrow \quad z = -y + e^{x} - e^{-x} \quad \rightarrow$$
$$z = 2\cdot e^{-x} + e^{x} - c_1 + e^{x} - e^{-x} = e^{-x} + 2\cdot e^{x} - c_1$$

Artık sistemin çözüm takımı aşağıda görüldüğü şekilde ifade edilebilecektir:

$$\left|\begin{array}{l} y(x) = -2\cdot e^{-x} - e^{x} + c \\ z(x) = e^{-x} + 2\cdot e^{x} - c \end{array}\right.$$

Bu çözüm içinde ilginç bir sonuç vardır. Çözümde sadece 1 adet keyfi sabit görülmektedir. Oysa sistemin mertebesi 4 olarak görülmektedir. Bu noktada dikkat edilmesi gereken şudur : (2) bağıntısının birinci yanı ile (1) bağıntısının birinci yanındaki türev ifadeleri birbirinden bağımsız

değillerdir. Bu özelliğiyle sistem, ayrıcalıklı bir durum göstermektedir. Bunun bir sonucu olarak sistemin genel çözümünde, 4 değil sadece 1 keyfi sabit bulunmaktadır. Gerçekte incelenmiş olan sistem

$$\left| \begin{array}{l} y+z=e^{x}-e^{-x} \\ \dfrac{dy}{dx}=2\cdot e^{-x}-e^{x} \end{array} \right.$$

sistemiyle eş anlamlı olup, görüldüğü gibi bu sistemin mertebesi 1 dir. Örnek olarak seçtiğimiz bu diferansiyel denklem sistemi, bir kanonik sistem olmadığı gibi, normal sistem haline de getirilemez.

Örnek.

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dx}=4y+2z+x & (1) \\ \dfrac{dz}{dx}=-y+z & (2) \end{array} \right.$$

normal sistemini inceleyelim. Sistemin mertebesi 2 dir. Türetme-yok etme yöntemini kullanalım. Bu amaçla sistemdeki her iki bağıntıyı da türetelim:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4\cdot\frac{dy}{dx}+2\cdot\frac{dz}{dx}+1 \qquad (3)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx} \qquad (4)$$

olup (2) den, y = z – z’ olup (4) de yerine konur ve düzenlenirse,

$$z''=-4y-2z-x-y+z=-5y-z-x$$

$$z''=-5\left(z-z'\right)-z-x$$

$$z''-5z'+6z=-x$$

elde edilir. Bu sabit katsayılı , ikinci taraflı bir denklemdir. Denklem çözülürse:

$$z=c_1\cdot e^{2x}+c_2\cdot e^{3x}-\frac{x}{6}-\frac{5}{36}$$

olarak z bilinmeyeni belirlenmiş olur. y bilinmeyen fonksiyonunu bulmak için, yeniden yok etme yöntemini uygulayalım :

$$y' = 4y + 2z + x \qquad \rightarrow \qquad z = \frac{1}{2}\left(y' - 4y - x\right)$$

şeklinde alıp (2) de yerine yazalım :

$$z' = \frac{1}{2}\left(y' - 4y - x\right) - y = \frac{1}{2}y' - 3y - \frac{x}{2}$$

olur ki bu ilişkiyi (3) bağıntısına uygularsak,

$$y'' = 4y' + 2z' + 1 \qquad \rightarrow \qquad y'' = 4y' + y' - 6y - x + 1$$

olup, bu da düzenlenirse,

$$y'' - 5y' + 6y = 1 - x$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu da ikinci mertebeden, sabit katsayılı, ikinci yanlı bir diferansiyel denklem olarak çözülürse

$$y = c_3 \cdot e^{2x} + c_4 \cdot e^{3x} - \frac{x}{6} + \frac{1}{36}$$

bulunur. Böylece y bilinmeyen fonksiyonu da belirlenmiş olur. Ancak bu çözüm de iki farklı keyfi sabit içermektedir. Böylece x ve y çözümleri birlikte göz önüne alınınca c_1, c_2, c_3, c_4 gibi dört keyfi sabit bulunduğu görülmektedir. Oysa sistemin mertebesi 2 olduğuna göre, sistemin çözüm takımında ancak 2 keyfi sabit bulunmalıdır. Demek ki yukarıda sıraladığımız keyfi sabitler birbirinden bağımsız olamazlar. Şimdi bize düşen iş, bunlar arasındaki ilişkiyi belirlemektir. Bu amaçla (2) bağıntısını kullanalım. Yukarıdaki çözümleri buraya uygulayalım:

$$z' = -y + z$$

$$2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x} - \frac{1}{6} = -c_3e^{2x} - c_4e^{3x} + \frac{x}{6} - \frac{1}{36} + c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - \frac{x}{6} - \frac{5}{36}$$

$$2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x} = \left(c_1 - c_3\right)e^{2x} + \left(c_2 - c_4\right)e^{3x}$$

Benzer terimlerin katsayıları eşitlenirse:

$$\left| \begin{aligned} 2c_1 &= c_1 - c_3 \\ 3c_2 &= c_2 - c_4 \end{aligned} \right. \qquad \rightarrow \qquad \left| \begin{aligned} c_3 &= -c_1 \\ c_4 &= -2c_2 \end{aligned} \right.$$

bulunur. Böylece keyfi sabitler arasındaki ilişkilerin ne olduğu ortaya çıkmış olur. Bu sonuçlar kullanılarak artık sistemin çözüm takım yazılabilecektir.

$$\left| \begin{aligned} y &= -c_1 \cdot e^{2x} - 2c_2 \cdot e^{3x} - \frac{x}{6} + \frac{1}{36} \\ z &= c_1 \cdot e^{2x} - 2c_2 \cdot e^{3x} - \frac{x}{6} - \frac{5}{36} \end{aligned} \right.$$

Örnek .

$$\left|\begin{array}{ll}\dfrac{d^2 y}{dx^2} = x - \dfrac{dy}{dx} + 2z & (1) \\ \dfrac{dz}{dx} = 2\dfrac{dy}{dx} - z & (2)\end{array}\right.$$

diferansiyel denklem sistemi bir kanonik sistemin bütün özelliklerini göstermektedir. Bunu normal sisteme dönüştürelim. Bu amaçla yeni bilinmeyen fonksiyonlar katmamız gerekiyor. Burada u = u(x) olmak üzere, dy/dx = u diyelim. y" = u' olur. Sistem bunlara göre düzenlenirse,

$$\left|\begin{array}{ll}\dfrac{du}{dx} = x - u + 2z & (3) \\ \dfrac{dz}{dx} = 2u - z & (4) \\ \dfrac{dy}{dx} = u & (5)\end{array}\right.$$

olur ki bu bir normal sistemdir. Dikkat edilirse sistemdeki her bağıntı, bilinmeyen bir fonksiyonun birinci türevine göre düzenlenmiştir. Kolayca görülüyor ki sistemin mertebesi 3 tür. Bununla ilgili teoremi bu vesileyle hatırlamış olalım. (3),(4),(5) bağıntılarını türetelim:

$$\left|\begin{array}{ll}\dfrac{d^2 u}{dx^2} = 1 - \dfrac{du}{dx} + 2\dfrac{dz}{dx} & (6) \\ \dfrac{d^2 z}{dx^2} = 2\dfrac{du}{dx} - \dfrac{dz}{dx} & (7) \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{du}{dx} & (8)\end{array}\right.$$

(4) bağıntısından

$$\frac{dz}{dz} + z = 2\frac{dy}{dx}$$

yazılarak, dz/ dx , dy/dx , ve z yi u fonksiyonu cinsinden ifade edelim :

(3) den $\quad z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{dx} - x + u\right)$

(6) dan $\quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^2 u}{dx^2} - 1 + \dfrac{du}{dx}\right)$

(5) de $\quad \dfrac{dy}{dx} = u$

olur. Bunlar yukarıdaki ilk bağıntı için düzenlenirse:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}-1+\frac{du}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}-x+u\right)=2u$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}-3u=x+1$$

olur ki bu çözülürse:

$$u=c_1\cdot e^{-3x}+c_2\cdot e^{x}-\frac{x}{3}-\frac{5}{9}$$

bulunur. Bu yardımcı fonksiyonu kullanarak esas bilinmeyen fonksiyonlarımız y ve z yi belirlemeye çalışalım. Uygun bağıntılar seçelim. (5) den,

$$\frac{dy}{dx}=u \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{y}=\int u\,dx$$

ve devam ederek

$$y=\int\left(c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{x}{3}-\frac{5}{9}\right)dx=-\frac{1}{3}c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{x^2}{6}-\frac{5x}{9}+c_3$$

bulunur.

$$\mathrm{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}-x+u\right)$$

bağıntısını kullanarak,

$$z=\frac{1}{2}\left(-3c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{1}{3}-x+c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{x}{3}-\frac{5}{9}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-2c_1e^{-3x}+2c_2e^{x}-\frac{4}{3}x-\frac{8}{9}\right)=-c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}$$

olur. Böylece normal sistemin çözümü

$$u=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{x}{3}-\frac{5}{9}$$
$$y=-\frac{1}{3}c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{x^2}{6}-\frac{5x}{9}+c_3$$
$$z=-c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{2x}{3}-\frac{4}{9}$$

olacaktır. u fonksiyonu yardımıyla bilinmeyen fonksiyonlarımız belirlenirse yani kanonik sistemin çözüm takımı yazılmak istenirse

$$\left|\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{3}c_1e^{-3x}+c_2e^{x}+c_3-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{5x}{9} \\ z=-c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\dfrac{2x}{3}-\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$$

bulunur. Dikkat edilirse çözümde 3 tane keyfi sabit bulunmaktadır.

02.09.Wronskien ve Çözümlerin Lineer Bağımlılığı

Bu konudaki tanımı örnek seçilmiş bir model üzerinde yapalım ve tartışalım. Bunun için, aşağıda görülen üç değişkenli üç denklemli homojen diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada oluşturacağımız ilke ve özellikleri n bilinmeyenli, n denklemli bir denklem sistemi için de ifade edebiliriz. Seçtiğimiz sistem şu olsun:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}(t)x+a_{12}(t)y+a_{13}(t)z \\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}(t)x+a_{22}(t)y+a_{23}(t)z \\ \dfrac{dz}{dt}=a_{31}(t)x+a_{32}(t)y+a_{33}(t)z \end{array}\right. \tag{2.5}$$

Bu sistemin x(t) = 0, y(t) = 0, z(t) = 0 olan bir çözümü vardır ki bu aşikâr ya da trivial çözümdür. Asıl amacımız bundan başka çözümlerinin bulunup bulunmadığını araştırmaktır. Varsayalım ki sistemin çözüm takımı aşağıdaki gibi bulundu:

$$\begin{array}{l} x_1(t),\ \mathrm{y}_1(t),\ \mathrm{z}_1(t) \\ x_2(t),\ \mathrm{y}_2(t),\ \mathrm{z}_2(t) \\ x_3(t),\ \mathrm{y}_3(t),\ \mathrm{z}_3(t) \end{array} \tag{2.6}$$

Bunlarla oluşturulan determinanta *Wronskien* denir ve W ile gösterilir. Bununla anlatılmak istenilen aşağıda gösterilmiştir:

$$W=W(x,y,z)=\begin{vmatrix} x_1(t) & \mathrm{y}_1(t) & \mathrm{z}_1(t) \\ x_2(t) & \mathrm{y}_2(t) & \mathrm{z}_2(t) \\ x_3(t) & \mathrm{y}_3(t) & \mathrm{z}_3(t) \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Wronskien, yukarıda örnek olarak seçtiğimiz çözüm takımının lineer bağımlı olup olmadığını test etmek için kullanılır. Bunun için aşağıdaki teorem dikkate alınmalıdır.

Teorem. Seçtiğimiz homojen sistemin çözüm takımını yukarıda sembolik olarak ifade etmiştik. Bu çözüm takımında yer alan çözümler ayrı ayrı $\mathrm{a}\le\mathrm{t}\le\mathrm{b}$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu çözümlere ait Wronskien $\mathrm{t}=\mathrm{t}_0$ için sıfıra eşit ise $\mathrm{W}\equiv 0$ dır ve çözümler *lineer bağımlıdır* demektir. Şimdi c_1, c_2, c_3 keyfi sabitlerini göz önüne alalım; ancak hepsi birden sıfır olmasın. Bunların içinde olduğu aşağıdaki sistemi inceleyelim:

$$\left| \begin{array}{l} c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + c_3 \cdot x_3(t) = 0 \\ c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t) + c_3 \cdot y_3(t) = 0 \\ c_1 \cdot z_1(t) + c_2 \cdot z_2(t) + c_3 \cdot z_3(t) = 0 \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Bunu cebirsel anlamda düzenlenmiş bir sistem olarak görebiliriz.

$t = t_0$ için,

$$W = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & x_3(t_0) \\ y_1(t_0) & y_2(t_0) & y_3(t_0) \\ z_1(t_0) & z_2(t_0) & z_3(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

olması gerektiğini yazacağız. Bu, sistemin katsayılar determinantıdır. Sistemin aşikâr çözümden başka çözümleri olmasının gerek şartıdır. c_1, c_2, c_3 ün bu determinant yardımıyla belirlenmesi halinde,

$$\begin{array}{l} x(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + c_3 \cdot x_3(t) \\ y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t) + c_3 \cdot y_3(t) \\ z(t) = c_1 \cdot z_1(t) + c_2 \cdot z_2(t) + c_3 \cdot z_3(t) \end{array}$$

fonksiyonlarını oluşturursak, başta göz önüne alınan homojen sisteminin, $a \le t \le b$ aralığındaki bir $t = t_0$ değeri için sıfıra eşit olan çözümleri bulunur. Bu çözümler, hepsi birden aynı zamanda sıfır olmayan c keyfi sabitleri için gerçekleşiyorsa, t ne olursa olsun, bu ancak ve ancak $W \equiv 0$ olması ile olanaklıdır. Bu koşul varsa,

$$\begin{array}{l} x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t) \\ x_2(t),\ y_2(t),\ z_2(t) \\ x_3(t),\ y_3(t),\ z_3(t) \end{array}$$

çözüm takımlarının lineer bağımlı olmasını gerekir. Bu lineer bağımlılık bir önceki sistemde görülmektedir.

$$\left| \begin{array}{l} c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + c_3 \cdot x_3(t) = 0 \\ c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t) + c_3 \cdot y_3(t) = 0 \\ c_1 \cdot z_1(t) + c_2 \cdot z_2(t) + c_3 \cdot z_3(t) = 0 \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Buradaki bağıntılar, hepsi birden sıfır olmayan c_1, c_2, c_3 keyfi sabitleri için gerçekleşeceğinden, her t değeri için bu görülmektedir. Bunlar arasında c_1, c_2, c_3 yok edilirse $W \equiv 0$ olur. Bu tür sistemlerin bir çözümü daima vardır. Bu çözümün genel çözümü tanımlayabilmesi için, bilinmeyen fonksiyon sayısına eşit sayıda çözümün lineer bağımsız olması gerekir.

02.10 Teklik Teoremi

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + a_{13}(t)z \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + a_{23}(t)z \\ \dfrac{dz}{dt} = a_{31}(t)x + a_{32}(t)y + a_{33}(t)z \end{array} \right. \qquad (2.10)$$

sisteminin çözümünü

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + c_3 \cdot x_3(t) \\ y(t) &= c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t) + c_3 \cdot y_3(t) \\ z(t) &= c_1 \cdot z_1(t) + c_2 \cdot z_2(t) + c_3 \cdot z_3(t) \end{aligned}$$

şeklinde göz önüne almıştık. Buna *Genel Çözüm* denir. Bu çözüm tektir. Bu teoremin amacı bu iddiayı kanıtlamaktır.

$a \le t \le b$ aralığında, $t = t_0$ için $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ olsun. Bu koşulları birlikte sağlayan bir ve yalnız bir çözüm vardır ki o da: $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ dir. Bu çözüm (a,b) kapalı aralığında geçerlidir. Benzer şekilde düşünerek, bu kez $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ alınırsa buna karşı gelen çözüm $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$ ve benzer şekilde $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ alınırsa bu kez çözüm $x_3(t)$, $y_3(t)$, $z_3(t)$ olur. Bunlar tek türlü belirlenebilirler ve lineer bağımsızdırlar.
Gerçekten de,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x(t) & y(t) & z(t) \\ x(t) & y(t) & z(t) \end{vmatrix} \qquad \rightarrow \qquad W(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğu görülür. Bu sonuç, lineer bağımsız en az bir çözüm takımının var olduğunu ve bunun tek türlü belireceğini ifade eder.

$$\begin{aligned} & x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t) \\ & x_2(t),\ y_2(t),\ z_2(t) \\ & x_3(t),\ y_3(t),\ z_3(t) \end{aligned}$$

çözüm takımının lineer bağımlı olması gerekir. Bu lineer bağımlılık bir önceki düzenlemedeki fonksiyonlar ile belirlenmektedir. Burada hepsi birden sıfır olmayan c_1, c_2, c_3 sabitleri için gerçekleşmektedir. Her t değeri için bunun varlığı görülmektedir. Bunlar arasında c_1, c_2, c_3 yok edilirse, $W \equiv 0$ olur. Sistemin temel çözüm takımı (esaslı çözüm takımı) her zaman mevcuttur. Bunların genel çözüme ait olabilmesi için, bilinmeyen fonksiyon sayısına eşit sayıda çözümün lineer bağımsız olması gerekir ki bu da $W \neq 0$ olmasını gerektirir.

02.11. Asal İntegraller

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots.., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots.., y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots.., y_n) \end{array}\right. \qquad (2.11)$$

şeklindeki bir normal sistemin çözümünün araştırılmasında kullanılan yöntemlerden biri de *Asal İntegraller*' den yararlanmaktır. n. mertebeden bu normal sistemin genel çözümü

$$\left|\begin{array}{l} y_1 = F_1(x, c_1, \ldots\ldots., c_n) \\ y_2 = F_2(x, c_1, \ldots\ldots., c_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = F_n(x, c_1, \ldots\ldots., c_n) \end{array}\right. \qquad (2.12)$$

olsun. Bu çözüm takımında $c_1, c_2, \ldots.., c_n$ gibi n tane keyfi sabit bulunmaktadır. Eğer bu çözüm takımı $c_1, c_2, \ldots\ldots., c_n$ sabitlerine göre çözülürse,

$$\left|\begin{array}{l} c_1 = G_1(x, y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = G_n(x, y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n) \end{array}\right. \qquad (2.13)$$

şeklindeki bağıntılar elde edilir. Bu şekilde bulunan

$G_1(x, y_1, \ldots, y_n)$; $G_2(x, y_1, \ldots, y_n)$;...; $G_n(x, y_1, \ldots, y_n)$;

ifadelerinden her birine (2.11) sisteminin bir *Asal İntegrali* denir. (2.12) ile (2.13) bağıntıları yazılış bakımından farklı olmakla birlikte gerçekte aynı bağıntılardır. Öyleyse (2.13) bağıntıları da (2.11) sisteminin çözü-müdür. Bunlar lineer bağımlı olamazlar. Ancak bunlardan herhangi bir sayıda alınmak suretiyle meydana getirilecek bir fonksiyon da yine bir Asal İntegraldir. Örneğin c_1, c_2, c_3 asal integrallerinin bir lineer kombinezonudur. λ, μ, ν sabitler olmak üzere,

$$\Phi(c_1, c_2, c_3) = \lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 = c_k \text{ ise}$$

$$c_k = \Phi(c_1, c_2, c_3) = \lambda G_1(x, y_1, \ldots, y_n) + \mu G_2(x, y_1, \ldots, y_n) + \nu G_3(x, y_1, \ldots, y_n) = G_k(x, y_1, \ldots, y_n)$$

gibi yine $x, y_1, y, \ldots\ldots\ldots\ldots. y_n$ nin yeni bir fonksiyonunu verir. Bu ise

(2.13) deki asal integrallerle aynı anlamda bir fonksiyondur.

Bir normal sistemin, birbirinden bağımsız asal integrallerinin sayısı, bağlı fonksiyon sayısına eşittir. Böyle bir sistemin çözümünde, (2.12) de görüldüğü gibi n tane keyfi sabit vardır. Bunlar için ifade edilen (2.13) deki asal integraller de doğal olarak n tane olacaktır.

Asal integrallerin bulunması bazen kolay bazen güçtür. Bunların hesabı için genel bir kural yoktur. Ancak uygulamada en çok kullanılan şekli aşağıda açıklanmıştır.

(2.11) sistemi, her bağıntı *dx* için çözülerek yeniden düzenlenirse,

$$dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, ..., y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, ..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, ..., y_n)}$$

yazılabilir. Bu da yeni bir düzenlemeyle,

$$\frac{dx}{F_0(x, y_1, ..., y_n)} = \frac{dy_1}{F_1(x, y_1, ..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{F_n(x, y_1, ..., y_n)}$$

şeklinde ifade edilebilir ki buna *Yardımcı Sistem* veya *Sistemin Simetrik Şekli* denir. Orantı özellikleri de kullanılarak, yardımcı sistemden,

$$F_1 dx = F_0 dy_1; ....; F_n dx = F_0 dy_n;$$
$$F_1 dy_2 = F_2 dy_1; ......; F_n dy_1 = F_1 dy_n;$$
$$.........; F_n dy_{n-1} = F_{n-1} dy_n$$

gibi bağıntıların yazılması suretiyle elde edilecek bu diferansiyel denklemlerin hiçbiri çözüme elverişli değilse, aşağıdaki yöntemin denenmesi bazen olumlu sonuçlar vermektedir.

$x, y_1, y_2, ..., y_n$ ler için $k_0 F_0 + k_1 F_1 + k_2 F_2 + ... + k_n F_n = 0$ bağlantısı sağlanacak şekilde $k_0, k_1, ..., k_n$ gibi $(n+1)$ adet sabit ya da fonksiyon mevcut olsun. Bunlar için,

$$k_o\, dx + k_1\, dy_1 + k_2\, dy_2 + ... + k_n\, dy_n = dF$$

olacak şekilde bir $F(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, yardımcı sistemden, orantı özelliği kullanılarak,

$$\frac{k_0 dx + k_1 dy_1 + k_2 dy_2 + ... + k_n dy_n}{k_0 F_0 + k_1 F_1 + k_2 F_2 + ... + k_n F_n} = \frac{dF}{0}$$

yazılabilir. Bu oranın, kaldırılabilir bir belirsizlik göstermesi halinde, yani ancak $dF = 0$ ise bir anlamı olabilir. $dF \neq 0$ olması halinde bu oran tanımlı olamaz. Demek ki incelenmeye değer durum $dF = 0$ olması halidir. Bu ise,

$$dF = 0 \rightarrow F(x, y_1, y_2, ..., y_n) = c$$

gibi bir bağıntı verir ki, yardımcı sistemle belirtilen sistemin asal integralidir.

Örnek.

$\frac{dx}{x-2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{1-z}$ sisteminin asal integrallerini bulalım. Bu en basit durumdur. Çünkü burada oranlar her değişken için ayrı ayrı düzenlenmiştir. En kolay uygulama şudur:

$$\frac{dx}{x-2}=\frac{dy}{dy} \quad \to \quad \int\frac{dx}{x-2}=\int\frac{dy}{y} \quad \to \quad \ln y=\ln(x-2)+\ln c_1$$

$$\to y=c_1(x-2);$$

$$\frac{dx}{x-2}=\frac{dz}{1-z} \quad \to \int\frac{dx}{x-2}=-\int\frac{dz}{z-1} \quad \to \quad \text{-ln(z-1)}=\ln(x-2)+\ln c_1$$

$$\to \quad \frac{1}{z-1}=c_2(x-2) \quad \to \quad z=\frac{1+c_2(x-2)}{c_2(x-2)}$$

Böylece y ve z fonksiyonları, serbest değişken seçilen x için çözümlenmiş olmaktadır. Ancak sistemin çözümünü ifade için sonuçta

$$\begin{cases} y=c_1(x-2) \\ z=\dfrac{1+c_2(x-2)}{c_2(x-2)} \end{cases}$$

yazılmalıdır.

Örnek.

$$\frac{dx}{x+y-z}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{1}$$

sistemini, asal integrallerini belirleyerek çözelim.

$$\frac{dx}{x+y-z}=\frac{dy}{z}\to\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{1}$$

olur. Buradan aşağıdaki düzenlemelere geçilebilir:

$$\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{d(x+y)}{x+y}=\frac{dz}{1}\to$$

$$\int dz=\int\frac{d(x+y)}{x+y}\to\ln z=\ln(x+y)+\ln C_1\to z=C_1(x+y)$$

$$\frac{dy}{z}=\frac{dz}{1}\to dy=zdz\to\int dy=\int zdz\to y=\frac{z^2}{2}+C_2;$$

Bu iki asal integral birlikte ifade edilerek genel çözüm bulunmuş olur:

$$\begin{cases} z=C_1(x+y) \\ 2y=z^2+2C_2 \end{cases}$$

Örnek.

$$\frac{dx}{x+1}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{-(x+y+z)}$$

veriliyor. Simetrik şekliyle verilen bu diferansiyel denklem sistemini, asal integrallerini bularak çözelim.

Öncelikle, $\dfrac{dx}{x+1}=\dfrac{dy}{y}$ seçimi yapılırsa:

$$\int\frac{dx}{x+1}=\int\frac{dy}{y}\rightarrow$$

$$\ln(x+1)+\ln C_1=\ln y\rightarrow y=C_1(x+1)$$

bulunur. Ancak diğer asal integrali bulmak bu kadar kolay olmayacaktır. Bu kez aşağıda açıklandığı gibi hareket edilir:

k_0,k_1,k_2 sabitleri ya da değişkenleri için,

$$\frac{k_0dx}{k_0(x+y)}=\frac{k_1dy}{k_1y}=\frac{k_2dz}{-k_2(x+y+z)}=\frac{k_0dx+k_1dy+k_2dz}{k_0(x+1)+k_1y-k_2(x+y+z)}=\frac{dF}{0}$$

olmalıdır. Burada paydanın sıfır olabilmesi koşulunu

$k_o(x+1)+k_1y-k_2(x+y+z)=0$ için değerlendirelim. Keyfi seçilen

$k_\theta=k_1=k_2=1$ için: $x+1+y-x-y-z=1-z$

olup, bu değerler için

$$\frac{dx+dy+dz}{1-z}=\frac{d(x+y+z)}{1-z}=\frac{dz}{-(x+y+z)}$$ İlişkisine ulaşılır. Buradan:

$$(x+y+z)d(x+y+z)=(z-1)dz$$

$$\frac{1}{2}(x+y+z)^2+\frac{1}{2}C_2=\frac{1}{2}(z-1)^2$$

$$(z-1)^2-(x+y+z)^2=C_2$$

$$(2z+x+y)(x+y+1)=-C_2$$

bulunur. Bu da sistemin ikinci asal integrali olur. Böylece sistemin çözümü

$$\begin{cases} y=C_1(x+1)\\ (2z+x+y)(x+y+1)=-C_2\end{cases}$$

şeklinde ifade edilmiş olur.

Örnek.

$$\frac{dx}{4y-3z}=\frac{dy}{4x-2z}=\frac{dz}{2y-3x}$$

denklem sistemini asal integrallerini bularak integre edelim:

k_0,k_1,k_2 keyfi seçilmiş herhangi sabitler ya da değişkenler olmak üzere:

$$\frac{k_0dx+k_1dy+k_2dz}{k_0(4y-3z)+k_1(4x-2z)+k_2(2y-3x)}=\frac{dF}{0}=\frac{0}{0}$$

şeklinde ifade edelim.

Buradan $(4k_1 - 3k_2)x + (4k_0 + 2k_2)y - (3k_0 + 2k_1)z = 0$ bulunur. Böylece

$$\begin{cases} 4k_1 - 3k_2 = 0 \\ 4k_0 + 2k_2 = 0 \rightarrow \\ 3k_0 + 2k_1 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

olup sistemdeki ilk iki bağıntı alınarak

$\dfrac{k_0}{-2} = \dfrac{k_1}{3} = \dfrac{k_2}{4}$ ilişkisine varılır. Bu sistemdeki üçüncü bağıntıyı da sağlar.

Uygulamada pratik bir yaklaşımla k_0, k_1, k_2 ile orantılı sayılar seçilir.

Buna göre $k_0 = -2, k_1 = 3, k_2 = 4$ için payda sıfır olacaktır. Öyleyse pay $dF = -2x + 3y + 4zC_1$ şeklinde çözümlenerek 1.asal integral bulunmuş olur.

İkinci asal integrali bulmak üzere bu kez paydayı, katsayıları esas alarak, yeniden düzenleyelim :

$4(k_0 y + k_1 x) - 3(k_0 z + k_2 x) - 2(k_1 z - k_2 y) = 0$ bulunur. Buradan

$$\begin{cases} k_0 y + k_1 x = 0 \\ k_0 z + k_2 x = 0 \rightarrow \\ k_1 z - k_2 y = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & -y \end{vmatrix} = 0$$

olup, ilk işleme benzer şekilde, ilk iki bağıntı alınırsa bunlardan

$$\frac{k_0}{x} = \frac{k_1}{-y} = \frac{k_2}{-z}$$

ilişkisine varılır. En basit uygulama şekli, orantılı olarak seçilen k lar için

$k_0 = x, k_1 = -y, k_2 = -z$

olarak payda sıfır olacaktır. Öyleyse

$$dF = xdx - ydy - zdz = 0$$

$$F = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = \frac{C_2}{2}$$

olup, bu ise $x^2 - y^2 - z^2 = C_2$ şeklinde düzenlenerek 2.asal integral de bulunmuş olur. Ancak sistemin genel çözümü, bu iki asal integral bir araya getirilerek ifade edilir. Genel çözüm :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 4z = C_1 \\ x^2 - y^2 - z^2 = C_2 \end{cases}$$

olarak bulunmuştur.

Örnek.

$$\frac{pdx}{(q-r)yz}=\frac{qdy}{(r-p)xz}=\frac{rdz}{(p-q)xy}$$ denklem sistemini çözelim:

Çözümü asal integralleri bulmak suretiyle gerçekleştirelim. Bu amaçla k_0, k_1, k_2 keyfi sabit ya da değişkenleri önerilmiş olsun.

$$\frac{k_0pdx+k_1qdy+k_2zdz}{k_0(q-r)yz+k_1(r-p)xz+k_2(p-q)xy}=\frac{dF}{0}=\frac{0}{0}$$

formundan hareketle, paydanın hangi keyfi k_0, k_1, k_2 için sıfır olabileceği koşullarını araştıralım.

İlk olarak paydayı p,q,r için yeniden düzenleyelim:

$$p(k_2y-k_1z)x+q(k_0z-k_2x)y+r(-k_0y+k_1x)z=0$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} k_2y-k_1z=0 \\ k_0z-k_2x=0 \\ k_1x-k_0y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}=0$$

olup, bu lineer-homojen sistemin ilk iki bağıntısı alınırsa buradan

$$\frac{k_0}{x}=\frac{k_1}{y}=\frac{k_2}{z}$$

ilişkisine ulaşılır. Böylece $k_0=x, k_1=y, k_2=z$ olarak seçmek en uygun olanıdır. Bu seçime göre artık

$$dF=pxdx+qydy+rzdz=0$$

$$F=\frac{px^2}{2}+\frac{qy^2}{2}+\frac{rz^2}{2}=\frac{C_1}{2}$$

yazılarak, buradan 1.asal integral $px^2+qy^2+rz^2=C_1$ olarak bulunur.

2.asal integrali bulmak için bu kez daha farklı bir düzen oluşturalım. Bu kez x,y,z değişkenine göre

$(k_0qy-k_1px)z+(k_2px-k_0rz)y+(k_1rz-k_2qy)z$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{cases} k_0qy-k_1px=0 \\ k_2px-k_0rz=0 \\ k_1rz-k_2qy=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} qy & -px & 0 \\ rz & 0 & -px \\ 0 & rz & -qy \end{vmatrix}=0$$

olup ilk iki bağıntıdan hareketle

$$\frac{k_0}{px}=\frac{k_1}{qy}=\frac{k_2}{rz}$$

ilişkisi bulunur. Buradan en basit şekliyle $k_0 = px, k_1 = qy, k_2 = rz$ seçilir. Buna göre yapılacak düzenlemeyle

$$dF = p^2xdx + q^2ydy + r^2zdz = 0$$

$$F = \frac{1}{2}p^2x^2 + \frac{1}{2}q^2y^2 + \frac{1}{2}r^2z^2 = \frac{1}{2}C_2$$

$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 = C_2$$

şeklinde 2.asal integral de bulunmuş olur. Böylece sistemin genel çözümü

$$\begin{cases} px^2 + qy^2 + rz^2 = C_1 \\ p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 = C_2 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilmiş olur.

02.12. Mertebe Düşürmeye Dair Teorem.

n. mertebeden bir normal sistemin bir asal integrali belirlenebilmiş ise, sistemin mertebesi bir mertebe düşürülebilecektir. Bunun için (2.11) sistemini göz önüne alalım. Sistemin bir asal integrali

$$G(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_1$$

olur. Bunu değişkenlerden biri için, örneğin y_1 için çözelim :

$y_1 = H(x, y_2, y_3, ..., y_n, C_1)$ olur. Bu sistemdeki denklemlerde y_1 yerine konarak sistem yeniden düzenlenirse, sistemin mertebesi (n-1) olacaktır. Çünkü sistemdeki iki bağıntı lineer bağıntılı hale gelecektir. Öyleyse bunlardan biri atılarak sistem yeniden düzenlenirse, sistemin (n-1). mertebeden olduğu görülür.

Örnek.

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{-z}$ sistemini bu teoremden yararlanarak çözelim. Önce asal integrallerden birini bulalım. Bunun için $\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z}$ seçilerek, integre edilirse

$$\ln x = -\ln x + \ln C_1 \rightarrow z = \frac{C_1}{x}$$

olur ki, bu sistemin 1.asal integralidir. Şimdi ikinci bir bağıntı olarak

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z}$$

seçilmiş olsun. 1.asal integral burada yerleştirilerek

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x + \frac{C_1}{x}} \rightarrow dy = (1 + \frac{C_1}{x^2})dx$$ olur. İntegre edilirse

$y = x - \frac{C_1}{x} + C_2$ bulunur. $\frac{C_1}{x} = z$ olduğundan, böylece $z + y - x = C_2$ çözümüne ulaşılır ki bu da sistemin 2.asal integralidir. Demek ki sistemin çözümü

$\begin{cases} xz = C_1 \\ z + y - z = C_2 \end{cases}$ şeklinde bulunmuş olacaktır.

02.13 Sabit Katsayılı Homojen Denklem Sistemleri

Homojen denklem sisteminin tanımı 02.09.alt-başlığı ile verilen birimde yapılmıştır. Orada model olarak önerilen sistem yeniden göz önüne alınacaktır :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \frac{dz}{dt} &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned} \tag{2.14}$$

Bu tür sistemlerin $x(t) = 0, y(t) = 0, z(t) = 0$ dan oluşan bir çözüm takımı vardır ve buna Aşikar Çözüm (Trivial Çözüm) denir. Ancak bu çözüm takımı keyfi sabitleri içermediğinden 'sistemin genel çözümü' anlamına gelmemektedir.

Bu açıklama ışığında, öyleyse yapılması gereken çalışma, sistemin genel çözümü olan aşikâr çözümden başkaca çözümlerinin varlığının araştırılması olacaktır.

Burada incelenecek sistem, özel olarak, 'sabit katsayılı' olarak seçilmiştir. Amaç bu tür bir sistemi incelemektir.

Burada $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$ sabit katsayılardır.

Bu tür sistemler, ilk olarak önerilen, 'türetme-yok etme yöntemi' uygulanarak da çözümlenebilir. Ancak bu yöntem yerine burada daha farklı bir yöntem önerilecektir.

k_1, k_2, k_3 sabit katsayılar olmak üzere , (2.14) de görülen homojen sistemin çözüm takımı $x = k_1 e^{\lambda t}, y = k_2 e^{\lambda t}, z = k_3 e^{\lambda t}$ şeklinde seçilmiş olsun. Bunlar sistemdeki her denklemi özdeş olarak sağlamalıdır.

$\frac{dx}{dt} = k_1 \lambda e^{\lambda t}, \frac{dy}{dt} = k_2 \lambda e^{\lambda t}, \frac{dz}{dt} = k_3 \lambda e^{\lambda t}$

olup, bunlar için sistem

$$\begin{aligned} k_1 \lambda e^{\lambda t} &= a_1 k_1 \lambda e^{\lambda t} + b_1 k_2 \lambda e^{\lambda t} + c_1 k_3 \lambda e^{\lambda t} \\ k_2 \lambda e^{\lambda t} &= a_2 k_1 \lambda e^{\lambda t} + b_2 k_2 \lambda e^{\lambda t} + c_2 k_3 \lambda e^{\lambda t} \\ k_3 \lambda e^{\lambda t} &= a_3 k_1 \lambda e^{\lambda t} + b_3 k_2 \lambda e^{\lambda t} + c_3 k_3 \lambda e^{\lambda t} \end{aligned}$$

şeklini alır.

$$
\begin{aligned}
(a_1-\lambda)k_1+b_1k_2+c_1k_3&=0\\
a_2k_1+(b_2-\lambda)k_2+c_2k_3&=0\\
a_3k_1+b_3k_2+(c_3-\lambda)k_3&=0
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

sistemine ulaşılır. Buna '*karakteristik sistem*' denir. Bu, cebirsel anlamda bir lineer-homojen denklem sistemidir. Açık olarak görülür ki bu sistemin $k_1=k_2=k_3=0$ olan bir çözümü vardır ve buna 'Aşikar Çözüm' denir. Sistem k_1,k_2,k_3 için düzenlendiğinden bu değerler için çözüm takımından $x(t)=y(t)=z(t)=0$ sonucuna ulaşılır. Bu, denklem sisteminin aşikâr çözümünden başkaca çözümlerinin olabilmesi koşulunun, sistemin katsayılar determinantının sıfıra eşit olması demektir. Buna göre, $\Delta(\lambda)$ ile göstereceğimiz bu determinant aşağıda görüldüğü gibi oluşacaktır:

$$
\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2-\lambda & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{2.16}
$$

Bu ise λ ya göre 3.dereceden bir cebirsel denklem olup, A,B,C bu denklemdeki sabit katsayıları göstermek üzere;

$$
\Delta(\lambda)=\lambda^3+A\lambda^2+B\lambda+C=0 \tag{2.17}
$$

olur. Buna '*Karakteristik Denklem'* denir. Bu cebirsel denklem olup $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ gibi üç adet kökü bulunacağını varsayıyoruz. Bunların her biri için $\Delta(\lambda_1)=\Delta(\lambda_2)=\Delta(\lambda_3)=0$ olup, her kök için karakteristik sistem yeniden düzenlenmelidir.

$\Delta(\lambda)=0$ dan bulunacak $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ kökleri çeşitli şekillerde oluşabilir. Bunlar basit kökler olabileceği gibi, çakışık kökler ya da kompleks kökler de olabilecektir. Bu gibi durumların her birinde, ilk önerilen çözüm takımı, uygun şekilde yeniden düzenlenmelidir. Bu düzenlemeler yapılırken, önceden edindiğimiz diferansiyel denklemlere ait bilgiler bize rehber olacaktır.

Bundan sonraki çalışma bu köklerin yapısıyla doğrudan ilgili olduğu için onları ayrı alt-başlıklar halinde inceleyeceğiz.

02.13.01 Karakteristik Denklemin Basit Kökleri Olması Hali:

$\Delta(\lambda)=0$ karakteristik denkleminin $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ olarak belirlediğimiz kökleri, basit kökler olsunlar. Önceden belirtildiği gibi bunların her biri için

$\Delta(\lambda_1)=\Delta(\lambda_2)=\Delta(\lambda_3)=0$

olacaktır. Bu üç durum ayrı ayrı incelenmelidir.

$\lambda=\lambda_1$ için :

$\Delta(\lambda)=\Delta(\lambda_1)=0$ olup, (2.15) sistemi bunun için yeniden düzenlenirse, sistemin çözümünden bulunacak k_1, k_2, k_3 değerleri, sırasıyla k_{11}, k_{21}, k_{31} olsunlar. λ nın bu değer için çözüm takımı

$x=k_{11}e^{\lambda_1 t}, y=k_{21}e^{\lambda_1 t}, z=k_{31}e^{\lambda_1 t}$ olarak bulunur.

$\lambda=\lambda_2$ için :

$\Delta(\lambda)=\Delta(\lambda_2)=0$ olup, (2.15) sistemi bunun için yeniden düzenlenirse, sistemin çözümünden bulunacak k_1, k_2, k_3 değerleri, sırasıyla k_{12}, k_{22}, k_{32} olsunlar. λ nın bu değer için çözüm takımı

$x=k_{12}e^{\lambda_2 t}, y=k_{22}e^{\lambda_2 t}, z=k_{32}e^{\lambda_2 t}$ olarak bulunur.

$\lambda=\lambda_3$ için :

$\Delta(\lambda)=\Delta(\lambda_3)=0$ olup, (2.15) sistemi bunun için yeniden düzenlenirse, sistemin çözümünden bulunacak k_1, k_2, k_3 değerleri, sırasıyla k_{13}, k_{23}, k_{33} olsunlar. λ nın bu değeri için çözüm takımı

$x=k_{13}e^{\lambda_3 t}, y=k_{23}e^{\lambda_3 t}, z=k_{33}e^{\lambda_3 t}$

olarak bulunur. (2.6) da belirtilen çözüm takımı bu şekilde belirlenmiş olup, bunlar için oluşturulacak $w=w(x,y,z)$ Wronskieni $\neq 0$ olacaktır. Öyleyse bunlar, bu sistemin genel çözümünü oluşturmak için yeterlidir. C_1, C_2, C_3 keyfi sabitler olmak üzere sistemin genel çözüm ;

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 k_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 k_{12} e^{\lambda_2 t} + c_3 k_{13} e^{\lambda_3 t} \\ y(t) &= c_1 k_{21} e^{\lambda_1 t} + c_2 k_{22} e^{\lambda_2 t} + c_3 k_{23} e^{\lambda_3 t} \\ y(t) &= c_1 k_{31} e^{\lambda_1 t} + c_2 k_{32} e^{\lambda_2 t} + c_3 k_{33} e^{\lambda_3 t} \end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek.

Konuyu önce basit bir örnek üzerinde inceleyelim. Seçtiğimiz sistem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

olsun. Burada iki bilinmeyenle iki denklemli bir sistem vardır. Bu sistemin çözüm takımı $x=k_1e^{\lambda t}, y=k_2e^{\lambda t}$ şeklinde önerilmiş olsun. Bunlar sistemi özdeş olarak sağlamalıdır.

$$\frac{dx}{dt}=k_1\lambda e^{\lambda t}, \frac{dy}{dt}=k_2\lambda e^{\lambda t}$$

olup, sistem bunlar için düzenlenir ve de sadeleştirse, karakteristik sistem,

$$\begin{cases} k_1\lambda + k_2 = 0 \\ 3k_2 + (\lambda - 2)k_2 = 0 \end{cases} \quad \text{olur.}$$

$k_1 = k_2 = 0$ sistemin aşikar çözümü olup bunlar için çözüm takımından

$x(t) = y(t) = 0$ bulunur ki, bu da diferansiyel denklem sisteminin aşikar çözümü olur.

Sistemin diğer çözümlerini araştıralım. Bu amaçla, öncelikle karakteristik denklemi yazalım :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Çözüm $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ verir.

$\lambda_1 = -1$ için: $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_1) = \Delta(-1) = 0$ olur.

Sistem bu değer için düzenlenirse

$\begin{cases} -k_1 + k_2 = 0 \\ 3k_1 - 3k_2 = 0 \end{cases} \rightarrow k_1 = k_2$ olur. Keyfi olarak $k_1 = k_2 = 1$ seçilirse $\lambda = -1$ için ilk çözüm takımı $x = e^{-t}, y = e^{-t}$ olur.

$\lambda_2 = 3$ için : $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_2) = \Delta(3) = 0$ olur. Sistem bu değer için düzenlenirse :

$\begin{cases} 3k_1 + k_2 = 0 \\ 3k_1 + k_2 = 0 \end{cases} \rightarrow k_2 = -3k_1$ olur Keyfi olarak $k_1 = 1$ alınırsa $k_2 = -3$ olup $\lambda = 3$ için ikinci çözüm takımı $x = e^{3t}, y = -e^{3t}$ olur. c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere sistemin genel çözümü

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \\ y = C_1e^{-t} - 3C_2e^{3t} \end{cases}$$

olarak ifade edilecektir.

Örnek.

$$\frac{dx}{dt} = -2x - y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - z$$
$$\frac{dz}{dt} = 3x + y + 2z$$

diferansiyel denklemini çözelim. Bu bir lineer-homojen denklem sistemi olup, bunun bir çözüm takımının

$x(t) = k_1e^{\lambda t}, y(t) = k_2e^{\lambda t}, z(t) = k_3e^{\lambda t}$ şeklinde olduğunu varsayalım.

$\frac{dx}{dt} = k_1\lambda e^{\lambda t}, \frac{dy}{dt} = k_2\lambda e^{\lambda t}, \frac{dz}{dt} = k_3\lambda e^{\lambda t}$ olup bunlar birlikte diferansiyel denklem sistemini özdeş olarak sağlarlar.

Böylece

$$\begin{cases} k_1\lambda e^{\lambda t} = -2k_1e^{\lambda t} - k_2e^{\lambda t} - k_3e^{\lambda t} \\ k_2\lambda e^{\lambda t} = -k_1e^{\lambda t} - k_3e^{\lambda t} \\ k_3\lambda e^{\lambda t} = 3k_1e^{\lambda t} + k_2e^{\lambda t} + 2k_3e^{\lambda t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\lambda+2)k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + \lambda k_2 + k_3 = 0 \\ -k_1 - k_2 + (\lambda-2)k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{olur.}$$

Bu sistem (Karakteristik Sistem) $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ için sağlanır Bu sistemin aşikâr çözümüdür. Buna karşı gelen $x(t) = y(t) = z(t) = 0$ ise, diferansiyel denklem sisteminin aşikâr çözümüdür.

Şimdi bundan başka çözümleri olup olmadığı araştırılmalıdır. Öncelikle

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -3 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-1) = 0$$

olduğu hesaplanır. Buna göre karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ olur. Şimdi bu köklerin her biri için temel çözüm takımları tek tek belirlenmelidir.

$\lambda_1 = -1$ için: $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_1) = \Delta(-1) = 0$ olup, bu değer için karakteristik sistem

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0 \\ -3k_1 - k_2 - 3k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{olup,}$$

bunu sağlayan bir keyfi değer takımı $k_1 = -1, k_2 = 0, k_3 = 1$ olarak bulu-nur. Bunlar için temel çözüm takımı

$x_1(t) = -e^{-t}, y_1(t) = 0 * e^{-t} = 0, z_1(t) = e^{-t}$ şeklinde oluşur.

$\lambda_2 = 0$ için: $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_2) = \Delta(0) = 0$ olup, bu değer için karakteristik sistem

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \\ -3k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases}$$

şeklinde oluşur. Bunlardan $k_1 = -k_2 = -k_3$ ilişkisi bulunur. Keyfi olarak $k_1 = 1$ alınırsa $k_2 = -1, k_3 = -1$ olur. Böylece $\lambda_2 = 0$ a karşın oluşan temel çözüm takımı

$x_2(t) = 1, y_2(t) = -1, z_2(t) = -1$ şeklini alır.

$\lambda_3 = 1$ için: $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_3) = \Delta(1) = 0$ olup, bu değer için karakteristik sistem

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ -3k_1 - k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$$

şeklinde oluşur. Bunlar arasında oluşan $k_1 = 0, k_3 = -k_2$ şeklindeki ilişkiden, keyfi olarak $k_2 = 1$ alınırsa $k_3 = -1$ olacağından, üçüncü temel çözüm takımı da

$$x_3(t) = 0.e^t = 0, \quad y_3(t) = e^t, \quad z_3(t) = -e^t$$

olarak bulunmuş olur.

Bu çalışmalardan sonra artık diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünün yazılması aşamasına gelinmiştir. C_1, C_2, C_3 herhangi üç keyfi sabiti gösterdiklerine göre genel çözüm :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t) \\ y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + C_3 y_3(t) \\ x(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) + C_3 z_3(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 \\ y(t) = -C_2 + C_3 e^t \\ z(t) = C_1 e^{-t} - C_2 - C_3 e^t \end{cases}$$

olarak bulunur.

02.13.02.Karakteristik Denklemin Çakışık Kökleri Olması Hali:

(2.14) sistemini incelerken oluşan $\Delta(\lambda) = 0$ karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ köklerinden ikisi ya da üçü birden birbirine eşit olması durumunda, çözüm takımları belirlenirken yapılacak seçim artık basit köklerde olduğu şekilde olamaz. Çünkü biliyoruz ki bu şekilde oluşacak çözüm takımları birbirine lineer bağımlı olamazlar. Bu nedenle ve bu durumda çözüm takımları oluşturulurken aşağıda açıklandığı şekilde hareket edilmelidir.

$\Delta(\lambda) = 0$ denkleminin kökleri, diyelim ki $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3$ şeklinde bulun-muştur. Burada da her λ değeri için ayrı ayrı hesaplamalar yapılacaktır. Sadece farklı olan, eşit olan köklerden biri için uygun bir düzenleme yapmaktan ibarettir. Bunu nasıl yapılacağını, adi diferansiyel denklemlere ait bilgilerimiz yardımıyla çözümleyeceğiz. Bu amaçla, Cilt I. sayfa 199 daki açıklamalar bir kez daha gözden geçirilmelidir.

$\lambda = \lambda_1$ ve $\lambda = \lambda_2$ için, basit köklerde olduğu şekilde işlemler yürütülür. Farklı uygulama λ_2 ile çakışık olan $\lambda = \lambda_3$ yapılacaktır. Bunun için yapılacak düzenlemede, önerilen çözüm takımı t ile çarpılı olmalıdır. Böylece $w \neq 0$ olması koşulu en basit şekilde sağlanacaktır. Problemin işlenişi önceki örneklerde görüldüğü şekilde gerçekleşecektir. Aşağıdaki örnek, konunun pekiştirilmesine katkı sağlayacaktır.

Örnek.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$$

sistemini inceleyelim. Sistemin bir çözüm takımı

$$x(t) = k_1 e^{\lambda t}, y(t) = k_2 e^{\lambda t}$$

olsun.

$\frac{dx}{dt} = k_1 \lambda e^{\lambda t}, \frac{dy}{dt} = k_2 \lambda e^{\lambda t}$ olup bunlar birlikte denklem sistemini sağlamalıdır. Buna göre

$$\begin{cases} k_1 \lambda e^{\lambda t} = -k_1 e^{\lambda t} - k_2 e^{\lambda t} \\ k_2 \lambda e^{\lambda t} = -k_1 e^{\lambda t} - 3k_2 e^{\lambda t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\lambda + 1)k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 + (\lambda + 3)k_2 = 0 \end{cases}$$

olur. Böylece karakteristik sistem bulunmuştur. $k_1 = k_2 = 0$ için bu sistem kendiliğinden sağlanır ki bu aşikar çözümdür. Bunun için çözüm takımından $x(t) = y(t) = 0$ olur ki bu da diferansiyel denklem sisteminin aşikâr çözümüdür.

Şimdi diğer çözümlerin araştırılmasına geçilebilir. Bunun için öncelikle karakteristik denklem bulunmalıdır.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 3) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

olup bu ise $(\lambda + 2)^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -2$ köklerini verir. Böylece çakışık köklerle karşılaşılmış olur. Çözüm takımları her iki kök için ayrı ayrı hesaplanmalıdır. Ancak buradaki ikircikli durum çakışık kökten kaynaklanır. Bunun için gerekli açıklama aşağıda yapılacaktır.

$\lambda_1 = -2$ ilk kök için: $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_1) = \Delta(-2) = 0$ olup buna karşı gelen çözüm takımı

$x_1(t) = k_1 e^{-2t}, y_1(t) = k_2 e^{-2t}$ olsun. Karakteristik sistem

$k_1 - k_2 = 0 \rightarrow k_1 = k_2$ verir. Keyfi olarak $k_1 = 1$ seçilirse $k_2 = 1$ olur. Böylece ilk çözüm takımı

$x_1(t) = e^{-2t}, y_1(t) = e^{-2t}$ olarak belirlenir.

$\lambda_2 = -2$ çakışık kök için : $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_2) = \Delta(-2) = 0$ olur. Bu kez çözüm takımı öncekinden farklı olarak düzenlenmelidir. Biliyoruz ki çözüm takımını oluşturan fonksiyonlar için $w \neq 0$ olmalıdır. Bunun anlamı, $x(t), y(t)$ nin lineer bağımlı olamayacaklarıdır. Bu açıklamalar dikkate alınarak, çakışık kök $\lambda = -2$ için çözüm takımı bu kez

$x_2(t) = (k_1 t + l_1)e^{-2t}, y_2(t) = (k_2 t + l_2)e^{-2t}$ şeklinde düzenlenmelidir. Bunlar diferansiyel denklem sistemini sağlamalıdır.

$$\frac{dx}{dt} = k_1 e^{-2t} - 2(k_1 t + l_1), \frac{dy}{dt} = k_2 e^{-2t} - (k_2 t + l_2)e^{-2t}$$

olup, terimler e^{-2t} ile sadeleştirilir ve gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{cases} (k_1 - k_2)t + l_1 - l_2 - k_1 = 0 \\ (k_1 - k_2)t + l_1 + l_2 - k_2 = 0 \end{cases}$$

sistemine ulaşılır. Buradan

$$k_1 - k_2 = 0 \rightarrow k_1 = k_2$$

$$l_1 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), l_2 = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)$$

ilişkileri bulunur. $k_1 = k_2$ için $l_1 = k_1, l_2 = 0$ oldukları hesaplanır. Keyfi olarak $k_1 = 1$ seçilirse $k_1 = 1, k_2 = 1, l_1 = 1, l_2 = 0$ bulunur. Artık bu ikinci köke karşı gelen çözüm takımının

$$x_2(t) = (t+1)e^{-2t}, y_2(t) = te^{-2t}$$

olduğu yazılabilecektir. Bu sonuçlardan yararlanarak diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünün ifade edilebilmesi artık olanaklıdır. C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2(t+1)e^{-2t}$$
$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t}$$

bulunur.

02.13.03 Karakteristik Denklemin Karmaşık Kökleri Olması Hali:

(2.14) sistemini incelerken karşılaşılacak bir durum da $\Delta(\lambda) = 0$ karakteristik denkleminin kökleri arasında karmaşık (kompleks) sayılar bulunabilmesidir. Burada hemen anımsatılmalıdır ki bu tür sayılar daima eşleniği ile birlikte var olurlar Örneğin $1+2i$ kök ise, mutlaka o problemde $1-2i$ de köktür.

Bu dikkate alınarak, bu sistemin genel çözümünü yazabilmemiz için bulmamız gereken çözüm takımları önceki çalışmalarımızdan farklı bir yapısal imajı gerektirmektedir.

$$x(t) = k_1 e^{\lambda t}, y(t) = k_2 e^{\lambda t}, z(t) = k_3 e^{\lambda t}$$

olarak önerilen çözüm takımı için belirleyici işlemler önceki çalışmalarımızda olduğu şekilde yürütülür. Farklılık $\Delta(\lambda) = 0$ karakteristik denkleminin köklerinin karmaşık sayılar içermesi halinde ortaya çıkar. Seçilen modelde $\Delta(\lambda)$, 3.dereceden bir cebirsel denklem olacağı için, bunun bir kökü reel, diğer iki kökü karmaşık sayılar olacaktır. Şunu da biliyoruz ki, tekrarlarsak, karmaşık sayılar, mutlaka eşlenik kökleriyle birlikte bulunurlar Yani $i^2 = -1$ olmak üzere, α+iβ kök ise $\alpha - i\beta$ da diğer köktür. Bu ayrıntı, problem çözerken bize kolaylık sağlayacaktır. Kökler $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_{2,3} = \alpha \mp i\beta$ olsunlar.

$$\begin{cases} x_1(t) = k_{11}e^{\lambda_1 t}, y_1(t) = k_{21}e^{\lambda_1 t}, z_1(t) = k_{31}e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = k_{12}e^{(\alpha - i\beta)t}, y_2(t) = k_{22}e^{(\alpha - i\beta)t}, z_2(t) = k_{32}e^{(\alpha - i\beta)t} \\ x_3(t) = k_{13}e^{(\alpha + i\beta)t}, y_3(t) = k_{23}e^{(\alpha + i\beta)t}, z_3(t) = k_{33}e^{(\alpha + i\beta)t} \end{cases}$$

ile bunların türevleri birlikte (2.14) denklem sistemini sağlarlar.

Buradan her kök ya da her çözüm takımı için karakteristik sistem ayrı ayrı düzenlenerek araştırmaya devam edilir. Örneğin $\lambda_3 = \alpha + i\beta$ için

$$\begin{cases} [a_1 - (\alpha + i\beta)]k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 = 0 \\ a_2 k_1 + [b_2 - (\alpha + i\beta)]k_2 + c_2 k_3 = 0 \\ a_3 k_1 + b_3 k_2 + [c_3 - (\alpha + i\beta)]k_3 = 0 \end{cases}$$

karakteristik denklem sistemi oluşur. Bu denklemlerin ortak özelliği, hepsinin $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ için aşikâr olarak sağlanacak olmasıdır.

Buna karşın çözüm takımından $x(t) = y(t) = z(t) = 0$ olur ki bu da diferansiyel denklem sisteminin aşikar çözümüdür.

Problemin çözümünün ayrıntılarının diğer açıklamaları aşağıda yer verilmiş olan örnek üzerinde yapılacaktır.

Örnek.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{2}y$$

lineer-homojen diferansiyel denklem sistemi verilmiştir. İnceleyelim:

Temel çözüm takımı

$x(t) = k_1 e^{\lambda t}, y(t) = k_2 e^{\lambda t}$ olsun. Türevleriyle birlikte sistemde yerlerine konursa, sadeleştirmeler sonunda

$$\begin{cases} (\lambda - \frac{1}{2})k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 + (\lambda - \frac{1}{2})k_2 = 0 \end{cases}$$

olur.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{2})^2 + 1 = 0$$

dan $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \mp i$ bulunur. Görüldüğü gibi kökler bir çift eşlenik karmaşık sayıdır.

$\lambda_1 = \frac{1}{2} - i$ için : $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_1) = \Delta(\frac{1}{2} - i) = 0$ olup, bunun için sistemden hareket edilerek $k_2 = ik_1$ bulunur. Keyfi olarak $k_1 = 1$ alınırsa $k_2 = i$ olur. Böylece λ_1 köküne karşı gelen çözüm takımı

$$x_1(t) = e^{(\frac{1}{2}-i)t}, y_1(t) = ie^{(\frac{1}{2}-i)t}$$

olur.

$\lambda_2 = \dfrac{1}{2} + i$ için : $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda_2) = \Delta(\dfrac{1}{2} + i) = 0$ olup, bunun için sistemden hareketle $k_2 = -ik_1$ bulunur. Keyfi olarak $k_1 = 1$ alınırsa $k_2 = -i$ olur. Böylece λ_2 köküne karşı da çözüm takımı

$$x_2(t) = e^{(\frac{1}{2}+i)t}, y_2(t) = -ie^{(\frac{1}{2}+i)t}$$

şeklinde oluşur. Artık genel çözümü yazmak olanaklıdır. c_1 ve c_2 herhangi iki keyfi sabit olmak üzere

$$\begin{cases} x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{(\frac{1}{2}-i)t} + c_2 e^{(\frac{1}{2}+i)t} \\ y(t) = c_1 ie^{(\frac{1}{2}-i)t} + c_2 ie^{(\frac{1}{2}+i)t} \end{cases}$$

bulunur.

Uyarı 1.

Karmaşık sayılarla ilgili çalışmalarda genellikle trigonometrik ifadeler yeğlenmektedir. Bu şekilde daha basit ifadeler elde edilebilmektedir. Bunu yapabilmek için, karmaşık sayılara ilişkin $e^{\mp inx} = \cos nx \mp i \sin nx$ bağıntısından yararlanmak gerekecektir. Bunun yardımıyla, keyfi sabitler de uygun düzenlenerek i sanal sayısından bağımsız bir sonuç ifade edilebilecektir. Bunu problemimizin sonucuna uygulayalım:

$$\begin{cases} x = c_1 e^{\frac{1}{2}t} * e^{-it} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} * e^{it} \\ y = c_1 ie^{\frac{1}{2}t} * e^{-it} - c_2 ie^{\frac{1}{2}t} * e^{it} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}t}[c_1 e^{-it} + c_2 e^{it}] \\ y = e^{\frac{1}{2}t}[c_1 ie^{-it} - c_2 ie^{it}] \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}t}[c_1(\cos t - isint) + c_2(\cos t + i \sin t)] \\ y = e^{\frac{1}{2}t}[c_1 i(\cos t - isint) - c_2 i(\cos t + i \sin t)] \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}t}[(c_1 + c_2)\cos t - i(c_1 - c_2)\sin t] \\ y = e^{\frac{1}{2}t}[i(c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t] \end{cases}$$

olur. Burada K_1 ve K_2 keyfi sabitleri, $c_1 + c_2 = K_{1,} (c_1 - c_2)i = K_2$ olarak seçilirse diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x(t) = e^{\frac{1}{2}t}[K_1 \cos t - K_2 \sin t] \\ y(t) = e^{\frac{1}{2}t}[K_2 \cos t + K_1 \sin t] \end{cases}$$

olarak, önceki sonuca göre çok daha sade bir şekilde düzenlenmiş olur. Çözümde i sanal sayısının görülmediğine dikkat edilmelidir.

Uyarı 2.

Yukarıda, karmaşık köklerin eşlenik çiftler halinde bulunacağı anımsatılmıştır. Bu özellikten yararlanarak, bu tür bir problem, çok daha kısa yoldan çözümlenebilir.

$\lambda_1 = \frac{1}{2} - i$ için çözüm takımı

$x(t) = e^{(\frac{1}{2}-i)t}, y(t) = ie^{(\frac{1}{2}-i)t}$ şeklinde oluştuğu görülmüştür. $\lambda_1 = \frac{1}{2} - i$ ile $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i$ kökleri karşılaştırılırsa farkın sadece λ_1 deki $-i$ yerine λ_2 de $+i$ olduğu görülür. Öyleyse yukarıdaki çözüm takımında $-i$ yerine $+i$

konarak, ikinci çözüm takımı, hiçbir hesaba gerek kalmaksızın yazılabilecektir:

$x(t) = e^{(\frac{1}{2}+i)t}, y(t) = -ie^{(\frac{1}{2}+i)t}$

Uyarı 3.

Lineer-homojen sistemlerin yukarıdan beri yapılan incelemesi oldukça güçlükler arz eder; uzun hesapları gerektirir. Oysa bu denklem sistemlerinin operatörler yardımıyla çözümü bazı kolaylıklar sağlamaktadır. Bu konu da kitabımızda yer alacaktır.

02.14. Alıştırma Problemleri ve Yanıtları

Aşağıdaki denklem sistemlerini türetme-yok etme yöntemini kullanarak çözünüz:

1) $x'(t) = y + t$
$y'(t) = x + t$

Yanıt: $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{t} - t - 1$
$y(t) = -C_1e^{-t} + C_2e^{t} - t - 1$

2) $x'(t) - y = 0$
$y'(t) - x = -1$

Yanıt: $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + 1$
$y(t) = -C_1e^{-t} + C_2e^{t}$

3) $x''(t) = -x$
$y''(t) = y$

Yanıt: $x(t) = y(t) = 0$ Aşikar çözüm
$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$
$y(t) = C_3e^{t} + C_4e^{-t}$

4) $x''(t) = x - 2$
$y''(t) = y + 2$

Yanıt: $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t + 2$
$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t - 2$

5) $\begin{aligned} x'(t) &= 7x - y \\ y'(t) &= -2x + 6y - 2z \\ z'(t) &= -2y + 5z \end{aligned}$ Yanıt: $\begin{aligned} &x(t) = y(t) = z(t) = 0 \text{ Aşikar çözüm} \\ &x(t) = C_1e^{3t} + 2C_2e^{6t} - 2C_3e^{9t} \\ &y(t) = 2C_1e^{3t} + C_2e^{6t} - 2C_3e^{9t} \\ &z(t) = 2C_1e^{3t} + 2C_2e^{6t} - C_3e^{9t} \end{aligned}$

Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini, verilen başlangıç değerlerine uyacak şekilde bulunuz:

1) Başlangıç koşulları : $x(0) = 1; y(0) = 0$

$\begin{aligned} x'(t) &= x \\ y'(t) &= x + y \end{aligned}$ Yanıt: $\begin{aligned} &x(t) = y(t) = 0 \text{ Aşikar çözüm} \\ &x(t) = e^t \text{ ; } y(t) = te^t \end{aligned}$

2) Başlangıç koşulları : $x(0) = 1; y(0) = 2$

$\begin{aligned} x'(t) &= 3x - y \\ y'(t) &= 2x \end{aligned}$ Yanıt: $\begin{aligned} &x(t) = y(t) = 0 \text{ Aşikar çözüm} \\ &x(t) = e^t \text{ ; } y(t) = 2e^t \end{aligned}$

Aşağıdaki sistemleri, asal integrallerini bularak çözünüz:

1) $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{zx} = \dfrac{dz}{xy}$ Yanıt: $\begin{aligned} &x^2 - y^2 = C_1 \\ &x^2 + y^2 - 2z^2 = C_2 \end{aligned}$

2) $\dfrac{dx}{x+z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{-x-y-z}$ Yanıt: $\begin{aligned} &x + y + z = C_1 \\ &x + y - C_1 \ln y = C_2 \end{aligned}$

3.BÖLÜM

SİSTEMLERİN İNCELENMESİNDE MATRİSLERİN KULLANILMASI

03.01. Giriş

Önceki bölümde diferansiyel denklem sistemlerinin elemanter anlamda incelenmesine yer verdik. Hayli ayrıntılardan söz ettik. Ancak biliyoruz ki bu bilgiler dahi yerine göre yeterli olmuyor. Bir de aynı problemi çok daha kolay ve hızlı çözebilmenin yol ve çareleri araştırılıyor. İşte bu konu, aynı ya da farklı türden diferansiyel denklemlerin çözümünde matrislerin kullanılması esasına dayanmaktadır. Konu işlenirken okuyucunun yeterli düzeyde matris bilgisi olduğu varsayılmaktadır. Gerek matris cebiri ve gerekse matris analizi konuları kullanılırken, gerek görüldüğü yerlerde ve metnin baş tarafında matrisler hakkında açıklamalar yapılacaktır. Kuşkusuz bu konunun da ayrıntıları olacaktır. Onları da konu işlenirken göreceğiz.

03.02. Bazı Tanımlar

Tanım 1. Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem sisteminin normal biçimi

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, ..., x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, ..., x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, ..., x_n), \end{aligned} \tag{3.1}$$

ile tanımlanır. Burada, t bağımsız değişken, $\{x_1, ..., x_n\}$ bağımlı değişkenler ve $f_1, ..., f_n$ verilmiş fonksiyonlardır.

Verilen bir $a \le t \le b$ aralığında t nin her değeri için (3.1) sistemini sağla- yan $\{x_1, ..., x_n\}$ fonksiyonlarının tümüne birden denklem sisteminin çözümü denir. Yani, bu fonksiyonlar sistemde yerine yazıldığında her t için özdeş olarak sağlanır.

Sistem için başlangıç değer probleminden de söz edebiliriz. (3.1) sistemi ile birlikte $a \le t \le b$ aralığında bir t_0 noktasında

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, x_2(t_0) = x_{2,0}, ..., x_n(t_0) = x_{n,0}, \tag{3.2}$$

olarak, n tane verilen başlangıç koşulları tarafından sağlanan probleme, sistemin başlangıç-değer problemi denir. .

(3.1) sistemini ve (3.2) başlangıç koşullarını vektörel olarak, kısaca

$x'(t) = f(t, x_1, ..., x_n),\ x(t_0) = x_0$ biçiminde yazabiliriz. Burada

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}$$

olarak tanımladık. x_0, n-bileşenli reel sayılar kümesi R^n de bir nokta veya vektör, $x(t)$ ise vektör-değerli bir fonksiyon, yani R^n de bir eğri gösterir.

Tanım 2. Bir diferansiyel denklem sisteminin boyutu, denklem sayısı olarak tanımlanır. (3.1) sistemi f nin yapısına bağlı olarak, lineer ya da lineer olmayan diye iki sınıfa ayrılır. Burada esas olarak lineer sistemler incelenecektir. Eğer f vektör-değerli fonksiyonu $\{x_1, ..., x_n\}$ değişkenlerine göre lineer ise, sisteme birinci mertebeden lineer denklem sistemi denir. Aksi halde lineer olmayan bir sistemdir denir. Buna göre, birinci mertebeden lineer bir sistem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1 = a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2'(t) &= f_2 = a_{21}(t)x_1 + ... + a_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n'(t) &= f_n = a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + g_n(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır. Bu sistem kısaca, aşağıdaki matrisler yardımıyla,

$x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$

olarak yazılabilir. Burada $g(t)$, $n \times 1$ sütun-vektör fonksiyonu ve $A(t)$, $n \times n$ matris-değerli bir fonksiyondur.

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Tanım 3. Eğer (3.3) sisteminde $g_j(t)$, $(j = 1, 2, ..., n)$ fonksiyonları özdeş olarak sıfır ise sistem *homojen,* değilse *homojen olmayan* sistemdir. Ayrıca, $a_{ij}(t), (i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., n)$ katsayıları sabit ise, sisteme *sabit katsayılı* lineer sistem adı verilir. Böyle bir sistem, matris gösterimi ile $x' = Ax + g$ olarak yazılır. Yüksek mertebeden bir denklem her zaman bir sisteme dönüştürülebilir.

Örnek .

2. mertebeden lineer $y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=r(t)$ diferansiyel denklemini 2-boyutlu bir sisteme dönüştürerek yazınız.

$x_1 = y,\ x_2 = x_1'$ olarak tanımlanırsa

$x_2' = x_1'' = y'' = -p(t)x_2 - q(t)x_1 + r(t)$

yazılabilir. Yani, verilen denklem (3.1) sisteminin $n=2$ ve

$f_1 = x_2,\ f_2 = -p(t)x_2 - q(t)x_1 + r(t)$ için özel biçimi olur.

Genel olarak $n.$ mertebeden lineer

$$y^{(n)}(t)+p_1(t)y^{(n-1)}(t)+...+p_{n-1}(t)y'(t)+p_n(t)y(t)=r(t) \tag{3.4}$$

diferansiyel denklemi, birinci mertebe $n-$boyutlu bir sisteme dönüştürülebilir.

Bunun için $x_1 = y, x_2 = x', ..., x_n = x_{n-1}'$ tanımlamaları yapılırsa sistem

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_{n-2}, \\ x_n' &= -p_n x_1 - p_{n-1}x_2 - \cdots p_1 x_n + r(t), \end{aligned} \tag{3.5}$$

biçimini alır.

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_n & -p_{n-1} & \cdots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \qquad g(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(t) \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa, (3.5) sistemini $x'(t)=A(t)x(t)+g(t)$ vektör biçiminde yazabiliriz. Yani, (3.5) sistemi, (3.3) sisteminin özel bir biçimi olur. Eğer $y(t)$, (3.4) denkleminin bir çözümü ise, o zaman

$$x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$$

fonksiyonları (3.5) sistemini sağlar. Tersine, (3.5) sistemi (3.4) denklemine indirgenebilir. Bu geçiş yalnızca lineer denklemler için değil lineer olmayan $n.$ mertebe

$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$

denklemi için de uygulanabilir. Bu durumda denk sistem (3.1) sisteminin özel bir durumu olacaktır.

03.03. Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri

Sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklem sistemi; $i, j = 1, 2, ..., n;\ x_i(t)$ ler birinci mertebeden türevi olan fonksiyonlar a_{ij} ve u_i ler reel sabit büyüklükler ve

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$x'(t) = Ax(t) + f(t) \tag{3.6}$$

veya daha açık bir formda ifade etmek istersek,

$$\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{array}$$

formunda bir sistemdir.

03.04. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklem Sistemleri

$f(t) = 0$ ise (3.6) sistemi, lineer homojen diferansiyel denklem sistemi olarak isimlendirilir. Bu sistemin

$$x = ue^{rt} \tag{3.7}$$

formunda bir çözümünü araştıralım. Bu amaçla (3.7) yi (3.6) de yerine koyalım ve düzenleyelim.

$$x'(t) = Ax(t) \Rightarrow ure^{rt} = Aue^{rt} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} re^{rt} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} e^{rt} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} u_1 r \\ u_2 r \\ \vdots \\ u_n r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
(a_{11}-r)u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n &= 0\\
a_{21}u_1 + (a_{22}-r)u_2 + \cdots + a_{2n}u_n &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + (a_{nn}-r)u_n &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

veya buna denk olmak üzere $(A-rI)u=0$ elde edilir. Burada I, $n\times n$ boyutlu bir matristir.

(3.8) in $u_1=u_2=\ldots=u_n=0$ 'dan farklı bir çözümünün olması, katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıyla olanaklıdır.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-r & a_{2n}\\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0 \tag{3.9}$$

Bu determinant açılırsa, r ye göre yazılmış n. dereceden bir denklem elde edilecektir. Bu denklemin $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ile göstereceğimiz kökleri A matrisinin *özdeğerleri* olarak bilinir.

$r=r_i$ değerini (3.8) de yerine koyalım ve burada bulunan $u_1, u_2, \ldots, u_n$ değerleri ile oluşan u matrisini $u^{(i)}$ ile ve böylece elde edilen çözümü $x^{(i)}(t)$ ile gösterelim :

$$x^{(i)}(t) = u^{(i)} e^{r_i t}$$

demektir.

$x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ çözümlerinin Wronski determinantı sıfırdan farklı olduğu için bunlar bir temel çözüm takımı oluştururlar. (3.9) un katlı kökü yoksa $x'(t)=Ax(t)$ 'nin genel çözümü,

$$x(t) = c_1 u^{(1)} e^{r_1 t}, c_2 u^{(2)} e^{r_2 t}, \ldots, c_n u^{(n)} e^{r_n t}$$

ile verilir. (3.9)'ün köklerinin bazıları kompleks sayı ise bunların eşlenik-leri de köktür. (3.9)'ün kökleri tamamının reel ve tek katlı, tamamının reel fakat bazıları çok katlı, bazılarının kompleks olduğu durumlarda problemin nasıl çözüleceğine, aşağıda verilen örneklerde açıklık getirilecektir.

03.05. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemleri

Önce lineer homojen diferansiyel denklem sistemi çözülür. Sonra sağ taraf için bir özel çözüm bulunur. Bu iki çözümün toplamı genel çözümü verecektir. İki değişkenli hal için özel çözümün nasıl bulunacağı aşağıda ayrıntılı olarak anlatılmaktadır. Daha fazla değişken için genelleştirme kolayca yapılabilir.

İki değişkenli sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklem sistemi

$$x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + f_1(t)$$
$$x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + f_2(t)$$

formundadır. Sağ tarafsızın çözümü,

$$x_1(t) = c_1x_{11}(t) + c_2x_{12}(t)$$
$$x_2(t) = c_1x_{21}(t) + c_2x_{22}(t)$$

ya da matrisyel olarak

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{pmatrix}$$

dir. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin bu değerleri sağ tarafsız sistemde, yani

$$x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$$
$$x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)$$

de yerine konursa

$$c_1x_{11}'(t) + c_2x_{12}'(t) = a_{11}\left[c_1x_{11}(t) + c_2x_{12}(t)\right] + a_{12}\left[c_1x_{21}(t) + c_2x_{22}(t)\right]$$
$$c_1x_{21}'(t) + c_2x_{22}'(t) = a_{21}\left[c_1x_{11}(t) + c_2x_{12}(t)\right] + a_{22}\left[c_1x_{21}(t) + c_2x_{22}(t)\right]$$

ve düzenlenirse

$$c_1\left[x_{11}'(t) - a_{11}x_{11}(t) - a_{12}x_{21}(t)\right] + c_2\left[x_{12}'(t) - a_{11}x_{12}(t) - a_{12}x_{22}(t)\right] = 0$$
$$c_1\left[x_{21}'(t) - a_{21}x_{11}(t) - a_{22}x_{21}(t)\right] + c_2\left[x_{22}'(t) - a_{21}x_{12}(t) - a_{22}x_{22}(t)\right] = 0$$

bulunur. Bu son iki bağıntının c_1 ve c_2 nin her değeri için gerçeklenmesi ise ancak ve ancak

$$x_{11}'(t) - a_{11}x_{11}(t) - a_{12}x_{21}(t) = 0$$
$$x_{12}'(t) - a_{11}x_{12}(t) - a_{12}x_{22}(t) = 0$$
$$x_{21}'(t) - a_{21}x_{11}(t) - a_{22}x_{21}(t) = 0$$
$$x_{22}'(t) - a_{21}x_{12}(t) - a_{22}x_{22}(t) = 0$$

olmasıyla olanaklıdır. Sağ taraf için

$$x_1^{(p)}(t) = L_1(t)x_{11}(t) + L_2(t)x_{12}(t)$$
$$x_2^{(p)}(t) = L_1(t)x_{21}(t) + L_2(t)x_{22}(t)$$

$$x^{(p)}(t) = L_1(t)\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{pmatrix} + L_2(t)\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{pmatrix}$$

formunda bir özel çözüm aranır. $x_1^{(p)}(t)$ ve $x_2^{(p)}(t)$ nin bu değerleri (3.1) de yerine konursa;

$$L_1'x_{11} + L_2'x_{12} + L_1x_{11}' + L_2x_{12}' = a_{11}\left(L_1x_{11} + L_2x_{12}\right) + a_{12}\left(L_1x_{21} + L_2x_{22}\right) + f_1(t)$$
$$L_1'x_{21} + L_2'x_{22} + L_1x_{21}' + L_2x_{22}' = a_{21}\left(L_1x_{11} + L_2x_{12}\right) + a_{12}\left(L_1x_{21} + L_2x_{22}\right) + f_2(t)$$

ve düzenlenirse,

$$L_1'x_{11}+L_2'x_{12}+L_1\left(x_{11}'-a_{11}x_{11}-a_{12}x_{21}\right)+L_2\left(x_{12}'-a_{11}x_{12}-a_{12}x_{22}\right)=f_1(t)$$
$$L_1'x_{21}+L_2'x_{22}+L_1\left(x_{21}'-a_{21}x_{11}-a_{22}x_{21}\right)+L_2\left(x_{22}'-a_{21}x_{12}-a_{22}x_{22}\right)=f_2(t)$$

ve (3.2) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} L_1'x_{11}+L_2'x_{12}&=f_1(t)\\ L_1'x_{21}+L_2'x_{22}&=f_2(t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

bulunur. L_1 ve L_2 nin buradan bulunan değerleri (3.3) de yerine konarak sağ taraf için özel çözüm elde edilir. Sağ tarafsızın çözümü ile sağ taraf için bulunan bu özel çözüm toplanarak genel çözüm elde edilir.

Üç denklemli hal için (3.10) un yerini,

$$\begin{aligned} L_1'x_{11}+L_2'x_{12}+L_3'x_{13}&=f_1(t)\\ L_1'x_{21}+L_2'x_{22}+L_3'x_{23}&=f_2(t)\\ L_1'x_{31}+L_2'x_{32}+L_3'x_{33}&=f_3(t) \end{aligned}$$

ifadelerinin alacağı, aynı yol izlenerek kolayca gösterilebilir.

Örnek .

$$x_1'=x_1+x_2+e^t$$
$$x_2'=9x_1+x_2+\sin t$$

sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemini çözelim.

Önce sağ tarafsızı çözelim :

$A=\begin{pmatrix}1&1\\9&1\end{pmatrix}$ dir. $|A-rI|=0$ denklemini oluşturup köklerini bulalım:

$$|A-rI|=\begin{vmatrix}1-r&1\\9&1-r\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=-2\ ,\quad r_2=4$$

Şimdi de $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ olmak üzere $(A-rI)u=0$ denklemini oluşturalım:

$$(A-rI)u=\begin{pmatrix}1-r&1\\9&1-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}(1-r)u_1+u_2=0\\9u_1+(1-r)u_2=0\end{cases}$$

dir. $r_1=-2$ koyalım:

$$\left[1-(-2)\right]u_1+u_2=3u_1+u_2=0\Rightarrow u_2=-3u_1,$$
$$9u_1+\left[1-(-2)\right]u_2=9u_1+3u_2=0\Rightarrow u_2=-3u_1.$$

$u_1 = 1$ seçelim. $u_2 = -3$ ve $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ olur.

$r_2 = 4$ için $u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bulunur.

Böylece sağ tarafsızın çözümü;

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 u^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 u^{(2)} e^{r_2 t}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{4t} \\ x_2(t) = -3c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{4t} \end{array}$$

olup burada

$$x_{11}(t) = e^{-2t}, x_{12}(t) = e^{4t}, x_{21}(t) = -3e^{-2t}, x_{22}(t) = 3e^{4t}$$

$$f_1(t) = e^t, f_2(t) = \sin t$$

dir. (3.4) de yerine koyalım:

$$L_1' e^{-2t} + L_2' e^{4t} = e^t$$

$$-3L_1' e^{-2t} + L_2' e^{4t} = \sin t$$

olup, buradan,

$$L_1' = \frac{e^{3t}}{2} - \frac{e^{2t}}{6}\sin t, L_2' = \frac{e^{-3t}}{2} + \frac{1}{6} e^{-4t} \sin t \Rightarrow$$

$$L_1 = \frac{e^{3t}}{6} - \frac{e^{2t}}{30}\left(2\sin t - \cos t\right), L_2 = \frac{e^{-3t}}{6} + \frac{e^{-4t}}{102}\left(4\sin t + \cos t\right)$$

ve

$$x^{(p)}(t) = \left[\frac{e^{3t}}{6} - \frac{e^{2t}}{30}\left(2\sin t - \cos t\right)\right] \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$-\left[\frac{e^{-3t}}{6} + \frac{e^{-4t}}{102}\left(4\sin t + \cos t\right)\right] \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 3e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-18\sin t + \cos t}{170} \\ -e^t + \dfrac{14\sin t - 22\cos t}{170} \end{pmatrix}$$

bulunur.

Sağ tarafsızın çözümü ile sağ taraflı için bulunan özel çözümün toplamı genel çözümü verecektir.

İkinci Yöntem olarak: $D=\dfrac{d}{dt}$ olmak üzere, denklem sistemini

$$Dx_1 - x_1 - x_2 = e^t,$$
$$-9x_1 + Dx_2 - x_2 = \sin t$$

şeklinde düzenleyerek;

$$(D-1)x_1 - x_2 = e^t$$
$$-9x_1 + (D-1)x_2 = \sin t$$

formunda yazalım. Buradan x_1 i çözelim :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} e^t & -1 \\ \sin t & D-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -9 & D-1 \end{vmatrix}} = \frac{(D-1)e^t + \sin t}{D^2 - 2D - 8}$$

olur. Buradan

$$\left(D^2 - 2D - 8\right)x_1 = (D-1)e^t + \sin t \Rightarrow x_1'' - 2x_1' - 8x_1 = e^t - e^t + \sin t = \sin t$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklem olup karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 - 2r - 8 = 0 \Rightarrow \quad r_1 = -2,\ r_2 = 4$$

ve sağ tarafsızın çözümü

$$x_1 = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}$$

dir. Sağ taraf için $x_{1_p} = A\sin t + B\cos t$ formunda bir özel çözüm tahmin edilerek, işlemler sonucunda

$$x_{1_p} = -\frac{9}{85}\sin t + \frac{2}{85}\cos t$$

olur. Genel çözüm ise

$$x_1 = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} - \frac{9}{85}\sin t + \frac{2}{85}\cos t$$

olarak bulunur x_1 in bu değerini verilen denklemlerin ilkinde yerleştirelim ve x_2 yi bulalım :

$$D\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}-\frac{9}{85}\sin t+\frac{2}{85}\cos t\right)$$

$$=C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}-\frac{9}{85}\sin t+\frac{2}{85}\cos t+x_2+e^t\Rightarrow$$

$$-2C_1e^{-2t}+4C_2e^{4t}-\frac{9}{85}\cos t+\frac{2}{85}\sin t$$

$$=C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}-\frac{9}{85}\sin t+\frac{2}{85}\cos t+x_2+e^t\Rightarrow$$

$$x_2=-3C_1e^{-2t}+3C_2e^{4t}+\frac{7}{85}\sin t-\frac{11}{85}\cos t-e^t$$

elde edilir.

Örnek.

$x_1'=3x_1-4x_2$

$x_2'=2x_1-x_2$

sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklem sistemini çözelim.

Önce ikinci tarafsız denklemin çözümü bulalım.

$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ dir. $|A-rI|=0$ denklemini oluşturup köklerini bulalım :

$$|A-rI|=\begin{vmatrix}3-r & -4\\ 2 & -1-r\end{vmatrix}=0\Rightarrow \qquad r_{1,2}=1\pm 2i$$

şimdi de $u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ olmak üzere $(A-rI)u=0$ denklemini oluşturalım :

$$(A-rI)u=\begin{pmatrix}3-r & -4\\ 2 & -1-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}(3-r)u_1-4u_2=0\\ 2u_1-(1+r)u_2=0\end{cases}$$

olur.

$r_1=1+2i$ koyalım :

$$\begin{cases}(3-1-2i)u_1-4u_2=0\\ 2u_1-(1+1+2i)u_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(1-i)u_1=4u_2\\ 2u_1=2(1+i)u_2\end{cases}$$

$u_1=1$ seçelim. $u_2=\frac{1-i}{2}$ ve $u^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1-i}{2}\end{pmatrix}$ olur.

$r_2 = 1-2i$ için $u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+i}{2} \end{pmatrix}$ bulunur.

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 u^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 u^{(2)} e^{r_2 t} \quad = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-i}{2} \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} + \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+i}{2} \end{pmatrix} e^{(1-2i)t}$$

$$x_1(t) = c_1 e^t e^{2it} + c_2 e^t e^{-2it}$$

$$x_2(t) = c_1 \frac{1-i}{2} e^t e^{2it} + c_2 \frac{1+i}{2} e^t e^{-2it}$$

olur. Euler formülü şunlardır :

$$e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t, \; e^{-2it} = \cos 2t - i \sin 2t$$

Bu değerleri (3.1) ve (3.2) de yerine koyalım ve düzenleyelim :

$$x_1(t) = e^t \left[(c_1 + c_2)\cos 2t + i(c_1 - c_2)\sin 2t \right]$$

$$x_2(t) = e^t \left[\left(\frac{c_1 + c_2}{2} \right)(\cos 2t + \sin 2t) + i \left(\frac{c_1 - c_2}{2} \right)(\sin 2t - \cos 2t) \right]$$

ve $c_1 + c_2 = A, \; i(c_1 - c_2) = B$ diyelim :

$$x_1(t) = e^t \left(A \cos 2t + B \sin 2t \right)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} e^t \left[A(\cos 2t + \sin 2t) + B(\sin 2t - \cos 2t) \right]$$

ve nihayet bunlardan

$$x(t) = A \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \dfrac{1}{2}(\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} e^t + B \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \dfrac{1}{2}(\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix} e^t$$

bulunur.

Şimdi de farklı bir yöntemle problemi yeniden ele alalım : Denklemlerin ilkinden

$$x_2 = \frac{1}{4}(3x_1 - x_1')$$

bulunur. İkincisinde yerine koyalım ve düzenleyelim :

$$\frac{1}{4}(3x_1' - x_1'') = 2x_1 - \frac{1}{4}(3x_1 - x_1') \Rightarrow$$

$$x_1'' - 2x_1' + 5x_1 = 0$$

bulunur. Bu sabit katsayılı diferansiyel denklem olup karakteristik denklemi ve kökleri;

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm 2i$$

dir. Dolayısıyla,

$x_1 = e^t\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right)$

olacaktır. Bu ara sonucu (3.1) de değerlendirelim:

$$x_2 = \frac{3e^t\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) - e^t\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) - 2e^t\left(-A\cos 2t + B\sin 2t\right)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}e^t A\left[\left(\cos 2t + \sin 2t\right) + B\left(\cos 2t + \sin 2t\right)\right]$$

olarak çözüme ulaşılır.

03.06. Homojen Olmayan Lineer Sistem için Yöntemler

03.06.01. Sabitlerin Değişimi Yöntemi

Homojen olmayan lineer

$$x' = \mathrm{A}x + g$$

sisteminin genel çözümü, $x_h(t)$ homojen ve bir $x_p(t)$ özel çözümünün toplamı olarak ifade edilebilir. Yüksek mertebeden lineer bir denklem ile lineer bir sistem arasında benzerlik kurulabilir. Şimdi özel çözümü bulmak için sabitlerin değişimi yöntemini önereceğiz. Özel çözümü

$$x_p = \Phi(t)u(t)$$

biçiminde arayıp, $u(t)$ bilinmeyen vektör fonksiyonu belirleceğiz. Bu çözüm $x' = \mathrm{A}x + g$ sisteminde yerine yazılırsa

$$\Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u' = \mathrm{A}\Phi(t)u(t) + g(t)$$

ya da

$$\left(\Phi'(t) - \mathrm{A}\Phi(t)\right)u(t) + \Phi(t)u' = g(t)$$

bulunur. $\Phi(t)$ temel matrisi $\Phi' = \mathrm{A}\Phi$ diferansiyel denklem sistemini sağladığından yukarıdaki bağıntının sol yanındaki ilk terim sıfır vektörüne eşittir ve $u'(t)$ vektör fonksiyonu

$$\Phi u' = g \tag{3.11}$$

cebirsel denklem sisteminin çözümü olur. Bunu bir kez integre ederek $u(t)$ vektörünü bulmuş oluruz. Özel çözüm aradığımız için integrasyon sabitlerini atabiliriz. Bu söylediklerimizi uygulayarak başlangıç koşulunu sağlayan çözümü, yani

$$x' = \mathrm{A}x + g\,,\quad x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer probleminin çözümünü formüle edebilirz. Temel matris tekil olmayan bir matris olduğundan tersi her zaman vardır ve (3.11) bağıntısından $x(t_0)=0$ koşulunu sağlayan özel çözüm

$$u'(t)=\Phi^{-1}(t)g(t) \quad \Rightarrow \quad x_p=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

olarak yazılabilir. Genel çözüm ise

$$x=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)ds \tag{3.12}$$

formülü ile hesaplanır. Bu çözümde $t=t_0$ yazarak başlangıç koşulunun sağladığı kolayca görülebilir.

$$\Omega(t,s)=\Phi(t)\Phi^{-1}(s), \qquad \Omega(t,t)=\mathrm{I}$$

Matrisini tanımlarsak bu çözümü,

$$x=\Omega(t,t_0)x_o\int_{t_0}^{t}\Omega(t,s)g(s)ds \tag{3.13}$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Özel olarak, eğer $g\equiv a$ sabit bir vektör ise (3.13) formülü çok basit bir biçim alır. Önce g sabit olduğundan ;

$$x=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\Phi(t)\left(\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)ds\right)a$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\Phi^{-1}(t)\Phi(t)=\mathrm{I} \quad \Rightarrow \quad \Phi^{-1}(t)\Phi'(t)+\left(\Phi^{-1}(t)\right)'\Phi(t)=0$$

bağıntısından $\Phi'=\mathrm{A}\Phi$ olduğu göz önünde bulundurarak

$$\left(\Phi^{-1}(t)\right)'\Phi(t)=-\Phi^{-1}(t)\mathrm{A}\Phi \quad \Rightarrow \quad \Phi^{-1}(t)=-\left(\Phi^{-1}(t)\right)'\mathrm{A}^{-1}$$

yazabiliriz. Son bağıntıyı t_0 ve t arasında integre ederek $x'=\mathrm{A}x+a$ sisteminin çözümünü

$$x=\Omega(t,t_0)x_0-\Phi(t)\Phi^{-1}(t)\mathrm{A}^{-1}a+\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathrm{A}^{-1}a \;=\Omega(t,t_0)\left(x_0+\mathrm{A}^{-1}a\right)-\mathrm{A}^{-1}a$$

biçiminde ifade etmiş oluruz.

03.06.02. Köşegenleştirme Yöntemi

Bu yöntem yalnızca köşegenleştirilebilir bir matris için uygulanabilir. $x=\mathrm{P}y$ lineer dönüşümü ile sistem

$$x'=\mathrm{P}y'=\mathrm{AP}y+g \quad \Rightarrow \quad y'=Dy+h$$

biçimine dönüşür. Yukarıda, D köşegen matris ve $h = \mathrm{P}^{-1} g$ dir. Bu kez birinden bağımsız n tane homojen olmayan diferansiyel denklem integrasyonu ile karşı karşıyayız. Çözüm bileşenlerle yazıldığında

$$y_i = C_j e^{\lambda_j t} + e^{\lambda_j t} \int e^{-\lambda_j t} h_j(t)\, dt, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

bulunur.

Buna göre;

$$u_j(t) = e^{\lambda_j t} \int e^{-\lambda_j t} h_j(t)\, dt, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

tanımlanırsa, ilk denklemin çözümü $x = \mathrm{P} y$ dönüşümden

$$x = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\left(C_1 + u_j\right) \\ e^{\lambda_2 t}\left(C_2 + u_2\right) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}\left(C_n + u_n\right) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_j \left(C_j e^{\lambda_1 t} + u_j\right)$$

olur. Yukarıdaki toplamın birinci terimi homojen çözüme, diğeri ise özel çözüme karşı gelir :

$$x_h = \sum_{j=1}^{n} C_j v_j e^{\lambda_j t}, \qquad x_p = \sum_{j=1}^{n} v_j u_j$$

Bu çözümü sabitlerin değişimi yöntemiyle elde edilen çözümle karşılaştırın.

Örnek .

$$x_1' = -x_2 - x_3 + t + 2$$

$$x_2' = -x_1 - x_3 + t^2 + t$$

$$x_3' = -x_1 - x_2 - t^2 + 4t + 3$$

sisteminin $x(0) = 0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü bulunuz.

Bu örnekte

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} t+2 \\ t^2 + t \\ -t^2 + 4t + 3 \end{pmatrix}$$

dir. Önce homojen çözümü veya temel çözüm matrisini bulalım :

$$\left|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1, \ \lambda_3 = -2$$

özdeğerlerine karşı üç tane lineer bağımsız özvektör bulabiliriz. Yani, katsayılar matrisi köşegenleştirilebilir. $\lambda = 1$ için

$$(\mathrm{A}-\mathrm{I})v = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sisteminin çözüm tabanı

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

seçilebilir. $\lambda = 2$ için

$$(\mathrm{A}-2\mathrm{I})v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alabiliriz. Buna göre temel çözüm matrisi

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} & e^{-2t} \\ -e^{t} & 0 & e^{-2t} \\ 0 & -e^{t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

olacaktır. Aşağıdaki büyüklükleri hesaplamamız gerekir:

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t} & -2e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -2e^{-2t} \\ e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}g = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \left(5+3t+-3t^2\right)e^{-t} \\ \left(-4-6t+3t^2\right)e^{-t} \\ (5+6t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Özel çözüm :

$$x_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)g(t)\,dt = \Phi(t)\begin{pmatrix} e^{-t}\left(t^2+t-\frac{2}{3}\right) \\ e^{-t}\left(-t^2+\frac{4}{3}\right) \\ e^{-t}\left(t+\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t^2+1 \\ t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

ve genel çözüm :

$$x = \Phi(t)c + \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t^2 \\ t^2+t-1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Son olarak c keyfi sabit vektörünü belirlemek için $x(0)=0$ koşulunu kullanalım :

$$\Phi(0)c+\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad c=-\Phi^{-1}(0)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\-4/3\\-1/3\end{pmatrix}.$$

c vektörünü yukarıdaki genel çözümde yazarsak ;

$$x=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2e^{t}-e^{-2t}\\-2e^{-t}-e^{-2t}\\4e^{t}-e^{-2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2t+1\\-t^{2}+1\\t^{2}+t+-1\end{pmatrix}$$

çözümünü veya çözümün

$$x_1=-\frac{2}{3}e^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}+2t+1$$

$$x_2=-\frac{2}{3}e^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}-t^{2}+1$$

$$x_3=\frac{4}{3}e^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}4t^{2}+t+-1$$

bileşenlerini elde etmiş oluruz.

Örnek .

$$x_1'+2x_2'-7x_1+4x_2=e^{t}+4$$

$$3x_1'-x_2'+7x_1-9x_2=3e^{t}-2$$

sisteminin $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$ koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

Sistem normal biçimde verilmediği halde, basit bir kaç matris işlemi ile bu biçime indirgeyebiliriz. Bunun için sistemi önce

$$C=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}-7&4\\7&-9\end{pmatrix},\qquad f=\begin{pmatrix}e^{t}+4\\3e^{t}-2\end{pmatrix}$$

matrislerini tanımlayıp $Cx'+Dx=f$ vektör biçiminde yazalım. C tekil olmayan bir matristir. Verilen sistemin her iki yanını C^{-1} ile önden çarparsak

$$x'=\mathrm{A}x+g\,,\quad \mathrm{A}=-C^{-1}D\,,\quad g=C^{-1}f$$

normal biçimini elde ederiz. Bu örnekte

$$\mathrm{A}=-C^{-1}D=\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\end{pmatrix},\qquad g=C^{-1}f=\begin{pmatrix}e^{t}\\2\end{pmatrix}$$

dir. A matrisinin özdeğerleri reel ve birbirinden farklıdır:

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$ temel matris kolayca

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-5t} & e^{t} \\ 2e^{-5t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Sabitlerin değişimi yöntemi ile verilen koşulları sağlayan çözümün

$$x_1 = -\frac{23}{90}e^{-5t} + \frac{19}{18}e^{t} + \frac{2}{3}te^{t} - \frac{4}{5}$$

$$x_2 = -\frac{23}{45}e^{-5t} + \frac{8}{9}e^{t} + \frac{2}{3}te^{t} - \frac{2}{5}$$

şeklinde bulunacağını görmek, okuyucuya bırakılmıştır.

03.07 Alıştırma Problemleri ve Yanıtları

Aşağıdaki lineer homojen diferansiyel denklem sistemleri aynı zamanda birer normal sistem olup, bu sistemlerin aşikar çözümleri bilindiğine göre, başkaca çözümünün var olup olmadığını araştırınız ve genel çözümünü bulmaya çalışınız:

1) $$\begin{aligned} y'(x) &= 4y - 2z \\ z'(x) &= 4y \end{aligned}$$

Yanıt: $$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin 2x \\ z(x) &= C_1 e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x) + C_2 e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x'(t) &= -y \\ y'(t) &= 2y - 3x \end{aligned}$$

Yanıt: $$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y(t) &= C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t} \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x'(t) &= x + y \\ y'(t) &= y - z \\ z'(t) &= -2y \end{aligned}$$

Yanıt: $$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{2t} \\ y(t) &= -2C_1 e^{-t} + C_3 e^{2t} \\ z(t) &= -4C_1 e^{-t} - C_3 e^{2t} \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} s'(t) &= 4s - r \\ r'(t) &= 4s \end{aligned}$$

Yanıt: $$\begin{aligned} s(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 te^{2t} \\ r(t) &= 2C_1 e^{2t} + 2C_2(2t-1)e^{2t} \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} x'(t) &= 3y - 4z \\ y'(t) &= -z \\ z'(t) &= -2x + y \end{aligned}$$

Yanıt: $$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{-2t} + 5C_3 e^{3t} \\ y(t) &= C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t} \\ z(t) &= C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t} - 3C_3 e^{3t} \end{aligned}$$

4. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN KULLANILMASI

04.01. Giriş

Bu bölümde yine diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik olmak üzere farklı bir uygulama yapacağız. Bu kez Laplace dönüşümünü kullanarak çözümleri araştıracağız. Bu amaçla, dönüşüm unsurlarını kullanabilmek için yol ve yöntemler geliştireceğiz ve önereceğiz. Laplace dönüşümü hakkında okuyucumuzun yeterli bilgisi bulunduğu düşünülmektedir. Ancak yine de bu dönüşüm uygulaması hakkında başlangıçta temel bilgiler verilecektir. Böylece Laplace dönüşümü hakkında bir alt yapı oluşturulmasına çalışılacaktır. Görüyor ve anlıyoruz ki konular geliştikçe ve çeşitlendikçe, araç olarak kullandığımız konular hakkında yeterli bilgi sahibi olmanın zorunlu olduğu anlaşılıyor.

04.02. Dönüşüm Hakkında Bazı Tanım Ve Teoremler

Bir f (t) fonksiyonunun integral dönüşümü

$$T\left[f(t)\right] = F(s) = \int_a^b k(s,t) f(t) dt$$

olarak tanımlanır. Bu ifadedeki $k(s,t)$ fonksiyonuna *integral dönüşümün çekirdeği* denir. F(s) fonksiyonu verildiğinde f(t) ye *ters integral dönüşümü* denir ve T^{-1} [F(s)] ile gösterilir. Laplace dönüşümü integral dönüşümlerin ilk örneklerinden biridir. Çekirdek ve sınırlar

$$k(s,\ t) = e^{-st}\ ,\ \ a = 0,\ \ b = \infty$$

olarak tanımlanır. Diğer önemli bir integral dönüşüm

$$k(s,\ t) = e^{-ist}\ ,\ \ a = -\infty\ ,\ b = \infty$$

ile verilir. Bu tür dönüşüme *Fourier dönüşümü* denir ve diferansiyel denklemler kuramında önemli bir yer tutar. Ancak biz burada yalnızca Laplace dönüşümlerini kullanacağız.
$f,\ t > 0$ zaman değişkeninin tek-değerli bir fonksiyonu ve s bir (reel veya kompleks olabilir) parametre olsun. f (t) ‘nin Laplace dönüşümü

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

integrali ile tanımlanır. Buradaki integral Riemann anlamında öz-olmayan bir integraldir ve

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} f(t)dt$$

limiti anlaşılacaktır. Eğer integral yakınsak ise yani yukarıdaki limit sonlu bir sayı ise Laplace dönüşümü tanımlıdır; eğer değilse dönüşüm tanımlı olamaz.

Teorem :

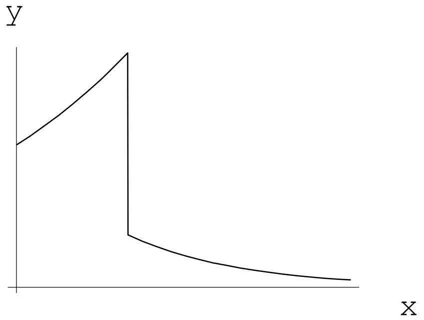
Bir T ≥ 0 için $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ veya $|e^{-\alpha t} f(t)| \leq M$, t $\geq$ T olacak biçimde M > 0 ve α sabitleri varsa $f(t)$ fonksiyonuna α üstel mertebedendir denir ve $f(t) = O(e^{\alpha t})$ yazılır. Polinomlar, üstel fonksiyonlar, sin t ve cos t trigonometrik fonksiyonları üstel mertebeden olduğu halde, $f(t) = e^{t^2}$ fonksiyonu üstel mertebeden değildir. Çünkü α ne kadar büyük seçilirse seçilsin

$$\lim_{t\to\infty} e^{t^2} e^{-\alpha t}$$

limiti süratle sonsuza gidecektir.

Teorem :

Eğer bir $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ limiti varsa ve f fonksiyonu [0, ∞) aralığında sonlu sayıda sıçrama süreksizliği dışında her sonlu (0, T) aralığında sürekli ise fonksiyona [0,∞) aralığında parça parça sürekli fonksiyondur denir.



Şekil 4.1. Sıçrama Süreksizliği

Parça parça sürekli bir fonksiyonu bir aralık üzerinde integre etmek için sürekli olduğu alt aralıklarda integre edip toplamak yeterli olacaktır. Parça parça sürekli bir fonksiyon integre edilebilir. Analizden bilinen bu sonucu kullanarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

04.03. Laplace Dönüşümü için Varlık Teoremi

Eğer $f(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında parça parça sürekli ve α üstel mertebeden ise, s > α için Laplace dönüşümü vardır ve mutlak yakınsar.

İspat : $f(t)$ fonksiyonu parça parça sürekli olduğundan [0, M) sonlu aralığı üzerinde sınırlı olur ve

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^{t_0} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st} f(t)dt$$

yazarak Laplace dönüşümünün yakınsaklığını yukarıdaki ikinci integralin yakınsaklığına indirgemiş oluyoruz. Varsayımdan f üstel mertebeden olduğundan

$$\left|\int_{t_0}^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_{t_0}^\infty e^{-st} \left|f(t)dt\right| \le M\int_{t_0}^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt \; = \lim_{T\to\infty} \frac{-M}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t}\Bigg|_{t_0}^{T}$$

yazılabilir ve integral ancak s > α için yakınsak olur.

Varlık teoremi bir yeter koşuldur. Yani teoremin varsayımları gerçeklendiğinde teorem Laplace dönüşümünün var olduğunu anlatmış olur. Ancak tersi doğru değildir yani gerek koşul değildir. Varsayımların gerçeklenmemesi durumunda Laplace dönüşümü var olabilir veya olmayabilir.

Örnek.

$t > 0$ ve negatif olmayan tamsayı n için $\mathcal{L}\left\{t^n\right\}$ dönüşümünün var olduğunu gösterin.

Herhangi bir α > 0 için $e^{\alpha t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha^n t^n}{n!} \ge \frac{t^n}{n!}$ eşitsizliği $t^n \le n!e^{\alpha t}$ olarak yazılabildiğinden t^n üstel mertebeden bir fonksiyondur, o halde Laplace dönüşümü vardır.

Örnek.

$\mathcal{L}\left\{t^n \sin at\right\}$ ve $\mathcal{L}\left\{t^n \cos at\right\}$ dönüşümlerinin var olduğunu gösterin.

$\mathcal{L}\left\{t^n \sin at\right\}$ ve $\left|\cos at\right| \le 1$ olduğundan verilen fonksiyonlar üstel mertebeden olur. Varlık teoreminden dönüşümlerin tanımlı olduğu çıkar.

04.04. Bazı Temel Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

~ f(t) = 1 $\Rightarrow$ $\mathcal{L}\{f(\mathrm{t})\}$ = ?

$$\mathcal{L}\{f(\mathrm{t})\} = \int_0^\infty e^{-st} f(\mathrm{t})\mathrm{dt} \Rightarrow \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{dt} = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\mathrm{dt}$$

$$\mathfrak{L}\{1\} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^R = -\frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}\left[e^{-sR} - e^{-0}\right] = -\frac{1}{s}[0-1] = \frac{1}{s}$$

$$\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s}\ ,\ \text{s} > 0$$

~ $f(\text{t}) = \text{t} \ \Rightarrow \ \mathfrak{L}\{f(\text{t})\} = ?$

$$\mathfrak{L}\{\text{t}\} = \int_0^\infty e^{-st}\text{tdt} \ = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\text{tdt} \ = \lim_{R\to\infty}\text{t}\left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^R \text{- } 1\left[\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^R$$

$$\mathfrak{L}\{\text{t}\} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sR}}{s^2} - \frac{\text{Re}^{-sR}}{s}\right] = \frac{1}{s^2}\ ,\ \text{s} > 0$$

~ $f(\text{t}) = \text{t}^2 \ \Rightarrow \ \mathfrak{L}\{f(\text{t})\} = ?$

$$\mathfrak{L}\{\text{t}^2\} = \int_0^\infty e^{-st}\text{t}^2\text{dt} \ = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}\text{t}^2\text{dt} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathfrak{L}\{\text{t}^2\} = \lim_{R\to\infty}\left[\text{t}^2\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_0^R + \int_0^R \frac{1}{s}e^{-st}2\text{tdt}\right]$$

$$\mathfrak{L}\{\text{t}^2\} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\text{t}^2}{s}e^{-st}\Bigg|_0^R + \frac{2}{s}\int_0^R e^{-st}\text{tdt}\right] = \lim_{R\to\infty}\left[\left(-\frac{R^2}{s}e^{-sR} + \frac{0}{s}e^{-s0}\right) + \frac{2}{s}\frac{1}{s^2}\right]$$

$$\mathfrak{L}\{\text{t}^2\} = -\frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}\left(R^2e^{-sR}\right) + \frac{2}{s^3} \ = -\frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^2}{e^{sR}}\right) + \frac{2}{s^3} \ = -\frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{2R}{se^{sR}}\right) + \frac{2}{s^3}$$

$$\mathfrak{L}\{\text{t}^2\} = -\frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{2}{s^2e^{sR}}\right) + \frac{2}{s^3} \ = \frac{2}{s^3}\ ,\ \text{s} > 0$$

$$\mathfrak{L}\{\text{t}^\text{n}\} = \frac{\text{n}!}{\text{s}^{\text{n}+1}}$$

~ $f(\text{t}) = (e^{at}) \ \Rightarrow \ \mathfrak{L}\{f(\text{t})\} = ?$

$$\mathfrak{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\text{dt} \ = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{t(-s+a)}\text{dt} \ = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{-s+a}e^{t(-s+a)}\right]_0^R$$

$$\mathfrak{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{a-s}\lim_{R\to\infty}\left[e^{R(-s+a)} - e^0\right] = \frac{1}{a-s}[0-1] = \frac{1}{s-a}\ ,\ \text{a} < \text{s}$$

~ $f(\text{t}) = (\sin \text{at}) \qquad \Rightarrow \ \mathfrak{L}\{f(\text{t})\} = ?$

$$\mathfrak{L}\{\sin \text{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}(\sin \text{at})\text{dt} \ = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}(\sin \text{at})\text{dt}$$

$$\mathfrak{L}\{\sin \text{at}\} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-st}\left[-s(\sin at) - a(\cos at)\right]}{s^2+a^2}\right]_0^R$$

$$\mathcal{L}\{\sin \mathrm{at}\} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{a}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sR}\left[-s(\sin aR)+a(\cos aR)\right]}{s^2+a^2}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\sin \mathrm{at}\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad , \mathrm{s} > 0$$

~ $f(\mathrm{t}) = (\cos \mathrm{at}) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{f(\mathrm{t})\} = ?$

$$\mathcal{L}\{\cos \mathrm{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cos \mathrm{at})\mathrm{dt} \;=\; \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}(\cos \mathrm{at})\mathrm{dt}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \mathrm{at}\} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-st}\left[-s(\cos at)+a(\sin at)\right]}{s^2+a^2}\right]_0^R$$

$$\mathcal{L}\{\cos \mathrm{at}\} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sR}\left[-s(\cos aR)-a(\sin aR)\right]}{s^2+a^2}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\cos \mathrm{at}\} = \frac{s}{s^2+a^2} \quad , \mathrm{s} > 0$$

~ $f(\mathrm{t}) = (\sinh \mathrm{at}) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{f(\mathrm{t})\} = ? \;\Rightarrow\; \sinh \mathrm{at} = \dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$

$$\mathcal{L}\{\sinh \mathrm{at}\} = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\} = \int_0^\infty e^{-st}(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2})\mathrm{dt}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh \mathrm{at}\} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{(-s+a)t} - \mathrm{e}^{(-s-a)t}\mathrm{dt} \;=\; \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{-s+a}e^{(-s+a)t} - \frac{1}{-s-a}e^{(-s-a)t}\right]_0^R$$

$$\mathcal{L}\{\sinh \mathrm{at}\} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left[\frac{\left(e^{(-s+a)R}-e^{-0}\right)}{-s+a} - \frac{\left(e^{(-s-a)t}-e^{-0}\right)}{-s-a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(0-1)}{-s+a} - \frac{(0-1)}{-s-a}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\sinh \mathrm{at}\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+a-s+a}{s^2-a^2}\right] = \frac{a}{s^2-a^2} \quad , \mathrm{s} > |a|$$

~ $f(\mathrm{t}) = (\cosh \mathrm{at}) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{f(\mathrm{t})\} = ? \;\Rightarrow\; \qquad \cosh \mathrm{at} = \dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}$

$$\mathcal{L}\{\cosh \mathrm{at}\} = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\} = \int_0^\infty e^{-st}(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2})\mathrm{dt}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh \mathrm{at}\} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{(-s+a)t} + \mathrm{e}^{(-s-a)t}\mathrm{dt} \;=\; \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{-s+a}e^{(-s+a)t} + \frac{1}{-s-a}e^{(-s-a)t}\right]_0^R$$

$$\mathcal{L}\{\cosh \mathrm{at}\} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left[\frac{\left(e^{(-s+a)R}-e^{-0}\right)}{-s+a} + \frac{\left(e^{(-s-a)t}-e^{-0}\right)}{-s-a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(0-1)}{-s+a} + \frac{(0-1)}{-s-a}\right]$$

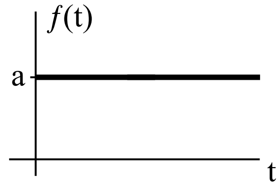
$$\mathcal{L}\{\cosh \mathrm{at}\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2}\right] = \frac{s}{s^2-a^2} \quad , \mathrm{s} > |a|$$

04.05. Bazı Özel Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

04.05.01. Basamak Fonksiyonu

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \Rightarrow \mathrm{t} < 0 \\ \mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{t} > 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{a\} = \int_0^{\infty} \mathrm{a}e^{-st}\mathrm{dt} \;\; = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{s}}$$

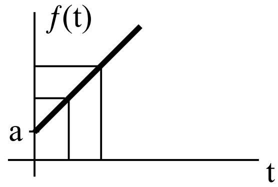


04.05.02. Rampa Fonksiyonu

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \Rightarrow \mathrm{t} < 0 \\ \mathrm{at} \Rightarrow \mathrm{t} > 0 \end{Bmatrix}$$

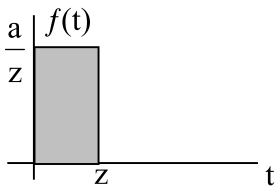
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{at\} = \mathrm{a}\int_0^{\infty} e^{-st}\mathrm{tdt}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathrm{a}\frac{1}{\mathrm{s}^2} \;\; = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{s}^2}$$



04.05.3. Darbe Fonksiyonu

$$f(t) = \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{z}} \Rightarrow 0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{z} \\ 0 \Rightarrow \mathrm{t} > \mathrm{z} \end{Bmatrix}$$



$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{z}}1(\mathrm{t})\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{z}}1(\mathrm{t\text{-}z})\right\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{z}} - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{z}}e^{-sz} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{z}}\left(1 - e^{-sz}\right)$$

04.06. Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri

04.06.01. Lineerlik Özelliği

c_1 ve c_2 sabit büyüklükler ve $f(t)$ ve $g(t)$ ise Laplace dönüşümleri, sırasıyla $F(s)$ ve $G(s)$ olan iki fonksiyon olsun.

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f(t)\} + c_2\mathcal{L}\{g(t)\} = c_1\, F(s) + c_2\, G(s)$$

dir. Gösterelim:

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left[c_1 f(t) + c_2 g(t)\right]dt = c_1\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + c_2\int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$$

$$= c_1 F(s) + c_2 G(s)$$

Örnek .

$\mathcal{L}\left\{8\cos4t - 11e^{3t} + 6\sinh 2t\right\} = ?$

$$\mathcal{L}\left\{8\cos4t - 11e^{3t} + 6\sinh 2t\right\} = \mathcal{L}\left\{8\cos4t\right\} - \mathcal{L}\left\{11e^{3t}\right\} + \mathcal{L}\left\{6\sinh 2t\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{8\cos4t - 11e^{3t} + 6\sinh 2t\right\} = 8\mathcal{L}\left\{8\cos4t\right\} - 11\mathcal{L}\left\{11e^{3t}\right\} + 6\mathcal{L}\left\{\sinh 2t\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{8\cos4t - 11e^{3t} + 6\sinh 2t\right\} = 8\frac{s}{s^2+16} - 11\frac{1}{s-3} + 6\frac{2}{s^2-4}$$

04.06.02. Birinci Kaydırma Özelliği

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$ dir. Gösterelim:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at} f(t))dt = \int_0^\infty e^{-t(s-a)} f(t)dt = F(s-a)$$

bulunur.

Örnek .

$\mathcal{L}\{e^{7t}\cos3t\} = ?$

$$\mathcal{L}\{\cos3t\} = \frac{s}{s^2+9} \quad , \quad s \to (s-7)$$

$$\mathcal{L}\{e^{7t}\cos3t\} = \frac{s-7}{(s-7)^2+9}$$

04.06.03 İkinci Kaydırma Özelliği

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ve $P(t) = \begin{Bmatrix} f(t-a) \Rightarrow t > a \\ 0 \quad \Rightarrow t < a \end{Bmatrix}$ ise $\mathcal{L}\{P(t)\} = e^{-as}F(s)$ dir. Gösterelim:

$$\mathcal{L}\{P(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}P(t)dt = \int_0^a e^{-st}P(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}P(t)dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}.0dt + \int_a^\infty e^{-st}P(t)dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}P(t)dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt \quad \begin{bmatrix} t-a=u \\ dt=du \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(a+u)} f(u)du = e^{-as}\int_0^\infty e^{-su} f(u)du \quad = e^{-as}F(s)$$

olur.

Örnek .

$$P(t) = \begin{Bmatrix} \cos(t-\frac{2\pi}{3}) & \Rightarrow t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \Rightarrow t < \frac{2\pi}{3} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{P(t)\} = ?$$

$f(\text{t}) = \cos \text{t} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{f(\text{t})\} = \dfrac{s}{s^2+1}$

$\mathcal{L}\{\text{P(t)}\} = e^{-as}\,\text{F(s)} = e^{-\frac{2\pi}{3}\text{s}} \dfrac{s}{s^2+1}$

olur.

04.06.04. Skala Değiştirme Özelliği

$\mathcal{L}\{f(\text{t})\} = F(\text{s})$ ise $\mathcal{L}\{f(\text{at})\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$ dir. Gösterelim:

$$\mathcal{L}\{f(\text{at})\} = \int_0^\infty e^{-st}\left\{f(at)\right\}dt = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt \quad \begin{bmatrix} at=u \\ dt=\dfrac{du}{a} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

Örnek .

$\mathcal{L}\{5\text{t}\} = ?$

$$\mathcal{L}\{\text{t}\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{5\text{t}\} = \frac{1}{5}\frac{1}{\left(\frac{s}{5}\right)^2} = \frac{5}{s^2}$$

Örnek .

$\mathcal{L}\{\sin(5\text{t})\} = ?$

$$\mathcal{L}\{\sin \text{t}\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(5\text{t})\} = \frac{1}{5}\frac{1}{\left(s/5\right)^2+1} = \frac{5}{s^2+25}$$

04.06.05. Türetilmiş Fonksiyonların Laplace Dönüşümü

$\mathcal{L}\{f(\text{t})\} = F(\text{s})$ ise

$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \text{s}F(\text{s}) - f(0)$

$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2F(\text{s}) - \text{s}f(0) - f'(0)$ dir. Gösterelim:

a) $\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \quad \begin{bmatrix} u=e^{-st}, du=-se^{-st}dt \\ dv=f'(t)dt, v=f(t) \end{bmatrix}$

$$= e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$= 0 - e^{-s.0}f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0)$$

b) $\mathfrak{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt \qquad \begin{bmatrix} u=e^{-st}, du=-se^{-st}dt \\ dv=f''(t)dt, v=f'(t) \end{bmatrix}$

$$= e^{-st} f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

$$= 0 - e^{-s.0} f'(0) + s\mathfrak{L}\{f'(t)\}$$

$$= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Burada bulduğumuz sonuçlar daha yüksek mertebeden türevlere kolayca genelleştirilebilir.

$$\mathfrak{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - .... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

olduğu gösterilebilir.

Örnek .

f(t) = sin t olsun.

$\mathfrak{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ ve $(\sin t)' = \cos t$ ve $f(0) = \sin 0 = 0$ olup

$\mathfrak{L}\left\{(\sin t)'\right\} = \mathfrak{L}\{\cos t\} = s\dfrac{1}{s^2+1} - \sin 0 = \dfrac{s}{s^2+1}$ dir.

Örnek .

f(t) = e^{at} olsun.

$\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$ ve $\left(e^{at}\right)' = ae^{at}$ ve $F(0) = e^{a.0} = 1$ olup

$\mathfrak{L}\left\{\left(e^{at}\right)'\right\} = \mathfrak{L}\left\{ae^{at}\right\} = s\dfrac{1}{s-a} - e^{a.0} = \dfrac{s-s+a}{s-a} = \dfrac{a}{s-a}$ dir.

Örnek .

$\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise $\mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$ dir. Gösterelim:

$g(t) = \int_0^t f(u)du$ olsun. $g'(t) = f(t)$ ve $g(t) = 0$ dır.

Her iki yanın Laplace dönüşümünü alalım :

$\mathfrak{L}\{g'(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\} \Rightarrow sG(s) - g(0) = F(s) \Rightarrow G(s) = \dfrac{F(s)}{s}$ bulunur.

$f(t) = \sin t$ olsun. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ ve

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin u du\right\} = \mathcal{L}\{1-\cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s\left(s^2+1\right)} \quad = \frac{\frac{1}{s^2+1}}{s} = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}\ \{\sin t\}$$

olur.

04. 07. $t^n f(t)$ Nin Laplace Dönüşümünün Bulunması

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = \left(-1\right)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \tag{1}$$

dir. Gösterelim:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

dir. (1) in her iki yanını s ye göre türetelim :

$$F'(s) = \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[-tf(t)\right]dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\} \tag{2}$$

dir. (2) ‘nin her iki yanını s ‘ye göre türetelim :

$$F''(s) = \int_0^\infty -te^{-st}\left[-tf(t)\right]dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[\left(-1\right)^2 t^2 f(t)\right]dt = \mathcal{L}\left\{\left(-1\right)^2 t^2 f(t)\right\}$$

s ye göre türev alma işlemi sürdürülürse;

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(-1\right)^n t^2 f(t)\right\}$$

ve her iki yan $\left(-1\right)^n$ ile çarpılırsa;

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = \left(-1\right)^n F^{(n)}(s)$$

bulunur.

Örnek .

$\mathcal{L}$\{tsin3t\} = ?

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+9} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t\sin 3t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = 2\frac{3s}{\left(s^2+9\right)^2} = \frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}$$

Örnek .

$\mathcal{L}\{\frac{\sin t}{t}\} = ?$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\frac{\sin t}{t}\} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1} du$$

$$\mathcal{L}\{\frac{\sin t}{t}\} = \tan^{-1}u\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Örnek .

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ve $r > 0$ olsun. $\mathcal{L}\{r^t f(t)\} = F(s - \ln r)$ olduğunu gösterelim :

$$\mathcal{L}\{r^t f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[r^t f(t)\right]dt = \int_0^\infty e^{-st} r^t f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} e^{t\ln r} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-t(s-\ln r)} f(t)dt = F(s - \ln r) \text{ bulunur.}$$

04.08. Periyodik Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

$f(t)$, T periyoduna sahip bir periyodik fonksiyon olsun. $f(t)$ 'nin tanımlı olduğu aralık üzerinde yer alan her t için $f(t+T) = f(t)$ ilişkisi gerçeklensin.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

dir. Gösterelim:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)dt + ...$$

yazalım ve son satırda yer alan integrallerden ikincisinde $t = T + u$,üçüncüsünde $t = 2T + u$ olsun ve değişken dönüşümünü yapalım ve sonrasında

$$f(u+T) = f(u), \quad f(u+2T) = f(u), \quad .....$$

ilişkilerini dikkate alalım :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_0^T e^{-s(u+T)} f(u+T)du + \int_0^T e^{-s(u+2T)} f(u+2T)du + ...$$

$$= \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT}\int_0^T e^{-su} f(u)du + e^{-2sT}\int_0^T e^{-su} f(u)du + ...$$

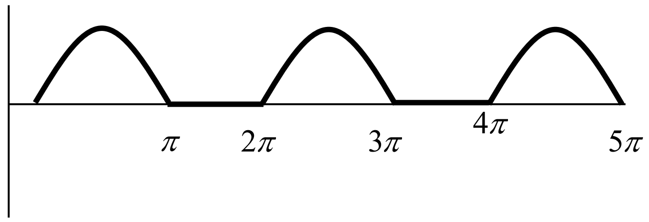
$$= \left[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + ...\right]\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$= \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

bulunur.

Örnek .

a) $f(t) = \begin{Bmatrix} \sin t & \Rightarrow 0 < t < \pi \\ 0 & \Rightarrow \pi < t < 2\pi \end{Bmatrix}$ ve $f(t) = f(t + 2\pi)$ dir. $\mathcal{L}\{f(t)\}$ yi bulalım.



$$\mathcal{L}\{f(\text{t})\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(\text{t})\text{dt}}{1-e^{-sT}} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\int_0^{\pi} e^{-st}\text{sintdt}+\int_{\pi}^{2\pi} e^{-st}\,0\text{dt}\right]$$

$$\mathcal{L}\{f(\text{t})\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{e^{-st}\left(-s\sin t-\cos t\right)}{s^2+1}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$\mathcal{L}\{f(\text{t})\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left(\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\right) = \frac{1}{\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}$$

b) $f(\text{t}) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{\text{a}}\text{t} & , \quad 0 \le \text{t} \le a \\ -\frac{1}{\text{a}}\text{t}+2 & , \quad a \le \text{t} \le 2\text{a} \end{array}\right\}$, $\quad f(t) = f(t+2a)$ ile belirlenen ve üçgen dalga fonksiyonu olarak isimlendirilen fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{L}\{f(\text{t})\} = \frac{1}{1-e^{-2as}}\int_0^{2a} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\int_0^{a} e^{-st}\frac{t}{a}dt + \int_{a}^{2a} e^{-st}\left(-\frac{1}{a}t+2\right)dt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\left(-\frac{1}{s}e^{-as} - \frac{1}{as^2}e^{-as} + \frac{1}{as^2}\right) + \left(\frac{1}{s}e^{-as} + \frac{1}{as^2}e^{-2as} - \frac{1}{as^2}e^{-as}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}}\frac{1}{as^2}\left(e^{-2as} - 2e^{-as} + 1\right) = \frac{1}{1-e^{-2as}}\frac{1}{as^2}\left(1-e^{-as}\right)^2$$

$$= \frac{1}{as^2}\frac{1}{\left(1-e^{-as}\right)\left(1+e^{-as}\right)}\left(1-e^{-as}\right)^2 = \frac{1}{as^2}\frac{1}{1+e^{-as}}\left(1-e^{-as}\right)$$

$$= \frac{1}{as^2}\frac{e^{as/2}-e^{-as/2}}{e^{as/2}+e^{-as/2}} = \frac{1}{as^2}\tanh\frac{as}{2}$$

c) $f(t)=\dfrac{t}{a}$, $0\le t<$ a , $f(t+a)=f(t)$ ile belirlenen ve testere dişi dalga fonksiyonu olarak isimlendirilen fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{L}\{f(\mathrm{t})\}=\frac{1}{1-e^{-as}}\int_0^a e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-as}}\int_0^a e^{-st}\frac{t}{a}dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-as}}\left(-\frac{1}{s}e^{-as}-\frac{1}{as^2}e^{-as}+\frac{1}{as^2}\right)$$

$$=\frac{1}{1-e^{-as}}\left[\frac{1}{as^2}\left(1-e^{-as}\right)-\frac{1}{s}e^{-as}\right]=\frac{1}{as^2}-\frac{1}{s\left(1-e^{-as}\right)}e^{-as}$$

d) $f(\mathrm{t})=\begin{Bmatrix} 1 & , & 0<\mathrm{t}<a \\ -1 & , & a<\mathrm{t}<2\mathrm{a} \end{Bmatrix}$, $f(t)=f(t+2a)$ ile belirlenen ve kare dalga fonksiyonu olarak isimlendirilen fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{L}\{f(\mathrm{t})\}=\frac{1}{1-e^{-2as}}\int_0^{2a} e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\int_0^a e^{-st}(1)dt+\int_a^{2a} e^{-st}(-1)dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2as}}\left[\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-as}\right)+\left(-\frac{1}{s}e^{-as}+\frac{1}{s}e^{-2as}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{s\left(1-e^{-2as}\right)}\left(1-2e^{-as}+e^{-2as}\right)$$

$$=\frac{1}{s}\frac{e^{as/2}-e^{-as/2}}{e^{as/2}+e^{-as/2}}=\frac{1}{s}\tanh\frac{as}{2}$$

04.09. Başlangıç Ve Son Değer Teoremleri

04.09.01. Başlangıç Değer Teoremi

Limitlerin mevcut olması durumunda

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

dir. Gösterelim:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=sF(s)-f(0) \qquad (1)$$

dir. (1) de $s\to\infty$ için limit alalım. $f'(t)$ nin üstel mertebeden olması durumunda $\lim_{s\to\infty} e^{-st}f'(t)=0$ dır, dolayısıyla $f(t)$ nin sürekli olması durumunda

$$\lim_{s\to\infty} sF(s)-f(0)=0 \;\Rightarrow\; \lim_{s\to\infty} sF(s)=f(0)=\lim_{t\to 0} f(t) \text{ olur.}$$

Örnek .

f(t) = cos t olsun. $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$ olup $\lim\limits_{t\to 0}\cos t=\lim\limits_{s\to\infty} s\dfrac{s}{s^2+1}=1$

olur.

Örnek .

f(t) = sin t olsun. $F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$ olup $\lim\limits_{t\to 0}\sin t=\lim\limits_{s\to\infty} s\dfrac{1}{s^2+1}=0$

olur.

04.09.02. Son Değer Teoremi

Limitlerin mevcut olması durumunda

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

dir. Gösterelim:

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=sF(s)-f(0)$$

dır. Her iki yanın $s\to 0$ için limitini alalım :

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0)\right],$$

$$\int_0^\infty \lim_{s\to 0} e^{-st}f'(t)dt=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0)\right],$$

$$\int_0^\infty f'(t)dt=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0)\right],$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t)-f(0)=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0)\right],$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s) \quad \text{bulunur.}$$

Örnek .

f(t) = cos t olsun. $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$ ‘dir. Fakat $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\cos t$ mevcut olmayıp son değer teoremi uygulanamaz.

Örnek .

$f(\mathrm{t}) = e^{-t}$ olsun. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ olup $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = \lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{1}{s+1} = 0$ dır.

Örnek .

$f(t) = 7e^{-2t}$ $f(t)$ 'nin başlangıç ve son değerlerini bulunuz.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{7}{s+2}$$

Başlangıç değer teoremiyle ;

$$\lim_{t\to 0} 7e^{-2t} = \lim_{s\to\infty} s\frac{7}{s+2} \quad \to \quad 7 = 7$$

Son değer teoremiyle ; $\lim\limits_{t\to\infty} 7e^{-2t} = \lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{7}{s+2} \to \quad 0 = 0$

Örnek .

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}\right\} = ?$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3} \quad , \quad \mathcal{L}\{e^{-5t}\} = \frac{1}{s+5}$$

$$\mathcal{L}\{f(\mathrm{t})\} = \mathrm{F(s)} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{\frac{f(\mathrm{t})}{\mathrm{t}}\} = \int_0^\infty f(\mathrm{u})\mathrm{du}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}}{t}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-5t}}{t}\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{\mathrm{u}+3}\mathrm{du} - \int_s^\infty \frac{1}{\mathrm{u}+5}\mathrm{du} = \lim_{R\to\infty}\int_s^R \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}+3} - \lim_{R\to\infty}\int_s^R \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}+5}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}\right\} = \lim_{R\to\infty} \ln|\mathrm{u}+3| \Big|_s^R - \lim_{R\to\infty} \ln|\mathrm{u}+5| \Big|_s^R$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}\right\} = \lim_{R\to\infty}\left[\ln|\mathrm{R}+3| - \ln|\mathrm{s}+3| - \ln|\mathrm{R}+5| + \ln|\mathrm{s}+5|\right] =$$

$$\lim_{R\to\infty}\left[\ln\left|\frac{\mathrm{R}+3}{\mathrm{R}+5}\right| - \ln\left|\frac{\mathrm{s}+5}{\mathrm{s}+3}\right|\right]$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}\right\} = \ln|1| + \ln\left|\frac{\mathrm{s}+5}{\mathrm{s}+3}\right| = \ln\left|\frac{\mathrm{s}+5}{\mathrm{s}+3}\right|$$

Tablo 4.1. Laplace dönüşüm tablosu

***f*(t)**	**F(s) = $\mathcal{L}\{f(t)\}$**
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
Sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$
Cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$
Sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$
Cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{at} f(t)$	F(s – a)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(F(s))$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_0^\infty f(u)du$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f^n(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}F(0) \ldots - F^{n-1}(0)$

04. 10. Ters Laplace Dönüşümü

04.10.01. Tanım

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ olsun. Başka bir deyişle $F(s)$ nin, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ile gösterilen ters Laplace döünüşümü , $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ özelliğine sahip bir $f(t)$ fonksiyonudur. $f(t)$ ye $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü denir ve $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ile ifade edilir.

04.10.02. Learch Teoremi

Her sonlu $0 \le t \le N$ aralığında parça parça sürekli ve $t < N$ için üstel mertebeden olan $f(t)$ fonksiyonları için $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümü tek türlü olarak belirlenir. Diğer bir deyişle $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ tektir.

04.11. Ters Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri

04.11.01. Lineerlik Özelliği

c_1 ve c_2 sabit büyüklükler ve $F(s)$ ve $G(s)$ ise ters Laplace dönüşümleri, sırasıyla, $f(t)$ ve $g(t)$ olan iki fonksiyon olsun.

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F(s)+c_2G(s)\}=c_1\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}+c_2\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=c_1\,f(t)+c_2\,g(t) \quad \text{dir.}$$

Örnek .

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}+\frac{2s}{s^2+6}-\frac{3}{s^2+9}\right\}=?$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}+\frac{2s}{s^2+6}-\frac{3}{s^2+9}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+6}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$
$$=3e^{2t}+2\cos 4t-\sin 3t$$

04.11.02.Birinci Kaydırma Özelliği

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t) \quad \text{ise} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t) \quad \text{dir.}$$

Örnek .

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\sin 2t$ olup

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-4s+8}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{\{s-2\}^2+2^2}\right\}=e^{2t}\sin 2t \quad \text{dir.}$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}=\cos 3t$ olup

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+10}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+3^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+3^2}\right\}$$
$$=e^t\cos 3t+\frac{1}{3}e^t\sin 3t \quad \text{dir.}$$

04.11.03. İkinci Kaydırma Özelliği

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t) \quad \text{ise} \quad \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=\begin{cases} f(\mathrm{t-a}) \Rightarrow \mathrm{t>a} \\ 0 \qquad\;\; \Rightarrow \mathrm{t<a}\end{cases} \quad \text{dir.}$$

Örnek .

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\}=\sin 4t$ olup $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4e^{-5s}}{s^2+16}\right\}=\begin{cases}\sin 4(\mathrm{t-5}) & , \mathrm{t>5} \\ 0 & , \mathrm{t<5}\end{cases}$ ‘dir.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}s}{s^2+1}\right\}=\begin{cases}\cos(\mathrm{t}-\pi) & , \quad \mathrm{t}>\pi \\ 0 & , \quad \mathrm{t}<\pi\end{cases}$ ‘dir.

04.11.04. Skala Değiştirme Özelliği

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ ise $\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\}=\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$ dir.

04.12.05. Türetilmiş Fonksiyonların Ters Laplace Dönüşümü

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ ise $\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}=(-1)^n t^n f(t)$ dir.

Örnek .

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\}=e^t$ olup

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-1)^2}\right\}=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}=-(-1)^1te^t=te^t \quad \text{dir.}$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ olup

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\}=(-1)^1 t\sin t \quad \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\frac{1}{2}t\sin 2t \quad \text{dir.}$$

Örnek .

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}=?$$

$F(s)=\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$ fonksiyonunun türevinin ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}\right\}=2(\cos t-1)$$

ile $\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}=-tf(t)$ bağıntısı $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\dfrac{2(1-\cos t)}{t}$ bulunur.

Örnek .

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-2as+a^2+b^2}\right\}=?$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-2as+a^2+b^2}\right\}=\frac{s+1}{s^2-2as+a^2+b^2}=\frac{(s-a)+a+1}{(s-a)^2+b^2}$$

yazılır ve ters dönüşümün lineerliği kullanılırsa;

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-2as+a^2+b^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}+$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a+1}{(s-a)^2+b^2}\right\}=e^{at}\left[\cos bt+\frac{a+1}{b}\sin bt\right]$$ bulunur.

04.12. Konvolüsyon Teoremi

$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)$ ise $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\}=F(s)G(s)$ dir. Bir başka deyişle

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(u)g(t-u)du$$

dir. Gösterelim:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\}dt=\int_{u=0}^\infty f(u)\left\{\int_{t=u}^\infty e^{-st}g(t-u)dt\right\}du$$

İçteki integralde $t-u=v$ değişken dönüşümü yapalım:

$$=\int_{u=0}^\infty f(u)\left\{\int_{v=0}^\infty e^{-s(u+v)}g(v)dv\right\}du$$

$$=\int_{u=0}^\infty e^{-su}f(u)du\int_{v=0}^\infty e^{-sv}g(v)dv=F(s)G(s)$$

olur.

Örnek .

Konvolüsyon teoremini kullanarak ve

a) $f(u)=\sin 3u$, $g(u)=u$ seçimini yaparak

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u)\sin 3u du\right\}=\frac{1}{s^2}\frac{3}{s^2+3^2}$$

b) $f(u)=\sin u$, $g(u)=e^{-u}$ seçimini yaparak

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-(t-u)}\sin u du\right\}=\frac{1}{s+1}\frac{1}{s^2+1}$$

c) $f(u)=e^u$, $g(u)=u^3$ seçimini yaparak

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u)^3 e^u du\right\}=\frac{3!}{s^4}\frac{1}{s-1}$$

bulunur.

Örnek .

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$ bulalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+4\right)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+4}\right\} \text{ yazalım.}$$

$$F(s)=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad f(t)=1,$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2+4} \quad \Rightarrow \quad g(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+4}\right\}=\int_0^t 1.\frac{1}{2}\sin 2u du=\frac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right) \qquad \text{bulunur.}$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-1\right)^2}\right\}$ yi bulalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-1\right)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\frac{1}{s-1}\right\} \text{ yazalım.}$$

$$F(s)=\frac{1}{s-1} \Rightarrow f(t)=e^t, \quad G(s)=\frac{1}{s-1} \Rightarrow g(t)=e^t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\frac{1}{s-1}\right\}=\int_0^t e^u e^{t-u} du=te^t \qquad \text{bulunur.}$$

Örnek .

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\}$ yi bulalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\}=\frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)}\frac{a}{\left(s^2+a^2\right)}\right\} \text{ yazalım.}$$

$$F(s)=\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)} \quad \Rightarrow \quad f(t)=\cos at,$$

$$G(s)=\frac{a}{\left(s^2+a^2\right)} \quad \Rightarrow \quad g(t)=\sin at$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\}=\frac{1}{a}\int_0^t \cos au \sin a(t-u) du=\frac{t\sin at}{2a} \qquad \text{olur.}$$

04.13. Laplace Dönüşümünün Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Kullanılması

Buraya kadar Laplace dönüşümü ve Ters Laplace dönüşümüne ilişkin bazı önemli ve temel özellikleri ve yöntemleri gördük. Uygulama olarak Laplace dönüşümü tekniğini öncelikle sabit katsayılı lineer başlangıç değer problemlerinin çözümü için kullanacağız. Bu uygulama esas olarak birkaç adımdan oluşur:

1.Adım: Diferansiyel denklemin her iki tarafının da Laplace dönüşümü alınır. Sonuç Y(s) bilinmeyen fonksiyonunun dönüşümünü içeren cebirsel bir denklemdir.

2. Adım : Cebirsel denklem çözülür, böylece 2. cebirsel denklem de çözülür ; böylece Y(s) bulunur.

3.Adım : Ters dönüşüm alınarak, diferansiyel denklemin aynı zamanda başlangıç koşullarını sağlayan çözümüne varılır. Yani

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ bulunur.

Örnek .

$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4e^{2t}$ denklemi için; $Y(0) = -3$ ve $Y'(0) = 5$ olduğuna göre diferansiyel denklemin Laplace dönüşümlerini kullanarak çözümünü bulun.

Başlangıç koşullarını dikkate alarak diferansiyel denklemin her iki yanının Laplace dönüşümünü alalım :

$$\mathcal{L}\{Y''(t)\} - 3\mathcal{L}\{Y'(t)\} + 2\{Y(t)\} = 4\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$\mathcal{L}\{Y''\} = s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{Y'\} = sy(s) - Y(0)$$

$$\mathcal{L}\{Y\} = y(s) \rightarrow \quad \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$$

$$s^2 y(s) - s\underbrace{Y(0)}_{-3} - \underbrace{Y'(0)}_{5} - 3\big(sy(s) - Y(0)\big) + 2y(s) = 4\frac{1}{s-2}$$

Denklemi düzenleyip $y(s)$ yi çözelim :

$$s^2 y(s) - 3s - 5 - 3sy(s) - 9 + 2y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$s^2 y(s) - 3sy(s) + 2y(s) = \frac{4}{s-2} - 3s + 14$$

$$\left(s^2 - 3s + 2\right) y(s) = \frac{4 - 3s^2 + 6s + 14s - 28}{s-2}$$

104

$$y(s) = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-2)\left(s^2 - 3s + 2\right)}$$

Ters dönüşümle $Y(t)$ yi bulalım :

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-2)^2(s-1)}\right\}$$

$$\mathrm{Y(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s-1)}\right\}$$

$$\frac{-3s^2+20s-24}{\left(s-2\right)^2\left(s-1\right)}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{(s-1)}$$

$$-3s^2+20s-24=A\left(s-2\right)\left(s-1\right)+B\left(s-1\right)+C\left(s-2\right)^2$$

$s = 2 \Rightarrow -12 + 40 - 24 = 0 + B + 0 \Rightarrow B = 4$

$s = 1 \Rightarrow -3 + 20 - 24 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = -7$

$s = 0 \Rightarrow 0 + 0 - 24 = 2A - B + 4C$

$-24 = 2A - 4 - 28 \Rightarrow A = 4$

$$Y(t) = 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} - 7\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$Y(t) = 4e^{2t} + 4te^{2t} - 7e^{t}$

Örnek .

$Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2e^t$ denklemi için ; $Y'(0) = 0$ ve $Y''(0) = -2$ olduğuna göre diferansiyel denklemin Laplace dönüşümlerini kullanarak çözümünü bulalım :.

$$\mathcal{L}\left\{Y'''\right\}-3\mathcal{L}\left\{Y''\right\}+3\mathcal{L}\left\{Y'\right\}-\mathcal{L}\left\{Y\right\}=\mathcal{L}\left\{t^2e^t\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{Y'''\right\}=s^3y(s)-s^2Y(0)-sY'(0)-Y''(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{Y''\right\}=s^2y(s)-sY(0)-Y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{Y'\right\}=sy(s)-Y(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{Y\right\}=y(s)$$

$$s^3y(s)-s^2Y(0)-sY'(0)-Y''(0)-3\left\{s^2y(s)-sY(0)-Y'(0)\right\}$$

$$+3\left\{sy(s)-Y(0)\right\}-y(s)=\frac{2}{\left(s-1\right)^3}$$

$$\left(s^3-3s^2+3s-1\right)y(s)-s^2+3s-1=\frac{2}{\left(s-1\right)^3}$$

$$y(s)=\frac{s^2-3s+1}{\left(s-1\right)^3}+\frac{2}{\left(s-1\right)^6}$$

$$=\frac{s^2-2s+1-s}{\left(s-1\right)^3}+\frac{2}{\left(s-1\right)^6}$$

$$=\frac{\left(s-1\right)^2-\left(s-1\right)-1}{\left(s-1\right)^3}+\frac{2}{\left(s-1\right)^6}$$

$$=\frac{1}{\left(s-1\right)}-\frac{1}{\left(s-1\right)^2}-\frac{1}{\left(s-1\right)^3}+\frac{2}{\left(s-1\right)^6}$$

$$\text{Y (t)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} -$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^6}\right\}$$

$$\text{Y (t)} = e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60}$$

Örnek .
Y^{1V} + 2 Y′ + Y = 0 denklemi için; Y(0) = Y′(0) = Y′′′(0) = 0 ve Y″(0) = 1 olduğuna göre diferansiyel denklemin Laplace dönüşümlerini kullanarak çözümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}\left\{Y^{IV}\right\} + 2\mathcal{L}\left\{Y'\right\} + \mathcal{L}\left\{Y\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\}$$

$$\left\{s^4y(s) - s^3\underbrace{Y(0)}_{0} - s^2\underbrace{Y'(0)}_{0} - s\underbrace{Y''(0)}_{1} - \underbrace{Y'''(0)}_{0}\right\} + \left\{s^2y(s) - s\underbrace{Y(0)}_{0} - \underbrace{Y'(0)}_{0}\right\} + y(s) = 0$$

$$s^4y(s) - s + 2s^2y(s) + y(s) = 0$$

$$s^4y(s) + 2s^2y(s) + y(s) = s$$

$$\left(s^4 + 2s^2 + 1\right)y(s) = s$$

$$y(s) = \frac{s}{\left(s^4 + 2s^2 + 1\right)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{y(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$$

Buradan itibaren konvolüsyon yöntemi kullanılırsa :

$$F(s) = \frac{s}{\left(s^2+1\right)} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \cos t\,, \quad G(s) = \frac{1}{\left(s^2+1\right)} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \sin t$$

$$\text{Y(t)} = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

$$= \int_0^t \cos u \sin(t-u)du = \int_0^t \cos u\left(\sin t\cos u - \cos t\sin u\right)du$$

$$= \sin t\int_0^t \cos^2 u du - \cos t\int_0^t \cos u\sin u du$$

$$= \sin t\int_0^t \frac{1+2\cos 2u}{2}du - \cos t\int_0^t \frac{\sin 2u}{2}du$$

$$= \frac{\sin t}{2}\left\{u + \frac{\sin 2u}{2}\right\}\Bigg|_0^t - \frac{\cos t}{2}\left\{-\frac{\cos 2u}{2}\right\}\Bigg|_0^t$$

$$=\frac{t\sin t}{2}+\frac{\sin t\sin 2t}{4}+\frac{\cos t\cos 2t}{4}-\frac{\cos t}{4}$$
$$=\frac{t\sin t}{2}+\frac{1}{4}\{\cos(2t-t)\}-\frac{\cos t}{4}\;=\frac{t\sin t}{2}.$$

04.14. Laplace Dönüşümünün Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümünde Kullanılması

Burada birinci dereceden lineer denklem sisteminin çözümünü Laplace dönüşümü tekniğiyle yapacağız. Bu uygulama aşağıdaki adımlardan oluşur:

1.Adım: Her iki denkleme de Laplace dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulları eklenirse denklem sistemi X(s) ve Y(s) den oluşan iki bilinmeyenli lineer cebirsel denklem haline getirilir.

2. Adım: 1. adımda elde edilen lineer sistemden X(s) ve Y(s) çekilir.

3. Adım: Verilen başlangıç değer probleminin çözümü olan

$$x(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} \quad \text{ve} \quad y(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek .
X(0) = 8 ve Y(0) = 3 başlangıç koşulları altında,

X′ = 2X – 3Y
Y′ = Y – 2X

diferansiyel denklem sistemini Laplace dönüşümlerini kullanarak çözelim.

Başlangıç koşullarını dikkate alarak denklem sisteminin her iki yanının Laplace dönüşümünü alalım :

$$\begin{cases}\mathfrak{L}\{X'\}=2\mathfrak{L}\{X\}-3\mathfrak{L}\{Y\}\\ \mathfrak{L}\{Y'\}=\mathfrak{L}\{Y\}-2\mathfrak{L}\{X\}\end{cases}$$
$$\begin{bmatrix}[sx(s)-\underbrace{X(0)}_{8}]=2X(s)-3y(s)\\ [sy(s)-\underbrace{Y(0)}_{3}]=y(s)-2x(s)\end{bmatrix}$$

Bu iki denklemi düzenlersek;

$$\begin{bmatrix}[sx(s)-8]=2x(s)-3y(s)\\ [sy(s)-3]=y(s)-2x(s)\end{bmatrix}$$

Bu denklem sisteminden $x(s)$ ve $y(s)$ yi çözelim:

$$\begin{matrix}(s-1)\\(-3)\end{matrix}\begin{bmatrix}(s-2)x(s)+3y(s)=8\\ 2x(s)+(s-1)y(s)=3\end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{r}
(s-1)(s-2)x(s)+\cancel{3(s-1)}y(s)=8(s-1)\\
-6x(s)\cancel{-3(s-1)}y(s)=-9\\
\hline
\left(s^2-3s+2-6\right)x(s)=8s-8-9
\end{array}
$$

$$\boxed{x(s)=\frac{8s-17}{(s-4)(s+1)}}$$

$$2\frac{8s-17}{(s-4)(s+1)}+(s-1)y(s)=3$$

$$\left(s-1\right)y(s)=3-\frac{16s-34}{s^2-3s-4}$$

$$y(s)=\frac{3s^2-9s-12-16s+34}{(s-4)(s+1)(s-1)}$$

$$y(s)=\frac{(3s-22)\cancel{(s-1)}}{(s-4)(+1)\cancel{(s-1)}}=\frac{3s-22}{(s-4)(s+1)}$$

$$\boxed{y(s)=\frac{3s-22}{(s-4)(s+1)}}$$

ve ters dönüşümle $X(t)$ ve $Y(t)$ yi bulalım :

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}^{-1}\left\{x(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8\text{s}-17}{(s-4)(s+1)}\right\}\\[2ex]
\mathcal{L}^{-1}\left\{y(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-22}{(s-4)(s+1)}\right\}
\end{cases}
$$

$$\text{X(t)} = \text{A}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(\text{s}-4)}\right\}+\text{B}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}$$

$$\text{Y(t)} = \text{C}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)}\right\}+\text{D}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}$$

$s = 4 \;\Rightarrow\qquad \text{A} = \dfrac{32-17}{4+1}=\dfrac{15}{5}=3$

$s = \text{-}1 \;\Rightarrow\qquad \text{B} = \dfrac{-8-17}{-1-4}=\dfrac{-25}{-5}=5$

$$s = 4 \;\Rightarrow\quad C = \frac{12-22}{4+1} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$s = 1 \;\Rightarrow\quad D = \frac{-3-22}{-1-4} = \frac{-25}{-5} = 5$$

$$\begin{cases} X(t) = 3e^{4t} + 5e^{-t} \\ \\ Y(t) = -2e^{4t} + 5e^{-t} \end{cases}$$

Örnek .
X(0) = –1, X′(0) = –1, Y(0) = 1 ve Y′ (0) = 0 başlangıç koşulları altında,

$X'' + Y' = \cos t$
$Y'' - X = \sin t$

diferansiyel denklem sistemini Laplace dönüşümlerini kullanarak çözünüz.

Başlangıç koşullarını dikkate alarak denklem sisteminin her iki yanının Laplace dönüşümünü alalım :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{X''\} + \mathcal{L}\{Y'\} = \mathcal{L}\{\cos t\} \\ \mathcal{L}\{Y''\} - \mathcal{L}\{X\} = \mathcal{L}\{\sin t\} \end{cases}$$

$$\left\{ s^2 x(s) - s\underbrace{X(0)}_{-1} - \underbrace{X'(0)}_{-1} \right\} + \left\{ sy(s) - \underbrace{Y(0)}_{1} \right\} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\left\{ s^2 y(s) - s\underbrace{Y(0)}_{1} - \underbrace{Y'(0)}_{0} \right\} - x(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Bu iki denklemi cebirsel anlamda düzenlersek ;

$$\left\{ s^2 x(s) + s + 1 \right\} + \left\{ sy(s) - 1 \right\} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$s^2 x(s) + sy(s) = \frac{s}{s^2+1} - s$$

$$s^2 x(s) + sy(s) = \frac{s - s^3 - s}{s^2+1}$$

$$s^2 x(s) + sy(s) = -\frac{s^3}{s^2+1}$$

$$\left\{ s^2 y(s) - s - 0 \right\} - x(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$s^2 y(s) - x(s) = \frac{1}{s^2+1} + s$$

$$s^2 y(s) - x(s) = \frac{s^3+s+1}{s^2+1}$$

$$(-s)\begin{cases} s^2 x(s) + sy(s) = -\dfrac{s^3}{s^2+1} \\ -x(s) + s^2 y(s) = \dfrac{s^3+s+1}{s^2+1} \end{cases}$$

Bu denklem sisteminden $x(s)$ ve $y(s)$ yi çözelim :

$$-s^3 x(s) - \cancel{s^2 y(s)} = \frac{s^4}{s^2+1}$$

$$-x(s) + \cancel{s^2 y(s)} = \frac{s^3+s+1}{s^2+1}$$

$$x(s)\left(-s^3-1\right) = \frac{s^4+s^3+s+1}{s^2+1}$$

$$\boxed{x(s) = -\frac{s+1}{s^2+1}} \qquad \boxed{y(s) = \frac{s}{s^2+1}}$$

ve ters dönüşümle $X(t)$ ve $Y(t)$ yi bulalım :

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left\{x(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\dfrac{s+1}{s^2+1}\right\} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{y(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} \end{cases}$$

X(t) = $\left(As+B\right) \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}$

Y(t) = $\left(Cs+D\right) \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}$

$-s-1 = As+B \quad \Rightarrow \quad A=-1 \quad ; \quad B=-1$

$1 = Cs+D \quad \Rightarrow \quad C=0 \quad ; \quad D=1$

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) &= -\cos t - \sin t \\ Y(t) &= \cos t \end{aligned}}$$

bulunur.

04.15. Alıştırma Problemleri ve Yanıtları

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin çözümlerini, verilen başlangıç değerlerine uyacak şekilde Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz :

1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$; $y(0) = 1, y'(0) = 2$

Yanıt: $y(t) = \frac{1}{60} t^5 e^t + e^t + te^t$

2) $y'' + y = \sin t$; $y(0) = y'(0) = 0$

Yanıt: $y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2} t \cos t$

3) $y'' - 3y' + 2y = 4t + 12e^{-t}$; $y(0) = 6, y'(0) = -1$,

Yanıt: $y(t) = 2t + 3 + 2e^{-t} + 3e^t - 2e^{2t}$

4) $y'' + y = e^{-2t}\sin t$; $y(0) = y'(0) = 0$

Yanıt: $y(t) = -\frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t + \frac{1}{8}\left[e^{-2t}\cos t + e^{-2t}\sin t\right]$

5. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİNDE KUVVET SERİLERİNİN KULLANILMASI

05.01. Giriş

İkinci mertebeden lineer denklemlerin çözümlerini, genel olarak elemanter fonksiyonlar olarak bilinen cebirsel ve cebirsel olmayan fonksiyonlar örneğin trigonometrik, ters trigonometrik, üstel, logaritmik fonksiyonlar türünden bulmak olanaksızdır. Uygulamalarda karşılaşılan sabit katsayılı denklemlere indirgenebilir denklemler de oldukça sınırlıdır. Analiz, matematik, fizik ve mühendislikte ortaya çıkan denklemlerin hemen hemen çoğu bu sınıfın dışında kalmaktadır. Böyle durumlarda kuvvet serisi ile çözümler aramaktan başka bir yol neredeyse yok gibidir. İşte bu noktada esas olarak izleyeceğimiz yaklaşım, ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemleri kuvvet serileri yardımıyla çözmek ve bunların kuvvet serileri yardımıyla bulunabilecek çözümleri ile yeni özel fonksiyonlar tanımlayarak bunların özelliklerini incelemek olacaktır. Öncelikle kuvvet serilerine ilişkin bazı tanım ve önemli sonuçlar, aşağıda kısaca özetlenmiştir.

05.02. Kuvvet Serileri

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ...$

şeklinde ifade edilmiş açılıma $(x - x_0)$ a göre yazılmış bir *Kuvvet Serisi* denir. Buradaki x_0 noktasını $x_0 = 0$ olarak alırsak (nokta orijine ötelenmiş olursa) oluşacak yeni kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

şeklinde görülecektir. Bunlardan ilkine Taylor açılımı, ikincisine ise Mc Laurin açılımı denir.

2. Eğer $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ nin sonlu bir değeri varsa bu x noktası civarında yakınsaktır. Bu durumda serinin toplamı bu limit değerine eşittir. Serinin yakınsaklık aralığı $|x| < R$ şeklinde belirtilir. Burada R ye *Yakınsaklık Yarıçapı* denir. Yakınsaklık yarıçapı $0 \le R \le \infty$ aralığında temsil edilir. Demek ki Mc Laurin serisi $|x| < R$ koşulunu sağlayan x ler için yakınsak, $|x| > R$ koşuluna karşı ıraksak olur. Kuvvet serisinin x = 0 noktası civarında her zaman yakınsak olacağı açıktır. R yakınsaklık yarıçapını hesaplayabilmek için D'Alembert testi uygulanabilir. Buna göre,

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ limiti varsa bu limit R olarak alınabilir. Kuvvet serisi yakınsaklık aralığının uç noktalarında yakınsak olabilir veya olmayabilir. Bu iki durum özel olarak incelenmelidir.

3. Kuvvet serisi, $R > 0$, $|x| < R$ için yakınsak olsun ve toplamı $f(x)$ ile gösterelim:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

demektir. f(x) süreklidir ve $|x| < R$ için her mertebeden türevi vardır. Ayrıca terim terim türetilebilir.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \ldots$$

Bu türlü elde edilen yeni fonksiyonlar da aynı aralıkta yakınsak olurlar. Ayrıca n. terim anlamında, katsayılar ile x= 0 için n.türevin bu değeri arasında $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ilişkisi kurulur. Seri terim terim integre edilebilir.

4. Eğer $f(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasının civarında,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$ biçiminde bir kuvvet serisi ile

gösterilebilirse, bu fonksiyon x_0 noktasında analitiktir ve buradaki seriye de x_0 noktasında $f(x)$'in Taylor serisi denir. Özel olarak, $x_0 = 0$ için bu seriye Mac Laurin serisi denir. $f(x)$ fonksiyonunun x_0 civarında her mertebeden sürekli türevleri olduğunu varsayalım. Bu durumda, ancak ve ancak x_0 civarındaki $\forall x$ için $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ise, $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında analitiktir.

05.03. Taylor Açılımı Yöntemi

Taylor serisi yöntemi, çoğu fonksiyonu kuvvet serisi şeklinde ifade etmenin bir yoludur.$x = x_0$ civarındaki Taylor açılımda $(x - x_0)$ büyüklüğünün üslerinden oluşan terimlerin katsayıları, fonksiyonunun türevlerinin $x = x_0$ daki değerlerini içerir. Bunun anlamı, Taylor serisi çoğu fonksiyonu kuvvet serisi şeklinde ifade etmenin bir yoludur. $x = x_0$ civarındaki Taylor açılımında, $(x - x_0)$ büyüklüğünün üslerinden oluşan terimlerin katsayıları, fonksiyonun türevlerinin $x = x_0$ daki değerleriyle oluşur. Bunun anlamı, bir fonksiyonun ve türevlerinin $x = x_0$ noktasındaki değerleri biliniyorsa bu fonksiyonun bütün x noktalarındaki değerleriyle aynı değerleri verecek bir kuvvet serisinin yazılabilmesi demektir.

Bir $y(x)$ fonksiyonunun birinci türevi $y' = f(x,y)$ şeklinde ve fonksiyonun başlangıç değeri de $y(x_0)$ şeklinde verilmiş olsun. Bu bilgiler kullanılarak $y(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ civarındaki Taylor açılımı;

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ...$$

şeklinde verilir.

Örnek.

$y(1) = 1$ ve $y' = x^2 y + 3x$ dir. $y(x)$ için Taylor açılımı yöntemi ile yaklaşık bir çözüm oluşturalım.

$$y' = x^2 y + 3x$$

$$y'(1) = x^2 y + 3x\Big|_{x=1,y=1} = 4$$

$$y'' = 2xy + x^2 y' + 3 = 2xy + x^2\left(x^2 y + 3x\right) + 3$$

$$= 2xy + x^4 y + 3x^3 + 3 \quad \Rightarrow$$

$$y''(1) = 2xy + x^4 y + 3x^3 + 3\Big|_{x=1,y=1} = 9$$

$$y''' = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y''$$

$$= 2y + 4xy' + x^2 y''$$

$$= 2y + 4x\left(x^2 y + 3x\right) + x^2\left(2xy + x^4 y + 3x^3 + 3\right)$$

$$= 2y + 6x^3 y + 15x^2 + x^6 y + 3x^5 \quad \Rightarrow$$

$$y'''(1) = 2y + 6x^3 y + 15x^2 + x^6 y + 3x^5\Big|_{x=1,y=1} = 27$$

bulunur. Gerekiyorsa $y^{(4)}(1)$, $y^{(5)}(1)$, $y^{(6)}(1)$ ve $y(x)$ in daha yüksek mertebeden türevlerinin $x = 1$ noktasındaki değerleri benzer yol izlenerek elde edilir. Bu değerler $y(x)$ in $x = 1$ civarındaki Taylor açılımında yerine konarak,

$$y(x) = 1 + 4(x-1) + \frac{9}{2!}(x-1)^2 + \frac{27}{3!}(x-1)^3 + \ ...$$

elde edilir.

Örnek.

$y(0) = 6$ ve $y' = y - x - 4$ tür. $y(x)$ i Taylor açılımı yöntemiyle bulalım.

$y' = y - x - 4$ denkleminin her iki yanı x e göre türeterek $y'' = y' - 1$ bulunur. Bir kez daha türeterek $y''' = y''$ elde edilir. Türetmeye devam ederek $y^{(n+1)} = y^{(n)}$ ilişkisi her $n \geq 2$ için oluşturulur.

$y'(0) = y - x - 4\big|_{x=0,\,y=6} = 6 - 0 - 4 = 2$

$y''(0) = y' - 1\big|_{x=0,\,y=6} = 1$

$y''(0) = y'''(0) = \cdots = y^{(n)}(0) = y^{(n+1)}(0) = \cdots = 1$

elde edilir. Öte yandan, $y(x)$ in $x = 0$ civarındaki Taylor açılımı,

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

dir. Her iki denklem birleştirilir ve düzenlenirse;

$$y = 6 + 2x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= (5 + x) + (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots) = 5 + x + e^x$$

$y = 5 + x + e^x$

elde edilir.

Örnek.

$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ve $y'' + y = 0$ dır. $y(x)$ i Taylor açılımı yöntemiyle bulalım.

Önce verilen denklemde $x = 0$ koyarak $y''(0)$ ı bulalım:

$$y''(x) + y(x)\big|_{x=0} = y''(0) + y(0) = y''(0) + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 0$$

Şimdi de verilen denklemi bir kez türetelim ve $x = 0$ koyalım,

$y''(x) + y(x) = 0$

$\Rightarrow y'''(x) + y'(x)\big|_{x=0} = 0$

$\Rightarrow y'''(0) = -y'(0) = -1$

bulunur. Bir kez daha türetelim ve $x = 0$ koyalım,

$y^{(4)}(x) + y''(x)\big|_{x=0} = 0 \;\Rightarrow\; y^{(4)}(0) = -y''(0) = 0$

bulunur. Böyle devam edilirse,

$y'(0) = -y'''(0) = y^{(5)}(0) = \cdots = (-1)^n y^{(2n+1)}(0) = \cdots = 1$

$y''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(6)}(0) = \cdots = y^{(2n)}(0) = \cdots = 0$

olduğu görülür ve

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$y(x) = \sin x$ bulunur.

05.04. Adi Nokta – Tekil Nokta. Frobenius Yöntemi

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

yapısında ikinci mertebeden homojen bir diferansiyel denklemi ele alalım. $x = a$ noktası için, $P_0(a) \neq 0$ ise buna **adi nokta,** $P_0(a) = 0$ ise buna **tekil nokta** denir.

$x = a$ noktası adi nokta ise

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

yazılarak bir çözüm aranır. Bu, **kuvvet serisi yöntemi** olarak bilinir.

$x = a$ noktası bir tekil nokta ise ilk denklem

$$y'' + \frac{R_1(x)}{x-a} y' + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} y = 0$$

şeklinde yazılabilir. $R_1(x)$ ve $R_2(x)$ fonksiyonları $x = a$ noktası civarında seriye açılabilirse $x = a$ noktasına **düzgün tekil nokta,** $R_1(x)$ ve

$R_2(x)$ fonksiyonlarına ise $x = a$ noktası civarında **analitiktir** denilir ve

$$y = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^{c+n}$$

$$= a_0(x-a)^c + a_1(x-a)^{c+1} + a_2(x-a)^{c+2} + \cdots + a_n(x-a)^{c+n} + \cdots$$

formunda bir çözüm aranır. Bu yöntem, **Frobenius yöntemi** olarak bilinir.

P(x) ve R(x) in yerine konulup gerekli düzenlemelerin yapılmasından sonra oluşan denklemde en küçük kuvvetli x in katsayısını sıfıra eşitleyerek elde edilen ilişkiye **indis denklemi** denir. İkinci dereceden bir denklem olan indis denkleminin kökleri için üç farklı durum söz konusudur:

i. Kökler birbirinden farklı ve aralarındaki fark bir tam sayıdan farklıdır.

ii. Kökler birbirine eşittir.

iii. Kökler birbirinden farklı ve aralarındaki fark bir tam sayı kadardır.

Bu aşamada $x = a$ noktasının adi bir nokta veya düzgün bir tekil nokta olduğu durumlar için örnekler vereceğiz.

05.05. Adi Nokta

Örnek.

$y' = xy^2 + y$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$ başlangıç koşulunu gerçekleyen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda bir özel çözümünü bulalım.

$P_0(x)=1$, $a=0$'dır. $P_0(0)=1\neq 0$'dır. Yani bir adi nokta söz konusudur.

Öyleyse, $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda bir çözüm arayabiliriz:

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \quad \text{dir.}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gibi herhangi iki serinin çarpımını,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots$$
$$+(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) + \cdots$$

bağıntısıyla biçimlendiren Cauchy çarpımını kullanarak,

$$y.y = y^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$$
$$=(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)$$
$$= a_0^{\,2} + (a_0a_1 + a_1a_0)x + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)x^2 + \cdots$$
$$+(a_0a_n + a_1a_{n-1} + \cdots + a_{n-1}a_1 + a_na_0)x^n + \cdots$$

bulunur. y, y', y^2 nin bu değerleri ile denkleme gidelim ve düzenleyelim :

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$$
$$=\left[a_o^{\,2}x + 2a_oa_1x^2 + \left(2a_oa_2 + a_1^{\,2}\right)x^3 + \cdots\right] + a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$= a_o + (a_o^{\,2} + a_1)x + (2a_oa_1 + a_2)x^2 + (2a_oa_2 + a_1^{\,2} + a_3)x^3 + \cdots$$

olup şimdi, eşitliğin her iki yanında bulunan aynı kuvvetten x lerin katsayıları karşılıklı olarak eşitlenirse :

$$a_1 = a_0,$$

$$2a_2 = a_0^{\,2} + a_1 = a_0^{\,2} + a_0 \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{1}{2}(a_0^{\,2} + a_0),$$

$$3a_3 = 2a_0a_1 + a_2 = 2a_0^{\,2} + \frac{1}{2}(a_0^{\,2} + a_0) = \frac{1}{2}(5a_0^{\,2} + a_0) \;\Rightarrow\; a_3 = \frac{1}{6}(5a_0^{\,2} + a_0),$$

…………

bulunur. $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de yerine koyalım :

$$y = a_o + a_ox + \frac{1}{2}(a_0^{\,2} + a_0)x^2 + \frac{1}{6}(5a_0^{\,2} + a_0)x^3 + \cdots$$

$y(0)=1$ başlangıç koşulundan $a_o = 1$ ve $y = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ elde edilir.

Örnek.

$y'' + xy = 2$ diferansiyel denkleminin $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda bir çözümünü bulalım.

$P_0(x) = 1$; $a = 0$ ve $P_0(0) = 1 \neq 0$ dır. Yani bir adi nokta söz konusudur.

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ dir. Denkleme gidelim ve düzenleyelim :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 2$$

$$2a_2 + (3.2a_3 + a_0)x + (4.3a_4 + a_1)x^2 + (5.4a_5 + a_2)x^3 + \cdots +$$
$$+\left[n(n-1)a_n + a_{n-3}\right]x^{n-2} + \cdots = 2$$

Buradan,

$a_2 = 1$, $a_3 = -\frac{a_0}{3!}$, $a_4 = -\frac{a_1}{4.3}$, $a_5 = -\frac{a_2}{5.4}$, $\cdots$, $a_n = -\frac{1}{n(n-1)} a_{n-3}$ elde edilir.

Böylece rekürans bağıntısı bulunmuş olur.

a_2 , a_5 , a_8 , a_{11} , ... dizininin elemanlarını rekürans bağıntısına göre a_2 cinsinden ifade edelim:

$$a_2 = 1 \ , \ a_5 = -\frac{1}{5.4} \ , \ a_8 = -\frac{1}{8.7.5.4} \ , \ a_{11} = -\frac{1}{11.10.8.7.5.4} \ , \ \cdots$$

olurlar. Şimdi de a_0 , a_3 , a_6 , a_9 , ... dizisinin elemanlarını rekürans bağıntısına göre a_0 cinsinden ifade edelim:

$$a_0 = a_0 \ , \ a_3 = -\frac{a_0}{3.2} \ , \ a_6 = -\frac{a_0}{6.5.3.2} \ , \ a_9 = -\frac{a_0}{9.8.6.5.3.2} \ , \ \cdots$$

olurlar. Son olarak a_1 , a_4 , a_7 , a_{10} , ... dizininin elemanlarını rekürans bağıntısına göre a_1 cinsinden ifade edelim :

$$a_1 = a_1 \ , \ a_4 = -\frac{a_1}{4.3} \ , \ a_7 = -\frac{a_1}{7.6.4.3} \ , \ a_{10} = -\frac{a_1}{10.9.7.6.4.3} \ , \ \cdots$$

olurlar. Bulunan bütün bu a_n değerlerini $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinde yerlerine koyarak çözümü elde edelim :

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{3.2}x^3 + \frac{1}{6.5.3.2}x^6 - \frac{1}{9.8.6.5.3.2}x^9 + \cdots\right)$$
$$+a_1\left(x - \frac{1}{4.3}x^4 + \frac{1}{7.6.4.3}x^7 - \frac{1}{10.9.7.6.4.3}x^{10} + \cdots\right)$$
$$+a_2\left(x^2 - \frac{1}{5.4}x^5 + \frac{1}{8.7.5.4}x^8 - \frac{1}{11.10.8.7.5.4}x^{11} + \cdots\right)$$

Örnek.

$y'' - y' = 0$ diferansiyel denkleminin $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda bir çözümünü bulalım.

$P_0(x) = 1$; $a = 0$ ve $P_0(0) = 1 \neq 0$ dır. Yani bir adi nokta söz konusudur.

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ dir. Denkleme gidelim ve düzenleyelim :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0$$

$$(2.1a_2 - a_1) + (3.2a_3 - 2a_2)x + (4.3a_4 - 3a_3)x^2 + \cdots + \left[(n+1)na_{n+1} - na_n\right]x^{n-1} + \cdots = 0$$

Buradan,

$$a_2 = \frac{a_1}{2!} \ , \ a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_1}{3!} \ , \ a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_1}{4!} \ , \ \cdots \ , \ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} = \frac{a_1}{(n+1)!} \ , \ \cdots$$

elde edilir. Bulduğumuz bu a_n değerlerini $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinde yerleştirir ve düzenlersek :

$$y = a_0 + a_1 x + a_1 \frac{x^2}{2!} + a_1 \frac{x^3}{3!} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$$

$$= a_0 - a_1 + a_1 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \right)$$

$$= c_1 + c_2 e^x$$

bulunur. Burada $c_1 = a_1 - a_0$, $c_2 = a_1$ olarak alınmış ve

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$$

bağıntısı kullanılmıştır.

Örnek.

$y'' + xy' + (x-1)y = 0$ diferansiyel denkleminin $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ formunda bir çözümünü bulalım.

$x - 1 = t$ olsun.

$$\frac{dt}{dx} = 1 \ \text{ve} \ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \text{'dir.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

olduğu dikkate alınırsa verilen diferansiyel denklemi, bağımsız değişken t olmak üzere;

$$y'' + (t+1)y' + ty = 0$$

formunda yazabiliriz. Ve problem bu denklemin $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ formunda bir çözümünün bulunması problemine indirgenmiş olur.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \ , \ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

değerleri ile denkleme gidelim :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (t+1) n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

Açılımını yaparak :

$$\left[2.1a_2 + 3.2a_3 t + 4.3a_4 t^2 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n + \cdots \right]$$

$$+\left[a_1 t + 2a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + \cdots + n a_n t^n + \cdots \right] + \left[a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + (n+1) a_{n+1} t^n + \cdots \right]$$

$$+\left[a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \cdots + a_{n-1} t^n + \cdots \right] = 0$$

olup düzenlersek,

$$\left(2a_2 + a_1\right) + t\left(3.2a_3 + a_1 + 2a_2 + a_0\right) + t^2\left(4.3a_4 + 2a_2 + 3a_3 + a_1\right) + \cdots$$

$$+t^n\left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + (n+1) a_{n+1} + a_{n-1} + \cdots \right] = 0$$

ve buradan da

$$2a_2 + a_1 = 0 \ \Rightarrow \ a_2 = -\frac{a_1}{2}$$

$$3.2a_3 + a_1 + 2a_2 + a_0 = 0 \ \Rightarrow \ a_3 = -\frac{a_0}{6}$$

$$4.3a_4 + 2a_2 + 3a_3 + a_1 = 0 \ \Rightarrow \ a_4 = \frac{a_0}{24}$$

$$5.4a_5 + 3a_3 + 4a_4 + a_2 = 0 \ \Rightarrow \ a_5 = \frac{a_0}{60} + \frac{a_1}{40}$$

…………

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + (n+1) a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow \ a_{n+2} = -\frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{n a_n}{(n+1)(n+2)} - \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

bulunur. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ de yerine konur ve düzenlenirse,

$$y = a_0 + a_1 t - \frac{a_1}{2} t^2 - \frac{a_0}{6} t^3 + \frac{a_0}{24} t^4 + \left(\frac{a_0}{60} + \frac{a_1}{40} \right) t^5 + \cdots$$

$$= a_0\left(1-\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}+\frac{t^5}{60}+\ \cdots\ \right)+a_1\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^5}{40}+\ \cdots\ \right)$$

ve t yerine $x-1$ konarak,

$$y = a_0\left(1-\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{24}+\frac{(x-1)^5}{60}+\cdots\right)+a_1\left((x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^5}{40}+\cdots\right)$$

çözüm bulunmuş olur.

05.06. Düzgün Tekil Nokta

1.Durum: İndis Denkleminin Köklerinin Katlı ve Aralarındaki Farkın Tam Sayı Olmadığı Durum :

Örnek.

$3x^2y''-2xy'-\left(2+x^2\right)y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklemi önce

$$y''-\frac{2}{3x}y'-\frac{2+x^2}{3x^2}y=0$$

formunda yazalım. Burada $R_1(x)=-\dfrac{2}{3}$, $R_2(x)=-\dfrac{2+x^2}{3}$ olup her ikisi de $x=0$ noktası civarında seriye açılabilirler, yani analitiktir. Dolayısıyla

$x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır ve denklemin $y=x^c\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{c+n}$ formunda bir çözümü olacaktır. Şimdi

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(c+n)x^{c+n-1} \quad \text{ve} \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(c+n)(c+n-1)x^{c+n-2}$$

ile verilen değerlerini denklemde yerine koyalım :

$$3x^2\Big[a_0c(c-1)x^{c-2}+a_1(1+c)cx^{c-1}+a_2(2+c)(1+c)x^c+\ \cdots$$
$$+a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}+\ \cdots\ \Big]-2x\Big[a_0cx^{c-1}+a_1(1+c)x^c+a_2(2+c)x^{1+c}+\ \cdots$$
$$+a_n(n+c)x^{n+c-1}+\ \cdots\ \Big]-\left(2+x^2\right)\Big[a_0x^c+a_1x^{1+c}+a_2x^{2+c}+\ \cdots\ +a_nx^{n+c}+\ \cdots\Big]=0$$

olup düzenlenirse

$$x^c\Big[3a_0c(c-1)-2a_0c-2a_0\Big]+x^{1+c}\Big[3a_1c(1+c)-2a_1(1+c)-2a_1\Big]$$
$$+x^{2+c}\Big[3a_2(2+c)(1+c)-2a_2(2+c)-2a_2-a_0\Big]+\ldots$$
$$+x^{n+c}\Big[3a_n(n+c)(n+c-1)-2a_n(n+c)-2a_n-a_{n-2}\Big]+\ \cdots$$

$$= x^{c}\left(3c^{2}-5c-2\right)a_{0}$$
$$+x^{1+c}\left[3(1+c)+1\right]\left[(1+c)-2\right]a_{1}$$
$$+x^{2+c}\left\{\left[3(2+c)+1\right]\left[(2+c)-2\right]a_{2}-a_{0}\right\} + \cdots$$
$$+x^{n+c}\left\{\left[3(n+c)+1\right]+\left[(n+c)-2\right]a_{n}-a_{n-2}\right\} + \cdots = 0$$

Bu oluşumda en küçük dereceli x i içeren terimin $a_0 \neq 0$ varsayımı altında sıfıra eşitlenmesi ile indis denklemi bulunacaktır:

$$a_{0}\left(3c^{2}-5c-2\right)=a_{0}(c-2)(3c+1)=0 \quad \Rightarrow \quad c_{1}=2\ ,\quad c_{2}=-\frac{1}{3}$$

olup, geri kalan terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile,

$$\left[3(1+c)+1\right]\left[(1+c)-2\right]a_{1}=0 \quad \Rightarrow \quad a_{1}=0$$

$$\left[3(2+c)+1\right]\left[(2+c)-2\right]a_{2}-a_{0}=0 \quad \Rightarrow \quad a_{2}=\frac{a_{0}}{\left[3(2+c)+1\right]\left[(2+c)-2\right]}$$

…………

olur.

$$\left[3(n+c)+1\right]+\left[(n+c)-2\right]a_{n}-a_{n-2}=0 \quad \Rightarrow$$ den rekürans bağıntısı

$$a_{n}=\frac{a_{n-2}}{\left[3(n+c)+1\right]\left[(n+c)-2\right]}$$

olarak bulunur.

Rekürans bağıntısı ve $a_1 = 0$ gerçeği ile birlikte değerlendirilirse,

$$a_{3}=a_{5}=a_{7}=\cdots=a_{2n+1}=\cdots=0$$

elde edilir.

$c_1 = 2$ için :

$$a_{n}=\frac{a_{n-2}}{\left[3(n+2)+1\right]\left[(n+2)-2\right]}=\frac{a_{n-2}}{n(3n+7)}$$

olur. Buradan,

$$a_{2}=\frac{a_{0}}{2\cdot 13}=\frac{a_{0}}{26}\ ,\quad a_{4}=\frac{a_{2}}{4\cdot 19}=\frac{a_{0}}{26\cdot 4\cdot 19}=\frac{a_{0}}{1976}\ ,\quad \cdots$$

yazılarak

$$y_{1}(x)=a_{0}x^{2}\left(1+\frac{1}{26}x^{2}+\frac{1}{1976}x^{4}+\cdots\right)$$

bulunur.

$c_2 = -\frac{1}{3}$ için :

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{\left[3\left(n-\frac{1}{3}\right)+1\right]\left[\left(n-\frac{1}{3}\right)-2\right]} = \frac{a_{n-2}}{n(3n-7)}$$

olur. Buradan

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} \ , \ \ a_4 = \frac{a_2}{4(12-7)} = -\frac{a_0}{40} \ , \ \ a_6 = \frac{a_4}{6(18-7)} = -\frac{a_0}{2640} \ , \ \cdots$$

yazılarak,

$$y_2(x) = a_0 x^{-1/3}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{40}x^4 - \frac{1}{2640}x^6 - \cdots\right)$$

bulunur. Genel çözüm : $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ yapısında olacaktır.

Örnek.

$2x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklemi önce

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1-x}{2x^2}y = 0$$

formunda yazalım. Burada $R_1(x) = -\frac{1}{2}$, $R_2(x) = -\frac{1-x}{2}$ olup her ikisi de $x=0$ noktası civarında seriye açılabilirler, yani analitiktir. Dolayısıyla $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır ve denklemin $y = x^c\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{c+n}$ formunda bir çözümü olacaktır.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c+n) x^{c+n-1} \ ; \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c+n)(c+n-1) x^{c+n-2}$$

ile verilen değerlerini denklemde yerine koyalım:

$$2x^2\left[a_0c(c-1)x^{c-2} + a_1(1+c)cx^{c-1} + a_2(2+c)(1+c)x^c + \cdots\right.$$
$$\left.+a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2} + \cdots\right] - x\left[a_0cx^{c-1} + a_1(1+c)x^c + a_2(2+c)x^{1+c} + \cdots\right.$$
$$\left.+a_n(n+c)x^{n+c-1} + \cdots\right] + (1-x)\left[a_0x^c + a_1x^{1+c} + a_2x^{2+c} + \cdots + a_nx^{n+c} + \cdots\right] = 0$$

olur. Bunlar düzenlenirse

$$x^c\left[2a_0c(c-1) - a_0c + a_0\right] + x^{1+c}\left[2a_1c(1+c) - a_1(1+c) + a_1 - a_0\right]$$
$$+x^{2+c}\left[2a_2(2+c)(1+c) - a_2(2+c) + a_2 + a_1\right] + \ldots$$

$$+x^{n+c}\left[2a_n(n+c)(n+c-1)-a_n(n+c)+a_n-a_{n-1}\right]+\ \cdots$$

$$=x^{c}\left(2c^2-3c+1\right)a_0\ +x^{1+c}\left\{\left[2(1+c)-1\right]\left[(1+c)-1\right]a_1-a_0\right\}$$

$$+x^{2+c}\left\{\left[2(2+c)-1\right]\left[(2+c)-1\right]a_2-a_1\right\}+\cdots$$

$$+x^{n+c}\left\{\left[2(n+c)-1\right]+\left[(n+c)-1\right]a_n-a_{n-1}\right\}+\ \cdots=0$$

Bu oluşumda, en küçük dereceli x içeren terimin $a_0 \neq 0$ varsayımı altında sıfıra eşitlenmesi ile indis denklemi bulunacaktır :

$$a_0\left(2c^2-3c+1\right)=a_0(c-1)(2c+1)=0 \quad \Rightarrow \quad c_1=1\ ,\ c_2=\frac{1}{2}$$

Geri kalan terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile

$$\left[(c+1)(2c-1)\right]a_1-a_0=0 \quad \Rightarrow \quad a_1=\frac{a_0}{(c+1)(2c-1)}$$

$$\left[(c+2)(2c+3)\right]a_2-a_1=0 \quad \Rightarrow \quad a_2=\frac{a_0}{(c+2)(2c+3)}$$

…………

olup rekürans bağıntısı

$$\left\{\left[2(n+c)-1\right]+\left[(n+c)-1\right]a_n-a_{n-1}\right\}=0 \quad \Rightarrow$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{\left[2(n+c)-1\right]\left[(n+c)-1\right]}$$

olarak bulunur.

$c_1=1$ için :

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{\left[2(n+1)-1\right]\left[(n+1)-1\right]}=\frac{a_{n-1}}{n(2n+1)}$$

olup, bunlardan

$$a_1=\frac{a_0}{1\cdot 3}\ ,\quad a_2=\frac{a_1}{2\cdot 5}=\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}\ ,\quad a_3=\frac{a_2}{3\cdot 7}=\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}\ ,\quad \cdots$$

elde edilir. Bu değerler kullanılarak

$$y_1(x)=a_0x\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}x+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}x^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}x^3+\ \cdots\right)$$

bulunur.

$c_2 = \dfrac{1}{2}$ için :

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{\left[2\left(n+\dfrac{1}{2}\right)-1\right]\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)-1\right]} = \frac{a_{n-1}}{2n(2n-1)}$$

olarak bulunur.

$$a_1 = \frac{a_0}{1\cdot 1}\ ,\quad a_2 = \frac{a_1}{2\cdot 3} = \frac{a_0}{2\cdot 3}\ ,\quad a_3 = \frac{a_2}{3\cdot 5} = \frac{a_0}{2\cdot 3^2\cdot 5}\ ,\quad \cdots$$

ve bu değerler için

$$y_2(x) = a_0\sqrt{x}\left(1 + x + \frac{1}{1\cdot 3}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 5}x^3 + \cdots\right)$$

yazılabilecektir. Böylece genel çözüm :

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

yapısında ifade edilecektir.

Örnek.

Hipergeometrik Denklem : A ve B herhangi iki reel sayı ve C ise tam sayı olmayan herhangi bir reel doğal sayı olmak üzere ;

$$x(1-x)y'' + \left[C - (A+B+1)x\right]y' - ABy = 0$$

ile verilir. $x = 0$ noktası civarında genel çözümünü bulalım.

$x = 0$ noktasının düzgün tekil bir nokta olduğu gösterilebilir. Bunun anlamı, denklemin $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{c+n}$ ile verilen bir seri çözümünün bulunmasıdır. y , y' ve y'' yi denklemde yerine koyar ve düzenlersek indis denklemi,

$$c^2 + (C-1)c = 0$$

ve rekürans bağıntısı ;

$$a_{n+1} = \frac{(c+n)(c+n+A+B)+AB}{(c+n+1)(c+n+C)}a_n$$

olarak bulunur.

İndis denkleminin kökleri $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1 - C$ dir. C nin tam sayı olmaması nedeniyle $c_1 - c_2 = C - 1$ de tam sayı değildir. İndis denkleminin kökleri katlı olmadığı gibi aralarındaki fark da tam sayı değildir.

Rekürans bağıntısında $c = 0$ koyalım ve düzenleyelim :

$$a_{n+1} = \frac{n(n+A+B)+AB}{(n+1)(n+C)} a_n = \frac{(A+n)(B+n)}{(n+1)(n+C)} a_n$$

Buradan,

$$a_1 = \frac{AB}{C} a_0 = \frac{AB}{1!C} a_0$$

$$a_2 = \frac{(A+1)(B+1)}{2(C+1)} a_1 = \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)} a_0$$

$$a_3 = \frac{(A+2)(B+2)}{3(C+2)} a_2 = \frac{A(A+1)(A+2)B(B+1)(B+2)}{3!C(C+1)(C+2)} a_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

elde edilir. Bulunanlar denklemde yerine konursa :

$$F(A,B,C;x) = 1 + \frac{AB}{1!C}x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)}x^2 + \frac{A(A+1)(A+2)B(B+1)(B+2)}{3!C(C+1)(C+2)}x^3 + \cdots$$

olmak üzere $y_1(x) = a_0 F(A,B,C;x)$ elde edilir.

$F(A,B,C;x)$ serisi, H*ipergeometrik Seri* olarak isimlendirilir. $-1 < x < 1$ için yakınsak olduğu kolayca gösterilebilir. $a_0 = 1$ olarak seçilmesi durumunda $y_1(x) = F(A,B,C;x)$ olacaktır. Bunun anlamı, hipergeometrik serinin, hipergeometrik denklemin bir çözümü olmasıdır.

Şimdi de rekürans bağıntısında $c = 1 - C$ koyalım ve düzenleyelim :

$$a_{n+1} = \frac{(n+1-C)(n+1+A+B-C)+AB}{(n+2-C)(n+1)} a_n = \frac{(A-C+n+1)(B-C+n+1)}{(n+2-C)(n+1)} a_n$$

Yukarıda yapılanlar tekrarlanır, a_n ler a_0 cinsinden belirlenir ve $a_0 = 1$ olarak seçilirse;

$$y_2(x) = x^{1-C} F\left(A-C+1\ , B-C+1\ ,\ 2-C\ ; x\right)$$

bulunur.

Genel çözüm şeklinde ifade edilecektir : $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$

2.Durum : İndis Denkleminin Köklerinin Katlı Olduğu Durum

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{c+n}$ in denklemde yerine konulup düzenlemenin tamamlanmasından sonra x in en küçük kuvveti $f(c)$ olmak üzere

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = a_0\left(c-c_0\right)^2 x^{f(c)}$$

formunda bir ilişki ortaya çıkacaktır. x in daha büyük kuvvetlerinin katsayıları, a_n katsayılarının aralarında oluşan rekürans bağıntısının bir sonucu olarak sıfır olacaktır.

y nin, x in ve c nin fonksiyonu olduğunu, dolayısıyla y' ve y'' yü de x in ve c nin fonksiyonu olarak düşünülebileceğini ve türevlerin

$$\frac{\partial y'}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)'$$

$$\frac{\partial y''}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)''$$

şeklinde oluşacağı dikkate alınarak, diferansiyel denklemin her iki yanını c ye göre türetelim:

$$P_0(x)\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)'' + P_1(x)\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)' + P_2(x)\frac{\partial y}{\partial c} = 2a_0\left(c-c_0\right)x^{f(c)} + a_0\left(c-c_0\right)^2 x^{f(c)} f'(c)\ln x$$

bulunur. Sağ yanda $c-c_0$ bir çarpandır, yani $c=c_0$ için sağ yan taraf sıfır olmaktadır. Bunun anlamı: $\left.\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)\right|_{c=c_0}$ için son ifadenin sol tarafının sıfır olmasıdır. Bu durumda $\left.\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)\right|_{c=c_0}$ denklemin bir çözümü olur.

Örnek.

$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$ diferansiyel denklemi, **mertebesi sıfır olan Bessel Diferansiyel Denklemi** olarak bilinir. Genel çözümünü bulalım.

Denklemi önce

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2}{x^2}y = 0$$

formunda yazalım. Burada $R_1(x)=1,\ R_2(x)=x^2$ olup her ikisi de $x=0$ noktası civarında seriye açılabilirler, yani iki fonksiyon da analitiktir.

Dolayısıyla $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır ve denklemin $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{c+n}$ formunda bir çözümü olacaktır.

Şimdi y' ve y'' yü oluşturalım ve denkleme gidelim:

$$x^2\left[a_0c(c-1)x^{c-2} + a_1(1+c)cx^{c-1} + a_2(2+c)(1+c)x^c + \cdots\right.$$

$$\left.+a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2} + \cdots\right]$$

$$+x\left[a_0cx^{c-1} + a_1(1+c)x^c + a_2(2+c)x^{1+c} + \cdots + a_n(n+c)x^{n+c-1} + \cdots\right]$$

$$+x^2\left[a_0x^c+a_1x^{1+c}+a_2x^{2+c}+\ \cdots\ +a_nx^{n+c}+\ \cdots\right]=0$$

formunda bir çözümü olacaktır. Bu düzenlenirse

$$x^c\left[a_0c^2\right]+x^{1+c}\left[a_1(1+c)^2\right]+x^{2+c}\left[a_2(2+c)^2+a_0\right]$$
$$+x^{3+c}\left[a_3(3+c)^2+a_1\right]+\ \cdots\ +x^{n+c}\left[a_n(n+c)^2+a_{n-2}\right]+\ \cdots\ =0$$

olur. Bu oluşumda en küçük dereceli x i içeren terimin $a_0\neq 0$ varsayımı altında sıfıra eşitlenmesi ile indis denklemi bulunacaktır:

$$a_0c^2=0 \quad\Rightarrow\quad c^2=0$$

İndis denkleminin iki katlı bir kökü vardır :

$c_1=c_2=0$

Geri kalan terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile

$$a_1(1+c)^2=0 \quad\Rightarrow\quad a_1=0$$

$$a_2(2+c)^2+a_0=0 \quad\Rightarrow\quad a_2=-\frac{a_0}{(2+c)^2}$$

$$a_3(3+c)^2+a_1=0 \quad\Rightarrow\quad a_3=-\frac{a_1}{(3+c)^2}$$

....

olur ki bunlara göre rekürans bağıntısı

$$a_n(n+c)^2+a_{n-2}=0 \quad\Rightarrow\quad a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+c)^2}\quad,\quad n\geq 2$$

olarak bulunur. Buradan,

$$a_1=a_3=a_5=a_7=\ \cdots\ =0$$

olduğu görülmektedir.

Artık verilen denklemin x ve c ye bağlı olarak oluşturulan çözümü aşağıdaki gibi yazılabilecektir :

$$y(x,c)=a_0x^c-\frac{a_0}{(2+c)^2}x^{c+2}+\frac{a_0}{(2+c)^2(4+c)^2}x^{c+4}+\frac{a_0}{(2+c)^2(4+c)^2(6+c)^2}x^{c+6}+\ ...$$

olur.

$y(x,c)$ de $c=0$ koyalım ve $y_1(x)$ çözümünü bulalım :

$$y(x,0)=y_1(x)$$

$$=a_0\left(1-\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\ \cdots\ +\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}+\ \cdots\right)$$

$$=a_0\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2 4^2}-\frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}+\ \cdots\ +\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^2 4^2\ \cdots\ (2k)^2}+\ \cdots\right)$$

$$=a_0 J_0(x)$$

Bu sonuç yani $J_0(x)$, **mertebesi sıfır olan Bessel fonksiyonu** olarak bilinir.

Şimdi de $y_2(x)$ i bulalım. Bu amaçla $y(x,c)$ yi c ye göre türetelim :

$$\frac{\partial y(x,c)}{\partial c}=a_0\Bigg[x^c\ln x+\frac{2}{(2+c)^3}x^{c+2}-\frac{2}{(2+c)^2}x^{c+2}\ln x$$

$$-\frac{2}{(4+c)^3(2+c)^2}x^{c+4}-\frac{2}{(4+c)^2(2+c)^3}x^{4+c}$$

$$+\frac{1}{(4+c)^2(2+c)^2}x^{4+c}\ln x+\ \cdots\Bigg]$$

olur. Burada $c=0$ koyalım :

$$y_2(x)=\left.\frac{\partial y(x,c)}{\partial c}\right|_{c=0}=a_0\left(\ln x+\frac{2}{2^3}x^2-\frac{1}{2^2}x^2\ln x-\frac{2}{4^3 2^2}x^4-\frac{2}{4^2 2^3}x^4+\frac{1}{4^2 2^2}x^4\ln x+\ \cdots\right)$$

$$=(\ln x)a_0\left[1-\frac{1}{2^2(1!)}x^2+\frac{1}{2^4(2!)^2}x^4+\ \cdots\right]+a_0\left[\frac{x^2}{2^2(1!)^2}(1)-\frac{x^4}{2^4(2!)^2}\left(\frac{1}{2}+1\right)+\ \cdots\right]$$

$$=y_1(x)\ln x+a_0\left[\frac{x^2}{2^2(1!)^2}(1)-\frac{x^4}{2^4(2!)^2}\left(\frac{1}{2}+1\right)+\ \cdots\right]$$

bulunur. Genel çözüm : $y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$ yapısında olacaktır.

Bu denklem bir sonraki bölümde daha kapsamlı incelenecektir.

Örnek.

$xy''+y'-y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklemi önce

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{x}{x^2}y=0$$

formunda yazalım. Burada $R_1(x)=1$, $R_2(x)=-x$ olup her ikisi de $x=0$ noktası civarında seriye açılabilirler, yani analitik fonksiyonlardır. Dolayısıyla $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır ve denklemin

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{c+n}$ formunda bir çözümü olacaktır.

y' ve y'''yü oluşturalım ve denklemde yerine koyalım:

$$x\big[a_0 c(c-1)x^{c-2}+a_1(1+c)cx^{c-1}+a_2(2+c)(1+c)x^c+\ \cdots$$

$$+a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2} + \cdots\Big]$$

$$+\left[a_0 c x^{c-1} + a_1(1+c)x^c + a_2(2+c)x^{1+c} + \cdots + a_n(n+c)x^{n+c-1} + \cdots\right]$$

$$-\left[a_0 x^c + a_1 x^{1+c} + a_2 x^{2+c} + \cdots + a_n x^{n+c} + \cdots\right] = 0$$

olup bunu düzenleyelim :

$$x^{c-1}\left[a_0 c(c-1) + a_0 c\right] + x^c\left[a_1(1+c)c + a_1(1+c) - a_0\right]$$

$$+x^{1+c}\left[a_2(2+c)(1+c) + a_2(2+c) - a_1\right] + \cdots$$

$$+x^{n+c-1}\left[a_n(n+c)(n+c-1) + a_n(n+c) - a_{n-1}\right] + \cdots$$

$$= x^c\left(c^2\right)a_0 + x^1\left[(1+c)^2 a_1 - a_0\right] + x^{1+c}\left[(2+c)^2 a_2 - a_1\right] + \cdots$$

$$+x^{n+c-1}\left[(n+c)^2 a_n - a_{n-1}\right] + \cdots = 0$$

Bu oluşumda en küçük dereceli x i içeren terimin $a_0 \neq 0$ varsayımı altında sıfıra eşitlenmesi ile indis denklemi bulunacaktır :

$$a_0(c^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$$

bulunur. Geri kalan terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile

$$(1+c)^2 a_1 - a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{a_0}{(1+c)^2}$$

$$(2+c)^2 a_2 - a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{a_1}{(2+c)^2} = \frac{a_0}{(1+c)^2(2+c)^2}$$

…………

olup rekürans bağıntısı,

$$(n+c)^2 a_n - a_{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+c)^2} = \frac{a_0}{(1+c)^2(2+c)^2 \cdots (n+c)^2}$$

olarak bulunur.

x ve c nin fonksiyonu olarak çözüm :

$$y(x,c) = a_0 x^c + \frac{a_0}{(1+c)^2}x^{1+c} + \frac{a_0}{(1+c)^2(2+c)^2}x^{2+c} + \cdots + \frac{a_0}{(1+c)^2(2+c)^2 \cdots (n+c)^2}x^{n+c} + \cdots \qquad (1)$$

ile verilir.

Burada $c = 0$ konulursa $y_1(x)$ bulunur :

$$y_1(x) = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{1^2 \cdot 2^2} + \cdots + \frac{x^n}{1^2 \cdot 2^2 \cdots n^2} + \cdots\right)$$

Şimdi de $y_2(x)$ i bulalım. Bu amaçla (1) i c ye göre türetip,

$$\frac{\partial y(x,c)}{\partial c} = a_0 \ln x \; x^c + \frac{a_0 x^{1+c}}{(1+c)^2}\left(\ln x - \frac{2}{1+c}\right) + \frac{a_0 x^{2+c}}{(1+c)^2(2+c)^2}\left(\ln x - \frac{2}{1+c} - \frac{2}{2+c}\right)$$

$$+ \frac{a_0 x^{n+c}}{(1+c)^2 \cdots (n+c)^2}\left(\ln x - \frac{2}{1+c} - \cdots - \frac{2}{n+c}\right) + \cdots$$

oluşunca, $c = 0$ koymamız yeterli olacaktır :

$$y_2(x) = a_0 \ln x\left(1 + x + \frac{x^2}{1^2 \cdot 2^2} + \cdots\right) + a_0 x\left(-\frac{2}{1}\right) - \frac{a_0}{1^2 \cdot 2^2}\left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2}\right) - \cdots$$

$$= y_1(x) \ln x - a_0\left(2x + \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} x^2 + \cdots\right)$$

bulunur. Genel çözüm : $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ yapısında olacaktır.

3.Durum : İndis Denkleminin Kökleri Arasındaki Farkın Tam Sayı Olduğu Durum

İndis denkleminin kökleri c_1 ve c_2 ve $c_1 > c_2$ ve c_1 ile c_2 arasındaki fark tam sayı olsun. Büyük kök olan c_1 daima bir çözüm verir. Küçük kök olan c_2 ise sorun çıkarabilir. Bu takdirde $a_0 = b_0(c - c_2)$ seçimi yapılırsa çözüm

$$y = Ay\Big|_{c=c_2} + B\frac{\partial y}{\partial c}\Big|_{c=c_1}$$

ile verilir.

Örnek.

$x^2 y'' + (x - x^2)y' - y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bula-lım.

Denklemi önce

$$y'' + \frac{1-x}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

formunda yazalım. Burada $R_1(x) = 1 - x$, $R_2(x) = -1$ olup her ikisi de $x = 0$ noktası civarında seriye açılabilirler, yani analitiktir. Dolayısıyla $x = 0$ noktası bir düzgün tekil noktadır ve denklemin $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{c+n}$ formunda bir çözümü olacaktır. Şimdi y' ve y'' nin verilen değerlerini denklemde yerine koyalım :

$$x^2\Big[a_0c(c-1)x^{c-2}+a_1(1+c)cx^{c-1}+a_2(2+c)(1+c)x^c+\cdots$$
$$+a_n(n+c)(n+c-1)x^{n+c-2}+\cdots\Big]$$
$$+(x-x^2)\Big[a_0cx^{c-1}+a_1(1+c)x^c+a_2(2+c)x^{1+c}+\cdots+a_n(n+c)x^{n+c-1}+\cdots\Big]$$
$$-\Big[a_0x^c+a_1x^{1+c}+a_2x^{2+c}+\cdots+a_nx^{n+c}+\cdots\Big]=0$$

olup düzenleyelim :

$$x^c\Big[a_0c(c-1)+a_0c-a_0\Big]+x^{1+c}\Big[a_1(1+c)c+a_1(1+c)-a_0-a_1\Big]$$
$$+x^{2+c}\Big[a_2(2+c)(1+c)+a_2(2+c)-a_1(1+c)-a_2\Big]+\dots$$
$$+x^{n+c}\Big[a_n(n+c)(n+c-1)+a_n(n+c)-a_{n-1}(n+c-1)-a_n\Big]+\cdots=0$$

Bu oluşumda en küçük dereceli x içeren terimin $a_0\neq 0$ varsayımı altında sıfıra eşitlenmesi ile indis denklemi bulunacaktır :

$$a_0\Big[c(c-1)+c-1\Big]=0 \;\Rightarrow\; c^2-1=0 \;\Rightarrow\; c_1=1,\; c_2=-1$$

Geri kalan terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile

$$a_1\Big[(1+c)^2-1\Big]=a_0c \;\Rightarrow\; a_1=\frac{a_0}{2+c}$$

$$a_2\Big[(2+c)^2-1\Big]=a_1(1+c) \;\Rightarrow\; a_2=\frac{a_1}{2+c+1}=\frac{a_1}{(2+c)(3+c)}$$

…………

olup, böylece rekürans bağıntısı,

$$a_n\Big[(n+c)^2-1\Big]=(n+c-1)a_{n-1}(n+c-1) \;\Rightarrow\; a_n=\frac{1}{n+c+1}a_{n-1}$$

olarak bulunur.

Verilen denklemin x ve c ye bağlı olarak oluşturulan çözümü,

$$y(x,c)=a_0x^c+\frac{a_0}{2+c}x^{1+c}+\frac{a_0}{(2+c)(3+c)}x^{2+c}+\cdots+\frac{a_0}{(2+c)(3+c)\cdots(n+c+1)}x^{n+c}+\cdots$$

şeklinde oluşacaktır.

$y(x,c)$ de $c_1=1$ koyalım ve $y_1(x)$ çözümünü bulalım :

$$y(x,1)=y_1(x)=a_0x\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3\cdot 4}x^2+\cdots+\frac{1}{3\cdot 4\cdots(n+1)}x^n+\cdots\right)$$

$y(x,c)$ de $c_1=-1$ koyalım ve $y_2(x)$ çözümünü bulalım :

$$y(x,-1)=y_2(x)=a_0x^{-1}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot 3\cdots n}\right)=a_0x^{-1}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)$$

dır. Genel çözüm : $y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$ yapısında olacaktır.

Örnek.

$x^2y''+xy'+\left(x^2-1\right)y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklemi önce

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-1}{x^2}y=0$$

formunda yazalım. Burada $R_1\left(x\right)=1$, $R_2\left(x\right)=x^2-1$ olup her ikisi de $x=0$ noktası civarında seriye açılabilirler, yani analitiktirler. Dolayısıyla $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır ve denklemin $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{c+n}$ formunda bir çözümü olacaktır. y' ve y'' yü oluşturalım ve y ile birlikte denklemde yerine koyalım :

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-1\right)y=x^2\left[a_0c\left(c-1\right)x^{c-2}+a_1\left(1+c\right)cx^{c-1}+a_2\left(2+c\right)\left(1+c\right)x^2+\cdots\right.$$

$$\left.+a_n\left(n+c\right)\left(n+c-1\right)x^{n+c-2}+\cdots\right]+x\left[a_0cx^{c-1}+a_1\left(1+c\right)x^c+a_2\left(2+c\right)x^{1+c}+\cdots\right.$$

$$\left.+a_n\left(n+c\right)x^{n+c-1}+\cdots\right]+\left(x^2-1\right)\left[a_0x^c+a_1x^{1+c}+a_2x^{2+c}+\cdots+a_nx^{n+c}+\cdots\right]=0$$

olup düzenlenirse,

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-1\right)y=x^c\left[a_0c\left(c-1\right)+a_0c-a_0\right]+x^{1+c}\left[a_1\left(1+c\right)c+a_1\left(1+c\right)-a_1\right]$$

$$+x^{2+c}\left[a_2\left(2+c\right)\left(1+c\right)+a_2\left(2+c\right)-a_1\left(1+c\right)-a_2+a_0\right]+\cdots$$

$$+x^{n+c}\left[a_n\left(n+c\right)\left(n+c-1\right)+a_n\left(n+c\right)+a_n-a_{n-2}\right]+\cdots$$

$$=x^c\left[\left(c^2-1\right)a_0\right]+x^{1+c}\left[\left(1+c\right)^2-1\right]a_1+x^{2+c}\left\{\left[\left(2+c\right)^2-1\right]a_2+a_0\right\}+\cdots$$

$$+x^{n+c}\left\{\left[\left(n+c\right)^2-1\right]a_n+a_{n-2}\right\}+\cdots=0$$

bulunur. Burada, en küçük dereceli x içeren terimin $a_0\neq 0$ varsayımı altında sıfıra eşitlenmesi ile indis denklemi bulunacaktır:

$$a_0\left(c^2-1\right)=0\;\Rightarrow\;c^2-1=0\;\Rightarrow\;c_1=1,\;c_2=-1$$

Geri kalan terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile

$$\left[\left(1+c\right)^2-1\right]a_1=0\;\Rightarrow\;a_1=0$$

$$\left[\left(2+c\right)^2-1\right]a_2+a_0=0\;\Rightarrow\;a_2=-\frac{a_0}{\left(2+c\right)^2-1}$$

…………

olup rekürans bağıntısı,

$$\left[\left(n+c\right)^2-1\right]a_n+a_{n-2}=0\;\Rightarrow\;a_n=-\frac{1}{\left(n+c\right)^2-1}a_{n-2},\quad n\geq 2$$

olarak bulunur.

Reküransbağıntısı ve $a_1 = 0$ gerçeği dikkate alınırsa

$$a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots = 0$$

olduğu görülecektir.

Rekürans bağıntısında $c = c_1 = 1$ koyalım:

$$a_n = -\frac{1}{(n+1)^2 - 1} = -\frac{1}{n(n+2)} a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

olur ve buradan hareketle,

$$a_2 = -\frac{1}{2(4)} a_0 = -\frac{1}{2^2 1!2!} a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4(6)} a_2 = \frac{1}{2^4 2!3!} a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6(8)} a_4 = -\frac{1}{2^6 3!4!} a_0$$

bulunur. Bunlardan genelleme yaparak

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)!} a_0 \ , \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

yazılır. İndis denkleminin $c = c_1 = 1$ köküne karşı gelen çözümü

$$y(x,c) = y(x,1) = y_1(x) = a_0 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!} x^{2n}$$

olacaktır.

Şimdi de rekürans bağıntısında $c = c_2 = -1$ kökünü koyalım :

$$a_n = -\frac{1}{(n-c)^2 - 1} a_{n-2} = -\frac{1}{n(n-2)} a_{n-2}$$

bulunur. a_2 yi bulmak amacıyla $n = 2$ koyacak olursak paydanın sıfır olması nedeniyle bir sonuç alınamayacaktır. Yani a_2, dolayısıyla $k \geq 1$ olmak üzere a_{2k} ları belirleyebilmemiz olanaklı olmayacaktır.

Bu aşamada indis denkleminin bu kökünü kullanmadan $a_2,\ a_4,\ \cdots$ katsayılarını ve $y(x,c)$ yi oluşturalım :

$$a_2 = -\frac{1}{(3+c)(1+c)} a_0 \ , \quad a_4 = -\frac{1}{(5+c)(3+c)^2(1+c)} a_0 \ , \quad \cdots$$

$$y(x,c) = a_0 \left[x^c - \frac{1}{(3+c)(1+c)} x^{2+c} + \frac{1}{(5+c)(3+c)^2(1+c)} x^{4+c} + \cdots \right] \qquad (2)$$

Şimdi $a_0 = b_0\left(c - c_2\right) = b_0\left(c+1\right)$ ile a_0 için bir seçim yapalım ve (2) de bu seçimimizi değerlendirelim:

$$y(x,c) = b_0\left(c+1\right)\left[x^c - \frac{1}{\left(3+c\right)\left(1+c\right)}x^{2+c} + \frac{1}{\left(5+c\right)\left(3+c\right)^2\left(1+c\right)}x^{4+c} + \cdots\right]$$

$$= b_0\left[\left(c+1\right)x^c - \frac{1}{\left(3+c\right)}x^{2+c} + \frac{1}{\left(5+c\right)\left(3+c\right)^2}x^{4+c} + \cdots\right]$$

$$= b_0 x^c\left[\left(c+1\right) - \frac{1}{\left(3+c\right)}x^2 + \frac{1}{\left(5+c\right)\left(3+c\right)^2}x^4 + \cdots\right]$$

Bulduğumuz bu $y(x,c)$ çözümünü, aradığımız denklemde yerine koyar ve a_i lerin arasındaki ilişkileri değerlendirecek olursak,

$$x^2 y''(x,c) + xy'(x,c) + \left(x^2 - 1\right)y(x,c) = b_0 x^c\left(c-1\right)\left(c+1\right)^2 = 0$$

elde ederiz. Bu denklemin bir çözümünü elde edebilmek olanaklı ise

$$y(x,c)\big|_{c=-1} = y(x,-1)$$

olacağı açıkça görülmektedir. Bir başka çözümü ise, aynı denklemin sağ yanında yer alan $c+1$ çarpanının kuvvetinin derecesinin 2 olması nedeniyle, dolayısıyla

$$\frac{\partial}{\partial c}\left[b_0 x^c\left(c-1\right)\left(c+1\right)^2\right] = b_0\left[x^c \ln x\left(c-1\right)\left(c+1\right)^2 + x^c\left(c+1\right)^2 + 2x^c\left(c-1\right)\left(c+1\right)\right] = 0$$

ilişkisinin $c = -1$ için de gerçeklenmesi nedeniyle

$$\frac{\partial}{\partial c}y(x,c)\Big|_{c=-1}$$

bir çözüm olacaktır.

$$\frac{\partial y(x,c)}{\partial c} = b_0 x^c \ln x\left[\left(c+1\right) - \frac{1}{3+c}x^2 + \frac{1}{\left(5+c\right)\left(3+c\right)^2}x^4 + \cdots\right]$$

$$+ b_0 x^c\left[1 + \frac{x^2}{\left(3+c\right)^2} - \frac{x^4}{\left(5+c\right)^2\left(3+c\right)^2} - \frac{2x^4}{\left(5+c\right)\left(3+c\right)^3} - \cdots\right]$$

olur. $c = c_2 = -1$ konulursa :

$$y_2(x) = \frac{\partial y\left(x,-1\right)}{\partial c} = b_0 x^{-1}\ln x\left[\left(-1+1\right) - \frac{1}{3-1}x^2 + \frac{1}{\left(5-1\right)\left(3-1\right)^2}x^4 + \cdots\right]$$

$$+ b_0 x^{-1}\left[1 + \frac{x^2}{\left(3-1\right)^2} - \frac{x^4}{\left(5-1\right)^2\left(3-1\right)^2} - \frac{2x^4}{\left(5-1\right)\left(3-1\right)^3} - \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2}b_0 x\ln x\left(1 - \frac{1}{8}x^2 + \cdots\right) + b_0\left(x^{-1} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{64}x^2 + \cdots\right)$$

olup, çözüm $y(x) = A.y_1 + B.y_2$ yapısında oluşacaktır.

05.07. Alıştırma Problemleri ve Yanıtları

1) $y''-y=0$ dif. denkleminin $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda bir çözümünü bulunuz.

Yanıt: $y=a_0\left[1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots\right]+a_1\left[x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\ldots\right]$

2) $3xy''+2y'+x^2y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Yanıt: $y=A\left(1-\frac{x^3}{24}+\frac{x^6}{2448}-\ldots\right)+Bx^{1/3}\left(1-\frac{x^3}{30}+\frac{x^6}{3420}-\ldots\right)$

3) $xy''+y'-y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Yanıt: $y=(A+B\ln x)\left(1+x+\frac{x^2}{(2!)^2}+\ldots\right)-2B\left(x+(1+\frac{1}{2})\frac{1}{(2!)^2}x^2+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{1}{(3!)^2}x^3+\ldots\right)$

4) $xy''-3y'+xy=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Yanıt:

$$y=(A+B\ln x)\left(-\frac{1}{2.2.4}x^4+\frac{1}{2.2^2.4.6}x^6-\ldots\right)+B\left(1+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^5 2!}x^4+\ldots\right)$$

6. BÖLÜM

LEGENDRE VE BESSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

06.01. Giriş

Bu bölümde konu edilecek olan diferansiyel denklemler çok özel olup, ancak kuvvet serileri ya da seriye açılımlar yoluyla incelenebildiği için burada yer almış olmaktadırlar. Bu tür denklemler, bazı çalışmalar yapılırken bilim insanlarının karşısına çıkar ve bunlarla uğraşmak yepyeni bir ilgi alanı oluşturur. İşte Legendre ve Bessel Diferansiyel denklemleri de adları denklemlere verilmiş bilim insanları tarafından bulunmuştur. Bunlardan biri Adrien Marie Legendre (1752-1833) olup kendi adıyla anılan diferansiyel denklemi bulmuştur. Bunun sonucunda, yine kendi adıyla anılan Legendre Polinomları ortaya çıkmıştır.

Bessel Diferansiyel Denklemi çok daha özel bir denklemdir. Bu denklemle ilk ilgilenen J.Bernoulli olmuşsa da denklemi tam olarak ortaya çıkaran bilim insanı Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) olmuştur. Bu denklemi, gezegenlerin hareketleri üzerine yaptığı çalışmalar sırasında geliştirmiştir. Bessel diferansiyel denklemi ve ondan elde edilen Bessel Fonksiyonları uygulamalı matematik için önemli bir denklem olup, akışkanlar mekaniği, elastisite teorisi, potansiel teori, difüzyon ve dalga yayılımı gibi çok farklı ve çeşitli alanlarda uygulanabilirliği görülmektedir. Teorik fizikte de kullanılmaktadır.

06.02. Legendre Diferansiyel Denklemi

Legendre diferansiyel denklemi, $[-1,1]$ aralığında tanımlı, ± 1 noktalarında kaldırılabilir tekilliğe sahip bir denklemdir. Kapalı formu $Ly = 0$ şeklinde gösterilir. Burada L, Legendre operatörüdür.

$$L = \frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx} + p\left(p+1\right) \; ; \quad p \in \left(0, \mathrm{Z}^+\right)$$

Denklem Frobenius yöntemi ile çözülürse ve

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \,, \; y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(n-1\right) a_n x^{n-2}$$

ifadeleri denklemde yerlerine konursa,

$$Ly = \left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + p\left(p+1\right)y$$

$$=\left(1-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}n\left(n-1\right)a_n x^{n-2}-2x\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}+p\left(p+1\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-n\left(n-1\right)-2n+p\left(p+1\right)\right]a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}n\left(n-1\right)a_n x^{n-2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[p^2-n^2+p-n\right]a_n x^n+\sum_{n=-2}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(p+n+1\right)\left(p-n\right)a_n+\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}\right]x^n$$

$$=0$$

elde edilir. Bu eşitlikten çıkan karakteristik denklem ise

$$a_2=-\frac{p\left(p+1\right)}{2}a_0$$

$$a_3=-\frac{\left(p+2\right)\left(p-1\right)}{3\cdot 2}a_1$$

....

$$a_{n+2}=-\frac{\left(p+n+1\right)\left(p-n\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}a_n$$

şeklinde bulunur. Çözümün sonlu olabilmesi için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n}\right|<1$$

şartı sağlanması gerektiğinden, karakteristik denklem yardımıyla elde edilen çözümün sonlu olması, ancak $n=-p$ veya $n=-\left(p+1\right)$ şeklinde serinin kesilmesi ile olur. Bu şekilde oluşan polinomlara *Legendre Polinomları* denir, dolayısıyla bu polinomlar Legendre diferansiyel denkleminin çözümüdür.

Örnek.

p pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+p\left(p+1\right)y=0$$

diferansiyel denklemine, *Legendre Diferansiyel Denklemi* denir. Legendre diferansiyel denkleminin $x=0$ civarında bir çözümünün p-inci dereceden bir polinom olduğunu gösterelim.

$x=0$ adi bir noktadır. Bu nedenle $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ formunda bir çözümünü arayabiliriz.

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}\ ,\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$$

olup, bu değerler ile denkleme gidelim:

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+p\left(p+1\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+p\left(p+1\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

olup, bunu düzenleyelim:

$$\left[2a_2+\left(p^2+p\right)a_0\right]+x\left[6a_3+\left(p^2+p-2\right)a_1\right]+\cdots$$

$$+x^n\left[\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}+\left(p^2+p-n^2-n\right)a_n\right]+\cdots=0$$

olur. $p^2+p-n^2-n=\left(p-n\right)\left(p+n+1\right)$ olduğunu dikkate alarak,

$$a_{n+2}=-\frac{\left(p-n\right)\left(p+n+1\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}a_n$$

rekürans bağıntısını elde edelim.

Bu bağıntıyı değerlendirerek a_n büyüklüklerini a_0 ve a_1 cinsinden ifade edelim:

$$a_2=-\frac{p\left(p+1\right)}{2.1}a_0$$

$$a_3=-\frac{\left(p-1\right)\left(p+2\right)}{3.2}a_1$$

$$a_4=-\frac{\left(p-2\right)\left(p+3\right)}{4.3}a_2=\frac{\left(p-2\right)p\left(p+1\right)\left(p+3\right)}{4!}a_0$$

$$a_5=-\frac{\left(p-3\right)\left(p+4\right)}{5.4}a_3=\frac{\left(p-3\right)\left(p-1\right)\left(p+2\right)\left(p+4\right)}{5!}a_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a_n lerin bu değerlerini $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ de yerine koyalım ve düzenleyelim:

$$y=a_0\left(1-\frac{p\left(p+1\right)}{2!}x^2+\frac{\left(p-2\right)p\left(p+1\right)\left(p+3\right)}{4!}x^4-\cdots\right)$$

$$+a_1\left(x-\frac{\left(p-1\right)\left(p+2\right)}{3!}x^3+\frac{\left(p-3\right)\left(p-1\right)\left(p+2\right)\left(p+4\right)}{5!}x^5-\cdots\right)=a_0y_1+a_1y_2$$

bulunur.

Rekürans bağıntısında yer alan $p-n$ çarpanını dikkate alarak $n=p$ için $a_{p+2}=0$ olduğunu, dolayısıyla

$$a_{p+4}=a_{p+6}=a_{p+8}=\cdots=0$$

olacağını söyleyebiliriz. Buna göre şu değerlendirmeyi yapabiliriz:

(i) p pozitif tek tam sayı ise $n > p$ olmak üzere tüm tek indisli a_n ler sıfırdır.

(ii) p pozitif çift tam sayı ise $n > p$ olmak üzere tüm çift indisli a_n ler sıfırdır.

Bunun anlamı : y_1 veya y_2 nin derecesi en büyük olan x^p olmak üzere sonlu sayıda terim içermesidir ; yani p -inci dereceden bir polinom olmasıdır.

Son bağıntıda $a_1 = 0$ seçelim. $y(1) = 1$ koşulu gerçeklenmek kaydıyla $p = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots$ için a_0 ın alacağı değerler ve buna bağlı olarak y nin

edindiği yapılar *Legendre Polinomları* olarak adlandırılır. Aşağıda bu polinomlardan bazıları verilmiştir:

$$P_0(x) = 1, P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right), \cdots$$

Şimdi de aynı bağıntıda $a_0 = 0$ seçelim. Yine $y(1) = 1$ başlangıç koşulu gerçeklenmek kaydıyla $p = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ koyalım; böylece elde edilen *Legendre Polnomları*'ndan üç tanesi daha aşağıda verildiği gibidir :

$$P_1(x) = x, P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right), \ldots$$

06.03. Bessel Diferansiyel Denklemi

p -inci mertebeden bir *Bessel Diferansiyel Denklemi*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right) y = 0$$

şeklindedir. Frobenius yöntemi ile bir çözümünü araştıralım.

Denklemi önce

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2} y = 0$$

formunda yazalım. Burada $R_1(x) = 1$, $R_2(x) = x^2 - p^2$ olup her ikisi de $x = 0$ noktası civarında seriye açılabilirler, yani analitiktirler. Dolayısıyla $x = 0$ noktası bir düzgün tekil noktadır ve denklemin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{c+n}$$

formunda bir çözümü olacaktır.

$y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{c+n}$ i ve buradan hareketle oluşturulan y' ve y'' değerlerini denklemde yerine koyduktan sonra gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,

$$x^c\left(c^2 - p^2\right)a_0 + x^{c+1}\left[(c+1)^2 - p^2\right]a_1 + x^{c+2}\left\{\left[(c+2)^2 - p^2\right]a_2 + a_0\right\} + \cdots$$

$$+x^{c+n}\left\{\left[(c+n)^2-p^2\right]a_n+a_{n-2}\right\}+\ \cdots\ =0$$

olup buradan da,

$$\left(c^2-p^2\right)a_0=0\ ,\ \left[(c+1)^2-p^2\right]a_1=0\ ,\ \left[(c+n)^2-p^2\right]a_n+a_{n-2}=0$$

buluruz.

a_n ile a_{n-2} arasında oluşan reküruans bağıntısı

$$a_n=-\frac{1}{(c+n)^2-p^2}a_{n-2}$$

şeklinde oluşacaktır.

İndis denklemi $c^2-p^2=0$ ve kökleri, p negatif olmamak üzere p ve $-p$ dir. $c=p$ olgusunu reküruans bağıntısında kullanırsak $a_1=0$ ve

$a_n=-\dfrac{1}{n(2p+n)}a_{n-2}$, $n\geq 2$ ve dolayısıyla $a_1\ =\ a_3\ =\ a_5\ =\ \cdots$ ve

$$a_2=-\frac{1}{2^2 1!(p+1)}a_0$$

$$a_4=-\frac{1}{2^2 2(p+2)}a_2=\frac{1}{2^4 2!(p+2)(p+1)}a_0$$

$$a_6=-\frac{1}{2^2 3(p+3)}a_4=\frac{1}{2^6 3!(p+3)(p+2)(p+1)}a_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(p+k)(p+k-1)\ \cdots\ (p+2)(p+1)}a_0\qquad (k\geq 1)$$

bulunur. Aradığımız çözüm :

$$y_1(x)=x^c\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=x^p\left[a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}x^{2k}\right]$$

$$=a_0x^p\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}k!(p+k)(p+k-1)\ \cdots\ (p+2)(p+1)}\right]$$

olacaktır. a_0 büyüklüğü, genel olarak $a_0=\dfrac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ olarak seçilir. Bu seçimi son ifade için değerlendirelim :

$$y_1(x)=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}x^p+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}=J_p(x)$$

elde edilir.

Örnek.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k-1}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+p+1}k!\Gamma(p+k+2)}$$ bağıntısın gerçekleyelim.

Önce $k=0$ a karşı gelen terimi diğerlerinden ayırarak

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k-1}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}=0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k-1}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}$$

yazalım. Şimdi de $j=k-1$ değişken dönüşümünü yapalım :

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}2(j+1)x^{2(j+1)-1}}{2^{2(j+1)+p}(j+1)!\Gamma(p+j+1+1)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)(-1)^j 2(j+1)x^{2j+1}}{2^{2j+p+2}(j+1)!\Gamma(p+j+2)}$$

$$=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j 2(j+1)x^{2j+1}}{2^{2j+p+1}(2)(j+1)(j!)\Gamma(p+j+2)}=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j x^{2j+1}}{2^{2j+p+1}(j!)\Gamma(p+j+2)}$$

Örnek.

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p+2}}{2^{2k+p+1}k!\Gamma(p+k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}$$

bağıntısını gerçekleyelim.

$j=k+1$ değişken dönüşümünü yapalım:

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p+2}}{2^{2k+p+1}k!\Gamma(p+k+2)}=--\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}x^{2(j-1)+p+2}}{2^{2(j-1)+p+1}(j-1)!\Gamma(p+j-1+2)}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j x^{2j+p}}{2^{2j+p-1}(j-1)!\Gamma(p+j+1)}$$

olup son toplamda pay ve paydayı $2j$ ile çarparak,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(2j)x^{2j+p}}{2^{2j+p}\,j!\Gamma(p+j+1)}$$

bulunur. Bu yapıdaki bir toplamı $j=1$ den değil, $j=0$ dan başlatırsak $j=0$ a karşı gelen terim sıfır olacağından herhangi bir şey değişmez, yani,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j}(2j)x^{2j+p}}{2^{2j+p}\,j!\Gamma(p+j+1)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}(2j)x^{2j+p}}{2^{2j+p}\,j!\Gamma(p+j+1)}$$

yazabiliriz. Bu son oluşumda da j yerine k alacak olursak istenen sonuç elde edilmiş olur.

Örnek.

$\dfrac{d}{dx}\left[x^{p+1}J_{p+1}(x)\right]=x^{p+1}J_{p}(x)$ bağıntısını gerçekleyelim.

Bessel fonksiyonunu temsil eden seriyi terim terim türetelim:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{p+1}J_{p+1}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[x^{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k+p+1}}{2^{2k+p+1}\,k!\Gamma(k+p+1+1)}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k+2p+2}}{2^{2k+p}\,(2)k!\Gamma(k+p+2)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(2k+2p+2)x^{2k+2p+1}}{2^{2k+p}\,k!2\Gamma(k+p+2)}$$

ve $2\Gamma(k+p+2)=2(k+p+1)\Gamma(k+p+1)$

ilişkisi dikkate alınırsa, pay ve paydada bulunan $2(k+p+1)$ çarpanlarının sadeleşeceği ve

$$\frac{d}{dx}\left[x^{p+1}J_{p+1}(x)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k+2p+1}}{2^{2k+p}\,k!\Gamma(k+p+1)}=x^{p+1}J_{p}(x)$$

ilişkisine ulaşılacağı görülecektir.

Özel olarak $p=0$ ise;

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_{1}(x)\right]=xJ_{0}(x)$$

olacaktır.

Örnek.

$xJ'_{p}(x)=-pJ_{p}(x)+xJ_{p-1}(x)$ bağıntısını gerçekleyelim.

Öncelikle

$$-pJ_{p}(x)+xJ_{p-1}(x)=-p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k+p}}{2^{2k+p}\,k!\Gamma(p+k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k+p-1}}{2^{2k+p-1}\,k!\Gamma(p+k)}$$

yazalım. Şimdi de eşitliğin sağ yanında yer alan ikinci toplamın payını ve paydasını $2(p+k)$ ile çarpalım ve $(p+k)\Gamma(p+k)=\Gamma(p+k+1)$ ilişkisini dikkate alalım :

$$-pJ_p(x)+xJ_{p-1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-p)^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(p+k)x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left[-p+2(p+k)\right]x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+p)x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}=xJ_p'(x)$$

Örnek.

$y=xJ_1(x)$'in $xy''-y'-x^2J_0'(x)=0$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim.

$J_1(x)$, mertebesi 1 olan Bessel diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

$$x^2J_1''(x)+xJ_1'(x)+(x^2-1)J_1(x)=0$$

olarak diferansiyel denklemi sağlar.

Verilen denklemde $y=xJ_1(x)$ koyalım :

$$x\left[xJ_1(x)\right]''-\left[xJ_1(x)\right]'-x^2J_0'(x)=x\left[2J_1'+xJ_1''(x)\right]-\left[J_1(x)+xJ_1'(x)\right]-x^2J_0'(x)$$

olarak $J_0'(x)=-J_1(x)$ ilişkisini ve yukarıdaki bağıntıyı dikkate alarak yeniden düzenleyelim :

$$x^2J_1''+2xJ_1'(x)-J_1(x)-xJ_1'(x)+x^2J_1(x)=x^2J_1''(x)+xJ_1'(x)+(x^2-1)J_1(x)=0$$

bulunur.

Örnek.

$y=\sqrt{x}J_{3/2}(x)$ in $x^2y''+(x^2-2)y=0$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim.

$J_{3/2}(x)$, mertebesi $\frac{3}{2}$ olan Bessel diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

$$x^2J_{3/2}''(x)+xJ_{3/2}'(x)+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)J_{3/2}(x)=0$$

Verilen denklemde $y=\sqrt{x}J_{3/2}(x)$ koyalım :

$$x^2\left[\sqrt{x}J_{3/2}(x)\right]''+(x^2-2)\sqrt{x}J_{3/2}(x)=$$

yazılırsa, ara işlemlerden sonra

$$=\sqrt{x}\left[x^2J_{3/2}''(x)+xJ_{3/2}'(x)+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)J_{3/2}(x)\right]=0$$

olur. Bu sonuç, ilk bağıntı dikkate alınarak bulunur.

7. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİNDE SAYISAL HESABIN KULLANILMASI

07.01. Giriş

Diferansiyel denklemler kısmi analitik çözümlere sahiptirler. Ancak, uygu-lamalı bilimlerde karşılaşılan diferansiyel denklemlerin büyük bir çoğunluğu analitik olarak, kapalı çözümler vermezler. Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri için sayısal yöntemlerin hemen hemen hepsi belli noktalarda belli sayısal sonuçlar verir, fakat problem bir çözüme sahip değilse bunların hiçbir anlamı yoktur.

n. mertebeden adi diferansiyel denklem eğer $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ konumuna getirilebiliyorsa ve ilk bölümde ifade edilen Lipschitz koşullarını sağlıyorsa, bu domende böyle bir diferansiyel denklemin $G\left(X, Y, c_1, ..., c_n\right) = 0$ şeklindeki genel çözümü n tane keyfi sabit içeren bir eğri ailesidir.

Diferansiyel denklem hangi türden olursa olsun, belli koşullarda çözüm eğrisi üzerindeki noktaların sayısal olarak belirlenmesi *Sayısal Çözüm* olarak ifade edilir. Her çözümde esas, diferansiyel denklemi 1. mertebeden bir adi diferansiyel denkleme ya da adi diferansiyel denklem sistemine indirgemektir. Yani diferansiyel denklemin sayısal çözümlerde, $f\left(x, y, y'\right) = 0$ şeklinde 1. mertebeden adi diferansiyel denklemin sayısal çözümlerinden hareket edilir.

Adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde çözüm eğrisi ya da çözüm yüzeyini bulmak için bazı koşulların verilmesi gerekir. Verilen bu ön koşullara göre diferansiyel denklemler gruplara ayrılır.

07.02. Başlangıç Değer Problemleri

$f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$ şeklinde n. mertebeden adi diferansiyel denklemin $x = a$ (başlangıç noktasında) $y(a), y'(a), ..., y^{n}(a)$ gibi n tane değeri veriliyorsa, bu **Başlangıç Değer Problemi** adını alır. Burada hedef, bu noktanın sağına ya da soluna doğru hareket ederek diğer noktalardaki çözümlerin bulunmasıdır.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

şeklindeki başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği aşağıdaki teoremlerle gösterilebilir.

07.03. Teorem. (Varlık Teoremi)

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu, $R=\{(x,y):|x-x_0|\le\alpha,|y-y_0|\le\beta\}$ şeklinde tanımlanmış bir R dikdörtgen bölgesinde sürekli ise başlangıç değer problemi $|x-x_0|\le\min(\alpha,\beta/M)$ için $y(x)$ şeklinde bir çözüme sahiptir. Burada M, R dikdörtgen bölgesinde $f(x,y)$ nin maksimum değeridir.

07.04. Teorem (Teklik Teoremi)

Eğer $f(x,y)$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $R=\{(x,y):|x-x_0|\le\alpha,|y-y_0|\le\beta\}$ şeklinde tanımlanmış bir dikdörtgen bölgede sürekli iseler, başlangıç değer problemi $|x-x_0|\le\min(\alpha,\beta/M)$ aralığında tek bir çözüme sahiptir.

07.05. Sınır Değer Problemleri

$f\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0$ şeklindeki n. mertebeden adi diferansiyel denklemim tanımlı olduğu aralıkta 2 veya daha fazla noktada toplam olarak n tane değeri biliniyorsa buna **Sınır Değer Problemi** denir.

$$\begin{cases} x''=f(t,x,x') \\ x(a)=\alpha, x'(a)=\beta \end{cases}$$

şeklindeki başlangıç değer problemi $x_1=x$ ve $x_2=x'$ denerek aşağıdaki şekilde 1. derece bir denklem sistemine dönüştürülebilir.

$$\begin{cases} x_1'=x_2 & x_1(a)=\alpha \\ x_2'=f(t,x,x') & x_2(a)=\beta \end{cases}$$

Bu şekilde problem kolayca çözülebilir.

Ancak, $\begin{cases} x''=f(t,x,x') \\ x(a)=\alpha, x(b)=\beta \end{cases}$ şeklindeki problem için başlangıç değer problem yöntemleri uygun olmayacaktır. Bu problem tipik bir sınır değer problemidir.

07.06. Seri Yöntemleri

07.06.01. Taylor Serisi Yöntemi

$y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ başlangıç değer problemi verilsin.
$y(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...$ şeklinde bir özel çözüm alınsın. $x=x_0$ da $y(x_0)$, $y'(x_0),\ldots,y^{(n-1)}(x_0)$ türevleri mevcutsa, diferansiyel denklemin çözümü seri yöntemiyle hesaplanabilir. Aranan $y(x)$ fonksiyonu x_0 noktası civarında Taylor serisine açılırsa

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ...$$

veya $x = x_0 + h$ ise

$$y(x) = y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}h^3 + ...$$

yazılabilir. Serinin türev değerlerine bakacak olursak;

$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = f'(x, y) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'$$

$$\begin{aligned} y''' = f''(x, y) &= [f_x(x, y) + f_y(x, y)y']' \\ &= f_{xx}(x, y) + f_{xy}(x, y)y' + f_{xy}(x, y)y' + f_{yy}(x, y)y'^2 + f_y(x, y)y'' \\ &= f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)y' + f_{yy}(x, y)y'^2 + f_y(x, y)y'' \end{aligned}$$

Örnek.

$\frac{dy}{dx} = x - y$ ve $x_0 = 1, y_0 = 2$ başlangıç şartları veriliyor. $h = 0.2$ için Taylor serisini ilk 3 terime açarak y_1 ve y_2 değerlerini bulunuz.

$$y_1 = y(1.2) = y(1 + 0.2) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(0.2) + \frac{y''(1)}{2!}(0.2)^2$$

$$y(1) = 2$$

$$y'(1) = 1 - 2 = -1$$

$$y'' = 1 - y' \Rightarrow y''(1) = 1 - (-1) = 2$$

$$y_1 = 2 - 1(0.2) + \frac{2}{2}(0.04) = 1.84$$

$$y_2 = y(1.4) = y(1.2 + 0.2) = y(1.2) + \frac{y'(1.2)}{1!}(0.2) + \frac{y''(1.2)}{2!}(0.2)^2$$

$$y(1.2) = 1.84$$

$$y'(1.2) = 1.2 - 1.84 = -0.64$$

$$y''(1.2) = 1 - (-0.64) = 1.64$$

$$y_2 = 1.84 - 0.64(0.2) + \frac{1.64}{2}(0.04) = 2.04$$

Örnek.

$y' = t + 3\frac{y}{t}$, $y(1) = 0$ başlangıç değer problemi verilsin. $h = 0.2$ olmak üzere $y(1.2)$ değerini Taylor seri yöntemi ile toplama 4 terim katarak bulunuz.

$$y(1.2) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(0.2) + \frac{y''(1)}{2!}(0.2)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(0.2)^3$$

$$y(1) = 0$$

$$y'(1) = 1 + 3\frac{0}{1} = 1$$

$$y'' = 1 + 3\frac{y'}{t} - 3\frac{y}{t^2} \Rightarrow y''(1) = 1 + 3\frac{1}{1} - 3\frac{0}{1} = 4$$

$$y''' = 3\frac{y''}{t} - 6\frac{y'}{t^2} + 6\frac{y}{t^3} \Rightarrow y'''(1) = 3\frac{4}{1} - 6\frac{1}{1} + 6\frac{0}{1} = 6$$

$$y(1.2) = 0 + 1(0.2) + \frac{4}{2}(0.04) + \frac{6}{6}(0.008) = 0.288$$

07.06.02. Picard İterasyon Yöntemi

$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemi verilsin. $\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow dy = f(x,y)dx$ haline gelir. Bunun her iki yanını $[x_0, x]$ aralığında integre edersek;

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$ elde edilir. y' için ilk yaklaşım y yerine y_0 koymakla elde edilir.

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx$$

Bunu y için verilen denklemde yerine koyup tekrar integre edersek

$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx$ ikinci yaklaşımını elde ederiz. İşlem, bu yolla istenilen sayıda tekrar edilirse n. yaklaşım

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx$$

olarak bulunur.

Örnek.

$y' = x + y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin $x = 0.1$'deki çözümünü Picard yöntemi ile 3 iterasyonla bulunuz.

$$dy = (x+y)dx \Rightarrow \int_0^x dy = \int_0^x (x+y)dx \Rightarrow y(x) = y(0) + \int_0^x (x+y)dx$$

$$y_1 = y(0) + \int_0^x (x+y_0)dx = 1 + \int_0^x (x+1)dx = 1 + \frac{x^2}{2} + x$$

$$y_2 = y(0) + \int_0^x (x+y_1)dx = 1 + \int_0^x (x+1+x+\frac{x^2}{2})dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

$$y_3 = y(0) + \int_0^x (x+y_2)dx = 1 + \int_0^x (x+1+x+x^2+\frac{x^3}{6})dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$y(x) \cong y_3(x) \Rightarrow y(0.1) \cong y_3(0.1)$$

$$y_3(0.1) = 1 + (0.1) + (0.1)^2 + \frac{(0.1)^3}{3} + \frac{(0.1)^4}{24} = 1.11032$$

07.07. Tek Adım Yöntemleri

Bir $y' = f(x,y)$ başlangıç değer probleminin her bir adımdaki çözümünü, bir önceki adımda verilenler yardımıyla yaklaşık olarak bulmayı sağlayan yöntemler, tek adım yöntemleri olarak adlandırılır.

07.07.01. Euler Yöntemi

Taylor serisinin ilk iki terimini alarak hesaplanan ve birinci mertebeden türevleri kapsayan açınım Euler yöntemidir. Bu yöntemde bir x_i noktasındaki bağımlı değişkenin değeri, önceki noktadan geçen bir doğru boyunca ekstrapolasyon ile bulunur.

$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer probleminin $y(x_0 + h)$ değeri ;

$$y(x_0 + h) = y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

şeklinde elde edilir.

$x_1 = x_0 + h$ alırsak,

$$y(x_1) = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

$x_2 = x_0 + 2h$ alırsak,

$$y(x_2) = y(x_1) + hf(x_1, y_1)$$

şeklinde devam edersek ;

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \text{ elde edilir.}$$

Örnek.

$y' = \dfrac{2x+y}{2y-x}$ ve $y(1)=0$ başlangıç değer problemi veriliyor. $y(1.2)$ ve $y(1.4)$ değerlerini Euler yöntemi ile bulunuz.

$$f(x,y) = \frac{2x+y}{2y-x},\; x_0 = 1,\; y_0 = 0,\; h = 0.2$$

$$y(x_1) = y(x_0) + hf(x_0, y_0) \Rightarrow y(1.2) = y(1) + (0.2) f(1,0)$$

$$\Rightarrow y(1.2) = 0 + (0.2)\frac{2(1)+0}{2(0)-1} = -0.4$$

$$y(x_2) = y(x_1) + hf(x_1, y_1) \Rightarrow y(1.4) = y(1.2) + (0.2) f(1.2, -0.4)$$

$$\Rightarrow y(1.4) = -0.4 + (0.2)\frac{2(1.2)-0.4}{2(-0.4)-1.2} = -0.6$$

Örnek.

$y' = x + 3\dfrac{y}{x}$ ve $y(1)=0$ başlangıç değer problemi ve $h=0.2$ veriliyor.

a) $y(1.2)$ değerini 4 terime açarak Taylor seri yöntemi ile
b) $y(1.4)$ değerini Euler yöntemi ile bulunuz.

a) $y(1.2) = y(1) + y'(1)(0.2) + \dfrac{y''(1)}{2!}(0.2)^2 + \dfrac{y'''(1)}{3!}(0.2)^3$

$$y(1) = 0$$
$$y'(1) = 1$$

$$y'' = 1 + 3\left(\frac{y'x - y}{x^2}\right) \Rightarrow y''(1) = 4$$

$$y''' = 3\left(\frac{y''x - y'}{x^2} - \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}\right) \Rightarrow y'''(1) = 6$$

$$y_1 = y(1.2) = 0 + 1(0.2) + \frac{4}{2}(0.04) + \frac{6}{6}(0.008) = 0.288$$

b) $y_2 = y_1 + hf(x_0, y_0)$

$$y_2 = y(1.4) = 0.288 + (0.2)\left(1.2 + 3\frac{0.288}{1.2}\right) = 0.672$$

Örnek.

$y' + y = 3x$ ve $y(0)=1$ başlangıç değer problemi verilsin. $h=0.2$ için $[0,1]$ aralığındaki değerleri Euler yöntemi ile hesaplayınız.

$$y' = f(x, y) = 3x - y$$

$$f(0.2) = y(0) + (0.2)f(0,1) = 1 + (0.2)(3(0) - 1) = 0.8$$

$$f(0.4) = y(0.2) + (0.2)f(0.2, 0.8) = 0.8 + (0.2)(3(0.2) - 0.8) = 0.76$$

$$f(0.6) = y(0.4) + (0.2)f(0.4, 0.76) = 0.76 + (0.2)(3(0.4) - 0.76) = 0.848$$

$$f(0.8) = y(0.6) + (0.2)f(0.6, 0.848) = 0.848 + (0.2)(3(0.6) - 0.848) = 1.0384$$

$$f(1) = y(0.8) + (0.2)f(0.8, 1.384) = 1.0384 + (0.2)(3(0.8) - 1.0384) = 1.31072$$

07.07.02. Düzeltilmiş Euler ve Huen Yöntemi

Bu yöntemde sadece birinci adımda eğri üzerindeki bir noktadan başlanır. Daha sonraki adımlarda hep eğrinin dışında olan noktalarda hareket söz konusu olduğundan başlangıç noktasından uzaklaştıkça hataların büyüyeceği açıktır. Bu hataları bir miktar gidermek için integral hesaptan faydalanarak değişik formüller kullanılır.

1) $y_{i+1} = y_i + hf_i$ (Basit Euler Formülü)

2) $y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f_i)$ (Euler Orta Nokta Formülü)

3) $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f_i + f(x_i + h, y_i + hf_i)]$ (Euler Yamuk Formülü-Huen Yöntemi)

Örnek.

$y' = y - t^2 + 1$ ve $y(0) = 0.5$ başlangıç değer probleminin $t = 0.2$ deki çözümünü

a) Euler Orta Nokta formülü ile
b) Euler Yamuk formülü ile bulunuz.

a) $f(t, y) = y - t^2 + 1$, $t_0 = 0$, $y_0 = 0.5$, $h = 0.2$

$$y_1 = y_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_0)$$

$$f_0 = f(0, 0.5) = 0.5 - 0 + 1 = 1.5$$

$$y_1 = 0.5 + (0.2)f(0 + \frac{0.2}{2}, 0.5 + \frac{0.2}{2}1.5) = 0.5 + (0.2)f(0.1, 0.65) = 0.828$$

b) $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f_0 + f(t_0 + h, y_0 + hf_0)]$

$$y_1 = 0.5 + \frac{0.2}{2}[1.5 + f(0.2, 0.5 + 0.2(1.5))] = 0.826$$

07.07.03. Runge-Kutta Yöntemleri

a) II. Mertebe Runge-Kutta :

Runge-Kutta yöntemleri yüksek mertebeden türevleri hesaplamaya katmadan, Taylor serisi temelinde geliştirilen yöntemlerin, istenen eğim değerinin doğruluğunun belirlenmesi esasına dayanır.

$y' = f(x,y)$ ve $y(x_i) = y_i$ verilmiş olsun. $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere x_{i+1} noktasındaki $y(x_{i+1}) \cong y_{i+1}$ çözümü,

$k_1 = hf(x_i, y_i)$

$k_2 = hf(x_i + mh, y_i + mk_1)$ olmak üzere

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 \qquad (1)$$

şeklinde bulunur. Burada a, b ve m sabittirlerdir. $y(x)$ fonksiyonunu 2.mertebeden türevli terimlere kadar Taylor serisine açarsak

$$y(x) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2$$

$x = x_{i+1}$ alırsak ve $y''(x_i)$ yerine $f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)$ yazarsak,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x_{i+1} - x_i) + \frac{f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \qquad (2)$$

elde edilir.

$$f(x_i + mh, y_i + mk_1) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} mh + \frac{\partial f}{\partial y} mk_1$$

olacağından

$$k_2 = hf(x_i + mh, y_i + mk_1) = h\left[f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} mh + \frac{\partial f}{\partial y} mk_1 \right] = hf(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} mh^2 + \frac{\partial f}{\partial y} mhk_1$$

yazılır. $k_1 = hf(x_i, y_i)$ ve $k_2 = hf(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} mh^2 + \frac{\partial f}{\partial y} mhk_1$ değerlerini (1) de yerine yazarsak ;

$$y_{i+1} = y_i + ahf(x_i, y_i) + b\left[hf(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} mh^2 + \frac{\partial f}{\partial y} mhk_1 \right]$$

$$y_{i+1} - y_i = (a+b)hf(x_i, y_i) + bmh\left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k_1 \frac{\partial f}{\partial y} \right] \qquad (3)$$

(2) ile (3) ü birbirine eşitlersek ;

$$f(x_i, y_i)h + \left[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i) \right] \frac{h^2}{2}$$
$$= (a+b)hf(x_i, y_i) + bmh^2 \left[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i) \right]$$

Buradan $a+b=1$ ve $bm=\frac{1}{2}$ denklemleri çıkar. İki denklem ve üç bilinmeyen olduğundan biri keyfi sabit olarak seçilir.

$m=1$ alınırsa $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ olur. Bu durumda,

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i+h, y_i+k_1) \end{aligned}\right\} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

olarak bulunur.

b) IV. Mertebe Runge-Kutta :

Taylor serisine 4.mertebeden türevleri de eklersek

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i+mh, y_i+mk_1)$$

$$k_3 = hf(x_i+nh, y_i+nk_2)$$

$$k_4 = hf(x_i+rh, y_i+rk_3)$$

olmak üzere

$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$ şeklinde bulunur.

a, b, c, d, m, n ve r değerlerini hesaplamak istersek, yedi bilinmeyenli, yediden az denklem ile lineer ya da lineer olmayan denklem sistemi ortaya çıkar. O halde

$m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{2}, r=1, a=\frac{1}{6}, b=\frac{1}{3}, c=\frac{1}{3}$ ve $d=\frac{1}{6}$ olarak seçersek ;

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i+\frac{1}{2}h, y_i+\frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i+\frac{1}{2}h, y_i+\frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i+h, y_i+k_3)$$

ve

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

olarak bulunur.

Örnek.

$y' = -xy^2$ ve $y(2) = 1$ başlangıç değer problemi veriliyor. $h = 0.1$ için 2.mertebe Runge-Kutta ile çözünüz.

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = (0.1)f(2,1) = (0.1)(-2(1)) = -0.2$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = (0.1)f(2.1, 0.8) = (0.1)(-2.1(0.8)^2) = -0.1344$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(-0.2 - 0.1344) = 0.8328$$

Örnek.

$y' + y = 3x$ ve $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi verilsin. $x = 0.2$ deki çözümü 2. ve 4. mertebeden Runge-Kutta ile çözünüz.

2.mertebe :

$$y' = f(x, y) = 3x - y$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = (0.2)f(0,1) = -0.2$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = (0.2)f(0.2, -0.8) = -0.04$$

$$y(0.2) = y(0) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(-0.2 - 0.04) = 0.88$$

4.mertebe :

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = (0.2)f(0,1) = -0.2$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = (0.2)(3(0.1) - 0.8) = -0.1$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = (0.2)(3(0.1) - 0.95) = -0.13$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = (0.2)(3(0.2) - 0.87) = -0.054$$

$$y(0.2) = y(0) + \frac{1}{6}\left[-0.2 + 2(-0.1) + 2(-0.13) - 0.054\right] = 0.881$$

07.08. Çok Adım Yöntemleri

Çok adımlı yöntemlerin çoğunda çözüme başlarken kullanılabilecek bazı bilgiler mevcuttur. Bu bilgiler elde olduğuna göre, bu bilgileri kullanarak çok nokta kullanan bir yönteme dönüştürülebilir. Bu yöntemlerin temel prensibi, geçmiş bağımlı değişken değeri(y) ve/veya bağımlı değişken türev (y') değerleri kullanılarak bu değerlere eğri uydurup, bulunan fonksiyonun entegralini alıp çözüme ulaşmayı hedeflemektir.

07.08.01. Adams Yöntemi

Bu yöntem, diğer yöntemlere göre çok daha fazla kullanılan ve kararsızlıkları olmayan bir yöntem olarak bilinir.

İki Noktalı Adams Yöntemi : $y' = f(x,y)$ diferansiyel denklemi verilsin. x_{i-1} ve x_i noktalarındaki y_{i-1} ve y_i değerlerinin bilindiğini varsayalım. O halde verilen diferansiyel denklemi integre edelim (x_i 'den x_{i+1} 'e).

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y) \Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx$$

$f(x,y(x)) = a_0 + a_1 x$ şeklinde kabul edilirse ;

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (a_0 + a_1 x)dx$$

$x_{i-1} = -h$, $x_i = 0$, $x_{i+1} = h$ alınırsa ;

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + a_0 h + a_1 \frac{h^2}{2}$$

elde edilir. Burada a_0 ve a_1 bilinmeyendir. Bunların bulunabilmesi için $f(x,y(x)) = a_0 + a_1 x$ fonksiyonu (x_{i-1}, f_{i-1}) ve (x_i, f_i) noktalarından geçeceğine göre ;

$f_i = a_0 + a_1 x_i$

$f_{i-1} = a_0 + a_1 x_{i-1}$ ve $x_i = 0$, $x_{i-1} = -h$ yazılırsa ;

$a_0 = f_i$ ve $a_1 = \frac{1}{h}(f_i - f_{i-1})$ elde edilir. Bu değerleri denklemde yerine yazarsak;

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$ elde edilir.

Örnek.

$y' = -x + y$ ve $y(0) = 2$ başlangıç değer problemi veriliyor. $y(0.1)$ değerini Euler yöntemiyle hesapladıktan sonra $y(0.2)$ değerini iki noktalı Adams kestirme yöntemini kullanarak bulunuz.

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_1 = 2 + (0.1)f(0,2) = 2 + (0.1)2 = 2.2$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0), \quad f_1 = -0.1 + 2.2 = 2.1$$

$$y_2 = 2.2 + \frac{0.1}{2}(3(2.1) - 2) = 2.415$$

Üç Noktalı Adams Yöntemi : $y' = f(x,y)$ diferansiyel denklemi verilsin. Bu denklemi kullanarak $y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u, y(u))du$ ifadesini yazabiliriz. İntegral içerisindeki polinom 2.dereceden bir polinom olarak alınırsa

$f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ olacağından

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (a_0 + a_1u + a_2u^2)du$$

ve $x_i = 0$, $x_{i+1} = h$ alınırsa ;

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + a_0h + a_1\frac{h^2}{2} + a_2\frac{h^3}{3} = y(x_i) + h(a_0 + a_1\frac{h}{2} + a_2\frac{h^2}{3})$$

elde edilir. Burada a_0 , a_1 ve a_2 bilinmeyenlerdir. Bunların bulunabilmesi için $f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ fonksiyonunun (x_i, f_i), (x_{i-1}, f_{i-1}), (x_{i-2}, f_{i-2}) noktalarından geçme koşulu kullanılırsa ;

$f_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2$

$f_{i-1} = a_0 + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-1}^2$

$f_{i-2} = a_0 + a_1x_{i-2} + a_2x_{i-2}^2$ ve $x_i = 0$, $x_{i-1} = -h$, $x_{i-2} = -2h$ yazılırsa;

$f_i = a_0$

$f_{i-1} = a_0 - a_1h + a_2h^2$

$f_{i-2} = a_0 - 2a_1h + 4a_2h^2$ denklemlerinden;

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(5f_{i-2} - 16f_{i-1} + 23f_i)$$

elde edilir.

Örnek.

$y' = y + x^2$ ve $y(0) = -1$ başlangıç değer problemi veriliyor. $h = 0.5$ alarak çözüme ait iki noktayı Euler formülü ile elde ettikten sonra $y(1.5)$ değerini üç nokta Adams kestirme yöntemi ile bulunuz.

$$y_1 = y(0.5) = y(0) + (0.5)f(0,-1) = -1 + (0.5)(-1) = -1.5$$

$$y_2 = y(1) = y(0.5) + (0.5)f(0.5,-1.5) = -1.5 + (0.5)(-1.25) = -2.125$$

$$y_3 = y(1.5) = y(1) + \frac{0.5}{6}[5(-1) - 16(-1.25) + 23(-1.125)] = -4.84375$$

Dört Noktalı Adams Yöntemi :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(-9f_{i-3} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i)$$

07.08.02. Adams-Bashforth-Moulton Yöntemi

Bu yöntemde kestirme yöntemlerinde bulunan formüllerin daha hassas sonuçlar verecek şekilde düzeltilmesi imkanları üzerinde durulacaktır.

İki Noktalı Kestirme Düzeltme Formülleri :

Kestirme yöntemlerinde önceki iki noktanın bilinmesi halinde yeni bir noktanın $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$ formülü ile hesaplanabileceği ifade edilmişti. O halde mevcut iki yeni noktadan geçen Lagrange Enterpolasyon formülü yazılabilir. Bu noktalar (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) noktaları olsun.

$$L_2(x) = \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} f_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} f_{i+1} = -\frac{f_i}{h}(x - x_{i+1}) + \frac{f_{i+1}}{h}(x - x_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[-\frac{f_i}{h}(x - x_{i+1}) + \frac{f_{i+1}}{h}(x - x_i) \right] dx \,, \quad x_i = 0 \,, \; x_{i+1} = h$$

$$= y_i - \frac{f_i}{h}\int_0^h (x - h)dx + \frac{f_{i+1}}{h}\int_0^h x dx$$

$$= y_i + \frac{hf_i}{2} + \frac{hf_{i+1}}{2} = y_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

$$y_{i+1}^K = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

$$y_{i+1}^D = y_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

Örnek.

$y' = 2x + \sqrt{y}$ ve $y(0) = 2$ başlangıç değer problemi veriliyor. $y(0.4)$ değerini kestirme düzeltme formülü ile hesaplayınız. $h = 0.2$ dir.

$$y_1 = y(0.2) = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + (0.2)f(0,2) = 2 + (0.2)(1.4142) = 2.2828$$

$$y_2^K = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0)$$

$$f_0 = 1.4142, \; f_1 = 1.9109$$

$$y_2^K = 2.2828 + \frac{0.2}{2}(3(1.9109) - 1.4142) = 2.7146$$

$$y_2^D = y_1 + \frac{h}{2}(f_1 + f_2)$$

$$f_2 = 2(0.2) + \sqrt{2.7146} = 2.4476$$

$$y_2^D = 2.2828 + \frac{0.2}{2}(1.9109 + 2.4476) = 2.7186$$

Üç Noktalı Kestirme Düzeltme Formülleri :

$$y_{i+1}^K = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i-2} - 16f_{i-1} + 23f_i)$$

$$y_{i+1}^D = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})$$

Dört Noktalı Kestirme Düzeltme Formülleri :

$$y_{i+1}^K = y_i + \frac{h}{24}(-9f_{i-2} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i)$$

$$y_{i+1}^D = y_i + \frac{h}{24}(f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1})$$

07.08.03. Milne Yöntemi

Bu yöntemin de başlatılabilmesi için y_{i+1} den önceki üç değerin yani y_i, y_{i-1}, y_{i-2} nin başka bir yöntemle bulunması gerekir.

Deneme formülü ; $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})$

Düzeltme formülü ; $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$

Örnek.

Aşağıdaki tabloda $y' = -2x - y$ diferansiyel eşitliğinin tek adımlı bir yöntemle belirlenmiş ilk dört değeri verilmiştir. $y(0.4)$ değerini Milne yöntemi ile bulunuz.

x	y	$f(x,y)$
0.0	-1	-2(0.0)-(-1)=1
0.1	-0.9143122	0.7145123
0.2	-0.8561923	0.4561923
0.3	-0.8224547	0.2224547

$$y_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(2f_3 - f_2 + 2f_1)$$

$$= -1 + \frac{4(0.1)}{3}(2(0.2224547) - 0.4561923 + 2(0.714123))$$

$$= -0.8109678$$

$$f_4 = -2(0.4) - (-0.8109678) = 0.0109678$$

$$y_4 = y_2 + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4)$$

$$= -0.8561923 + \frac{0.1}{3}(0.0109678 + 4(0.2224547) + 0.4561923)$$

$$= -0.810959$$

07.09. Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem Sistemleri

Bu uygulamalarda karşımıza birden fazla birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler çıkabilir. Böyle bir denklem sistemi genel olarak

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_m), \; (i = 1, 2, ..., m)$$

$$y_i(x_0) = y_{i0}$$

şeklinde m tane başlangıç şartı ile beraber yazılabilir. Burada x bağımsız değişkeni y_i ise bağımlı değişkenleri göstermektedir. Bu tip denklem sistemini çözmek için yukarıda verilen herhangi bir yöntem kullanılabilir.

Euler Yönteminin Sistemlere Uygulanışı :

$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_m)$ sistemi ve $y_i(x_0) = y_{i0}$ başlangıç şartlarını göz önüne alalım $(i = 1, 2, ..., m)$. Bu sisteme Euler ile çözüm yöntemi şöyle uygulanır. $y_i(x_0 + h) = y_{i0} + hf_i(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{m0})$, $(i = 1, 2, ..., m)$

Örnek.

$\left.\begin{aligned} y_1' &= 2x + y_1 - y_2 \\ y_2' &= x - 2y_1 + 3y_2 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$ başlangıç değerleri ile veriliyor. $y_1(0.1)$ ve $y_2(0.1)$ değerlerini bulunuz.

$$f_1 = 2x + y_1 - y_2$$

$$f_2 = x - 2y_1 + 3y_2$$

$$f_1(0, 1, -1) = 2(0) + 1 - (-1) = 2$$

$$f_2(0, 1, -1) = 0 - 2(1) + 3(-1) = -5$$

$$y_1(0.1) = y_1(0) + hf(0, 1, -1) = 1 + (0.1)2 = 1.2$$

$y_2(0.1) = y_2(0) + hf(0,1,-1) = -1 + (0.1)(-5) = -1.5$

Huen Yönteminin Sistemlere Uygulanışı :

$y' = f(x,y,z)\ \ y(x_0) = y_0$

$z' = g(x,y,z)\ \ z(x_0) = z_0$ başlangıç değer problemini ele alalım. $y(x_0+h)$ ve $z(x_0+h)$ değerini Euler yöntemi ile ;

$$y(x_0+h) = y(x_0) + hf(x_0,y_0,z_0)$$

$$z(x_0+h) = z(x_0) + hg(x_0,y_0,z_0)$$

şeklinde hesaplayabiliyorduk. Eğer x_0 ve x_0+h deki eğimlerin aritmetik ortalaması alınırsa gerçeğe yakın sonuçlar elde edilebileceğini biliyoruz. O halde x_0 daki eğim $y'(x_0)$ ve $z'(x_0)$ ile x_0+h daki Euler yöntemi ile bulunan

$$y^{(1)}(x_0+h) = y(x_0) + hf(x_0,y_0,z_0)$$

$$z^{(1)}(x_0+h) = z(x_0) + hg(x_0,y_0,z_0)$$

değerlerinin f ve g de yerlerine yazılmalarıyla

$$y'(x_0+h) = f(x_0+h, y^{(1)}, z^{(1)})$$

$$z'(x_0+h) = g(x_0+h, y^{(1)}, z^{(1)})$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$y^{(2)}(x_0+h) = y(x_0) + h\left[\frac{f(x_0,y_0,z_0) + f(x_0+h, y^{(1)}, z^{(1)})}{2}\right]$$

$$z^{(2)}(x_0+h) = z(x_0) + h\left[\frac{g(x_0,y_0,z_0) + g(x_0+h, y^{(1)}, z^{(1)})}{2}\right]$$

ikinci tahmin denklemleri bulunur. Benzer işlemlere devam edilerek $y^{(3)}$, $z^{(3)}$ ve daha sonrakiler hesaplanır.

Örnek.

$$\left.\begin{aligned} y' &= y - z + 2x \\ z' &= -2y + 3z + x \end{aligned}\right\}$$

Denklem sistemi y(0) = 1 , z(0) = -1 başlangıç değerleri ile veriliyor.

$h = 0.5$ alarak sistemi Huen yöntemi ile çözünüz.

$f(x,y,z) = y - z + 2x$

$g(x,y,z) = -2y + 3z + x$

$f(0,1,-1)=2$, $g(0,1,-1)=-5$

$$y^{(1)}(0.5)=y(0)+(0.5)f(0,1,-1)=2$$

$$z^{(1)}(0.5)=g(0)+(0.5)g(0,1,-1)=-3.5$$

$$y'(0.5)=f(0.5,2,-3.5)=6.5$$

$$z'(0.5)=g(0.5,2,-3.5)=-14$$

$$y^{(2)}(0.5)=1+0.5\left[\frac{2+6.5}{2}\right]=3.125$$

$$z^{(2)}(0.5)=-1+0.5\left[\frac{-5-14}{2}\right]=-5,375$$

Runge-Kutta Yönteminin Sistemlere Uygulanışı :

$\left.\begin{array}{l} y'=f(x,y,z) \\ z'=g(x,y,z) \end{array}\right\} \begin{array}{l} y(x_0)=y_0 \\ z(x_0)=z_0 \end{array}$ başlangıç değer problemini ele alalım. $h=x_{i+1}-x_i$ olmak üzere;

$$\left.\begin{array}{l} k_1=hf(x_i,y_i,z_i) \\ k_2=hf(x_i+h,y_i+k_1,z_i+k_1) \end{array}\right\} y(x_i+h)=y_i+\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} l_1=hg(x_i,y_i,z_i) \\ l_2=hg(x_i+h,y_i+l_1,z_i+l_1) \end{array}\right\} z(x_i+h)=z_i+\frac{1}{2}(l_1+l_2)$$

Örnek.

$y''+3y'+2y=e^{-3x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$ 2.mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi, başlangıç koşullu 1.mertebeden diferansiyel denklem sistemine dönüştürerek 2.mertebeden Runge-Kutta ile çözünüz. ($h=0.5$)

$y'=z$, $y''=z'$

$$z'+3z+2y=2e^{-3x} \Rightarrow z'=2e^{-3x}-3z-2y$$

$$\begin{cases} y'=z=f(x,y,z) \\ z'=2e^{-3x}-3z-2y=g(x,y,z) \end{cases}$$

$y(0)=1$ $z(0)=y'(0)=2$

$$k_1=hf(x_0,y_0,z_0)(0.5)f(0,1,2)=(0,5)2=1$$
$$k_2=hf(x_0+h,y_0+k_1,z_0+k_1)=(0.5)f(0.5,2.3)=1.5$$

$$y_1=y_0+\frac{1}{2}(k_1+k_2)=1+\frac{1}{2}(1+1.5)=2.25$$

$$l_1 = hg(x_0, y_0, z_0) = (0.5)g(0,1,2) = (0.5)(2e^{-3(0)} - 3(2) - 2(1)) = -3$$

$$l_2 = hg(x_0 + h, y_0 + l_1, z_0 + l_1) = (0.5)g(0.5,-2,-1) = (0.5)(2e^{-3(0.5)} - 3(-1) - 2(-2)) = 3.813$$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}(l_1 + l_2) = 2 + \frac{1}{2}(-3 + 3.813) = 2.406$$

Taylor Seri Yönteminin Sistemlere Uygulanışı :

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{10} \\ y_2(x_0) &= y_{20} \end{aligned}$$

koşullarıyla başlangıç değer problemini ele alalım. $i.$ noktada fonksiyon değerleri belli iken $(i+1).$ noktada değerler;

$$\left.\begin{aligned} y_1(x_{i+1}) &= y_1(x_i) + hy_1'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y_1''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y_1'''(x_i) + \ldots \\ y_2(x_{i+1}) &= y_2(x_i) + hy_2'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y_2''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y_2'''(x_i) + \ldots \end{aligned}\right\}$$

elde edilir. Bu formüllerdeki türevler $y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$, $y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$ denklemleriyle hesaplanır. İstenilen türev mertebesi kadar terim, toplama katılır.

Örnek.

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + x^2 \qquad & y_1(1) &= 1 \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2 + x \qquad & y_2(1) &= 2 \end{aligned}$$

koşullarıyla başlangıç değer problemini $h = 0.05$ alarak ve Taylor seri açılımında 2. mertebeden türevlerini hesaba katacak şekilde hesaplayınız.

$$y_1'(1,1,2) = 2(1) + 2 + 1^2 = 5$$

$$y_2'(1,1,2) = 3(1) + 4(2) + 1 = 12$$

$$y_1'' = \frac{d}{dx}(y_1') = 2y_1' + y_2' + 2x \Rightarrow y_1''(1,1,2) = 2(5) + 12 + 2(1) = 24$$

$$y_2'' = \frac{d}{dx}(y_2') = 3y_1' + 4y_2' + 1 \Rightarrow y_2''(1,1,2) = 3(5) + 4(12) + 1 = 64$$

$$y_1(x_{i+1}) = y_1(x_i) + hy_1'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y_1''(x_i) = 1 + (0.05)5 + \frac{(0.05)^2}{2}24 = 1.28$$

$$y_2(x_{i+1}) = y_2(x_i) + hy_2'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y_2''(x_i) = 2 + (0.05)12 + \frac{(0.05)^2}{2}64 = 2.68$$

Picard Yönteminin Sistemlere Uygulanışı :

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ z(x_0) &= z_0 \end{aligned}$$

koşullarıyla başlangıç değer problemini ele alalım. Picard yöntemini bu sisteme uygularsak ;

$$\left.\begin{aligned} y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_{n-1})dx \\ z_n(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} g(x, y_{n-1}, z_{n-1})dx \end{aligned}\right\}$$

temel formülleri elde edilir.

Örnek.

$$\left.\begin{aligned} y' &= 3y - z \\ z' &= 2y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ z(0) &= 2 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemini Picard yöntemi için iki iterasyonda çözünüz.

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x (3y_0 - z_0)dx = 1 + \int_0^x (3(1) - 2)dx = \int_0^x dx = 1 + x$$

$$z_1(x) = z_0 + \int_0^x (2y_0)dx = 2 + \int_0^x 2dx = 2 + 2x$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x (3y_1 - z_1)dx = 1 + \int_0^x [3(1+x) - (2+2x)]dx = \int_0^x dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$z_2(x) = z_0 + \int_0^x 2y_1 dx = 2 + \int_0^x 2(1+x)dx = 2 + 2x + x^2$$

8. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN İNCELENMESİNDE OPERATÖRLERİN KULLANILMASI

08.01.Giriş

Operatörler yani işlemciler matematikte zaman zaman kullanılmakta ve onlar bazı işlemlerin daha kolay yapılmasını sağlayabilmektedir. "Operasyonel Hesap" matematikte başlı başına bir konu haline gelmiş olup, operatörlerin en önemli özelliği cebire ilişkin tüm kurallara uyum göstermiş olmalarıdır.

D ile $\dfrac{d}{dx}$ türevi temsil edilmiş olsun. $y = y(x)$ fonksiyonunun $y' = \dfrac{dy}{dx}$ türevi bundan yararlanarak $y' = Dy$ şeklinde ifade edilebilecektir.

Uyarı: D operatörü sadece işlemi temsil ettiğinden mutlaka ve mutlaka fonksiyondan önce, yani y nin sol tarafında yazılmalıdır. yD gibi bir yazılımın hiç ama hiç bir anlamı yoktur.

D_1, D_2, D_3 farklı üç operatör ise

1) $(D_1 + D_2)y = (D_2 + D_1)y$
$D_1.D_2)y = (D_2.D_1)y$ Değişme özelliği

2) $[D_1 + (D_2 + D_3)]y = [(D_1 + D_2) + D_3]y$
$[D_1.(D_2.D_3)]y = [(D_1.D_2).D_3]y$ Birleşme özelliği

3) $[D_1.(D_2 + D_3)]y = [D_1.D_2 + D_1.D_3]y$ Dağılma özelliği

Bunların dışında onlar çarpanlarına ayrılabilir, türetilebilir hatta integre edilebilir. Bu kısa tanıtımdan sonra esas konumuza dönülürse, operatörleri kullanarak, bir diferansiyel denklem sisteminin çözümü araştırılırken ne gibi kolaylıklar sağladığı görülmüş olacaktır.

08.02. Homojen Diferansiyel Denklem Sisteminin Operatörler ile Çözümü

Bu bölümde de yine (2.14) deki sistemi model olarak seçip, bu diferansiyel denklem sistemi ile çalışacağız. Burada varılan bazı sonuçlar genellenerek n bilinmeyenli n denklemli bir lineer-homojen diferansiyel denklem sistemine genişletme yapılabilecektir.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \dfrac{dz}{dt} = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases} \tag{8.1}$$

sistemi, $D = \dfrac{d}{dt}$ türev operatörü olmak üzere

$$\begin{cases} (D - a_1)x - b_1 y - c_1 z = 0 \\ -a_2 x + (D - b_2) y - c_2 z = 0 \\ -a_3 x - b_3 y + (D - c_3) z = 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

şeklinde ifade edilecektir. Bu sistemlerin önceden de belirtildiği gibi $x(t) = y(t) = z(t) = 0$ olan bir çözümü vardır ki buna aşikar (trivial) çözüm denildiğini biliyoruz. Burada da "sistemin çözümü" denilince amaç, aşikar çözümden başkaca çözümlerinin var olup olmadığı araştırılmalıdır. Bu tür çözümleri varsa sistemin, bunun ön koşulu (8.2) deki sistemin katsayılar determinantının sıfıra eşit olmasıdır.

$$F(D) = \Delta = \begin{vmatrix} D - a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & D - b_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & D - c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{8.3}$$

Bu sağlanıyorsa, çözümlerin araştırılmasına geçilebilir.

$\Delta = F(D) = 0$ denklemi önceki uygulamamızdaki "karakteristik denklem" yerine geçmiş olacaktır. Burada D operatörü, λ parametresinin rolünü üstlenmiş olmaktadır. $F(D) = 0$ denkleminin kökleri D_1, D_2, D_3 ise bunlar aynen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ kökleri gibi işleme sokulacaklardır. $D = D_1, D = D_2, D = D_3$ için $\Delta = F(D_1) = F(D_2) = F(D_3) = 0$ olacağından, bunların belirlenmesiyle genel çözümün yazılması olanaklı hale gelecektir.

Uygulamaya geçmeden önce $F(D) = 0$ denkleminin bir başka özelliğinden daha söz etmek gerekmektedir. $F(D)$ bir cebirsel çok terimli olup bunun derecesi, genel çözümde bulunması gereken keyfi sabitlerin sayısını göstermektedir.

Örnek.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} &= -x - 5y \end{cases}$$

lineer-homojen sistemini bir kez türev operatörünü kullanarak inceleyelim.

$D = \dfrac{d}{dt}$ olmak üzere sistem

$$\begin{cases} (D+3)x - y &= 0 \\ x + (D+5)y &= 0 \end{cases}$$

şeklini alır.

$$\Delta = F(D) = \begin{vmatrix} D+3 & -1 \\ 1 & D+5 \end{vmatrix} = (D+4)^2 = 0$$

olur. Demek ki $D_{1,2} = -4$ için d $F(D) = 0$ dır..

İki katlı kök (çakışık kökler) vardır. Önceki incelememizdeki çözüm takımları şimdi doğrudan yazılabilir.
$x(t) = k_1 e^{-4t}, y(t) = k_2 e^{-4t}$ olsun.

$D_1 = -4$ için sistemden $k_1 = -k_2$ bulunur. Keyfi olarak $k_2 = -1$ seçilirse $k_1 = 1$ olup, çözüm takımı

$x_1(t) = k_1 e^{-4t}, y_1(t) = k_2 e^{-4t}$ olur.

$D_2 = -4$ (çakışık kök) için inceleme şu şekilde gerçekleştirilir:

$$x(t) = (k_1 t + l_1)e^{-4t}, y(t) = (k_2 t + l_2)e^{-4t}$$

önerilirse, sistemden $k_1 + k_2 = 0$ ve $l_1 + l_2 = k_1$ ilişkileri bulunur. k_1 keyfi olarak 1 seçilirse $k_2 = -1$ olup $l_1 + l_2 = 1$ demektir. Keyfi olarak $l_1 = l_2 = \dfrac{1}{2}$ seçilirse ikinci kök için temel çözüm takımı

$$x_2(t) = (t + \frac{1}{2})e^{-4t}, y_2(t) = (-t + \frac{1}{2})e^{-4t}$$

şeklinde elde edilir. $\Delta = F(D) = 0$ denklemi ikinci dereceden olup sistemin genel çözümünde iki keyfi sabit bulunacaktır. Bunlar C_1 ve C_2 olsunlar. Öyleyse genel çözüm

$$x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2(t + \frac{1}{2})e^{-4t}$$

$$y(t) = -C_1 e^{-4t} + C_2(-t + \frac{1}{2})e^{-4t}$$

şeklinde oluşmuştur.

Bu basit örneklemeden sonra (8.2) sistemi üzerinde daha kapsamlı bir çalışmaya geçil-ebilecektir.

08.02.01. F(D)=0 Denkleminin Basit Kökleri Bulunması Hali :

(8.3) de sözü edilen $\Delta = F(D) = 0$ karakteristik denkleminin köklerinin basit ve ayrık kökleri bulunması halinde aşağıda açıklandığı şekilde bir çalışma yeğlenecektir.

$\Delta = F(D) = 0$ denkleminin kökleri D_1, D_2, D_3 olsun. Bunlar için çözüm takımları

$$\begin{aligned} x_1(t) &= k_{11}e^{D_1 t}, y_1(t) = k_{21}e^{D_1 t} \\ x_2(t) &= k_{12}e^{D_2 t}, y_2(t) = k_{22}e^{D_2 t} \\ x_3(t) &= k_{13}e^{D_3 t}, y_3(t) = k_{23}e^{D_3 t} \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenecektir. Görülüyor ki bunlar D operatörü yardımıyla bir hamlede yazılabilmektedir. Burada hesaplanması gerekenler $k_{11}, k_{12}, k_{13}; k_{21}, k_{22}, k_{23}$ katsayılarıdır. Bunları belirlemek için her D değerine ait işlemler ayrı ayrı gerçekleştirilmelidir. Buna dair ayrıntılar aşağıdaki örnek üzerinde görülmektedir.

Örnek.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4z + 4y + 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = -4z + 5y + 2x \\ \dfrac{dz}{dt} = -5z + 6y + 2x \end{cases}$$

sistemini inceleyelim.

$D = \dfrac{d}{dt}$ türev operatörü olmak üzere, sistem

$$\begin{cases} (D-3)x - 4y - 4z = 0 \\ -2x + (D-5)y - 4z = 0 \\ -2x - 6y + (D+5)z = 0 \end{cases}$$

şeklini alır.

$$\Delta = F(D) = \begin{vmatrix} D-3 & -4 & 4 \\ -2 & D-5 & 4 \\ -2 & -6 & D+5 \end{vmatrix} = D^3 - 3D - D + 3 = 0$$

olup buradan $D_1 = -1, D_2 = 1, D_3 = 3$ bulunur.

Demek ki temel çözüm takımları

$$x_1(t)=k_{11}e^{-t},\, y_1(t)=k_{12}e^{-t},\, z_1(t)=k_{13}e^{-t}$$
$$x_2(t)=k_{21}e^{t},\, y_2(t)=k_{22}e^{t},\, z_2(t)=k_{23}e^{-t}$$
$$x_3(t)=k_{31}e^{3t},\, y_3(t)=k_{32}e^{3t},\, z_3(t)=k_{33}e^{3t}$$

şeklinde ifade edilebileceklerdir. İş sadece katsayıların belirlenmesine kalmıştır. Bunları da sırasıyla gerçekleştirelim :

$D_1=-1$ için $\Delta=F(D_1)=F(-1)=0$ olup, sistemden

$$\begin{matrix} k_{11}+k_{12}=k_{13} \\ k_{11}+3k_{12}=2k_{13} \end{matrix} \rightarrow k_{11}=k_{12}=\frac{1}{2}k_{13}$$

ilişkisine varılır. Keyfi olarak $k_{13}=2$ seçilirse $k_{11}=k_{12}=1$ olur. Bunlar için temel çözüm takımı

$$x_1(t)=e^{-t},\, y_1(t)=e^{-t},\, z_1(t)=2e^{-t}$$

şeklinde oluşur.

$D_2=1$ için $\Delta=F(D_2)=F(1)=0$ olup, sistemden

$$\begin{matrix} k_{21}+2k_{22}=2k_{23} \\ k_{21}+3k_{22}=3k_{23} \end{matrix} \rightarrow k_{21}=0, k_{22}=k_{23}$$

ilişkisine varılır. k_{22} keyfi olarak 1 alınırsa $k_{23}=1$ olur. Böylece çözüm takımı

$$x_2(t)=0,\, y_2(t)=e^{t},\, z_2(t)=e^{t}$$

şeklinde oluşur.

$D_3=3$ için; $\Delta=F(D_3)=F(3)=0$ olup, sistemden

$$\begin{cases} k_{32}-k_{33}=0 \\ k_{31}+k_{32}-2k_{33}=0 \\ k_{31}+3k_{32}-4k_{33}=0 \end{cases} \rightarrow k_{31}=k_{32}=k_{33}$$

ilişkisine varılır. Keyfi olarak $k_{13}=1$ seçilirse $k_{32}=k_{33}=1$ olur. Böylece çözüm takımı $x_3(t)=e^{3t},\, y_3(t)=e^{3t},\, z_3(t)=e^{3t}$ şeklinde oluşur.

Artık genel çözüm yapılabilecektir. C_1, C_2, C_3 keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+C_3e^{3t} \\ y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{t}+C_3e^{3t} \\ z(t)=2C_1e^{-t}+C_2e^{t}+C_3e^{3t} \end{cases}$$

bulunur.

08.02.02. F(D)= 0 Denkleminin Çakışık Köklerinin Bulunması Hali :

(8.3) de sözü edilen $\Delta = F(D) = 0$ karakteristik denkleminin köklerinin bir kez çakışık oldukları varsayılmaktadır. Çakışık kökler $D_1 = D_2 = D_3$ olsun. Bunların her biri için temel çözüm takımlarının belirlenmesi gerekmektedir.

$D = D_1$ için normal bir araştırma yapılacaktır (ilk kök). Temel çözüm takımı

$x_1(t) = k_1 e^{D_1 t}, y_1(t) = k_2 e^{D_1 t}, z_1(t) = k_3 e^{D_1 t}$

olsun. $F(D) = F(D_1) = 0$ olacağından, (8.2) den

$$\begin{cases} (D_1 - a_1)x_1 - b_1 y_1 - c_1 z_1 = 0 \\ -a_2 x_1 + (D_1 - b_2) y_1 - c_2 z_1 = 0 \\ -a_3 x_1 - b_3 y_1 + (D_1 - c_3) z_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (D_1 - a_1)k_1 - b_1 k_2 - c_1 k_3 = 0 \\ -a_2 k_1 + (D_1 - b_2) k_2 - c_2 k_3 = 0 \\ -a_3 k_1 - b_3 k_2 + (D_1 - c_3) k_3 = 0 \end{cases}$$

olup buradaki bağıntılar aralarında lineer bağımlıdır. Dolayısıyla

$$\frac{k_1}{\mu_1} = \frac{k_2}{\nu_1} = \frac{k_3}{\lambda_1}$$

şeklinde bir ilişki oluşacaktır. k_1, k_2, k_3 orantılı olduğu sayılarla eşleştirilirse (en basit seçim budur) $k_1 = \mu_1, k_2 = \nu_1, k_3 = \lambda_1$ olur. Böylece ilk temel çözüm takımı

$$x_1(t) = \mu_1 e^{D_1 t}, y_1(t) = \nu_1 e^{D_1 t}, z_1(t) = \lambda_1 e^{D_1 t}$$

şeklinde bulunur.

$D = D_2$ için (çakışık köklerden ilki) : $F(D_2) = 0$ dır ve (8.2) sisteminden

$$\begin{cases} (D_2 - a_1)x_2 - b_1 y_2 - c_1 z_2 = 0 \\ -a_2 x_2 + (D_2 - b_2) y_2 - c_2 z_2 = 0 \\ -a_3 x_2 - b_3 y_2 + (D_2 - c_3) z_2 = 0 \end{cases}$$

cebirsel sistemi bulunur ki temelde ilk sistemle benzer özelliklere sahiptir. Örneğin bu sistemin katsayılar determinantı sıfıra eşittir ve bunun bir sonucu olarak sistemdeki bağıntılar, aralarında lineer bağımlıdır.

Bunlardan, katsayılar determinantı sıfırdan farklı olan iki bağıntı ilk iki bağıntı olarak seçilirse,

$$\begin{vmatrix} D_2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_2 - a_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

olmak koşuluyla sistem

$$\begin{cases} (D_2 - a_1)x_2 - b_1 y_2 = c_1 z_2 \\ -a_2 x_2 + (D_2 - b_2) y_2 = c_2 z_2 \end{cases}$$

şeklinde düzenlenirse,

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} D_2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}; \mu_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}; \nu_2 = \begin{vmatrix} D_2 - a_1 & c_1 \\ -a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

alınmak suretiyle, gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$\frac{x_2}{\mu_2} = \frac{y_2}{\nu_2} = \frac{z_2}{\lambda_2}$$

ilişkisi bulunacaktır. $D = D_2$ için $e^{D_2 t}$ çarpanı kullanılacağından, çözüm takımı,

$$x_2 = \mu_2 e^{D_2 t}, y_2 = \nu_2 e^{D_2 t}, z_2 = \lambda_2 e^{D_2 t}$$

olarak ifade edilecektir.

$D = D_2$ (çakışık köklerin ikincisi) için yine $F(D_2) = 0$ dır. Sistemde D yerine D_2 koyarak bir düzenlemeye gider ve çözüme ulaşmaya çalışırsak, bir önceki sonuca aynen ulaşılacak, başka bir fark oluşmayacaktır. Yani bu kök için yeni bir sonuca ulaşılmış olunmayacaktır. x_2, y_2, z_2 çözüm takımıyla lineer bağımlı olmayan bir başka çözüm takımı elde edebilmek için k_1, k_2, k_3 hesaplanması gereken sabit terimler olmak üzere, bu kez

$$x_3 = (\mu_2 t + k_1)e^{D_2 t}; y_3 = (\nu_2 t + k_2)e^{D_2 t}; z_3 = (\lambda_2 t + k_3)e^{D_2 t}$$

önerilir. Bu çözüm takımı (8.2) sistemini sağlamalıdır. Bu çözüm takımı yazılırken, t lerin katsayıları, çakışık köklerin ilki için bulunan katsayılar olarak seçilmiştir. Bu hesaplamalarda, pratiklik açısından oldukça kolaylıklar sağlanacaktır.

$$Dx_3 = \frac{dx_3}{dt} = (D_2\mu_2 t + \mu_2 + D_2 k_1)e^{D_2 t}$$

$$Dy_3 = \frac{dy_3}{dt} = (D_2\nu_2 t + \nu_2 + D_2 k_2)e^{D_2 t}$$

$$Dz_3 = \frac{dz_3}{dt}(D_2\lambda_2 t + \lambda_2 + D_2 k_3)e^{D_2 t}$$

türevleriyle sisteme gidilirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{cases} [(D_2 - a_1)\mu_2 - b_1\nu_2 - c_1\lambda_2]t + (D_2 - a_1)k_1 - b_1 k_2 - c_1 k_3 = -\mu_2 \\ [-a_2\mu_2 + (D_2 - b_2)\nu_2 - c_2\lambda_2]t - a_2 k_1 + (D_2 - b_2)k_2 - c_2 k_3 = -\nu_2 \\ [-a_3\mu_2 - b_3\nu_2 + (D_2 - c_3)\lambda_2]t - a_3 k_1 - b_3 k_2 + (D_2 - c_3)k_3 = -\lambda_2 \end{cases}$$

olur. Burada t nin katsayıları olan köşeli parantez içindeki ifadeler ayrı ayrı sıfıra eşittir. Çünkü bu

$$\frac{x_2}{\mu_2} = \frac{y_2}{\nu_2} = \frac{z_2}{\lambda_2}$$

ilişkisinin bir doğal sonucudur. Öyleyse yukarıdaki sistem

$$(D_2 - a_1)k_1 - b_1 k_2 - c_1 k_3 = -\mu_2$$
$$-a_2 k_1 + (D_2 - b_2)k_2 - c_2 k_3 = -\nu_2$$
$$-a_3 k_1 - b_3 k_2 + (D_2 - c_3)k_3 = -\lambda_2$$

sistemine dönüşür. Katsayılar determinantı sıfıra eşit olduğundan bu bir Cramer sistemi olmayıp ancak buradan k_1, k_2, k_3 hesaplanabilecektir. Bu sistemin özelliği nedeniyle (katsayılar determinantı sıfıra eşit idi) özel bir inceleme gerekir.

$$\begin{vmatrix} D_2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

olmak koşuluyla sistem

$$\begin{aligned} (D_2 - a_1)k_1 - b_1 k_2 &= c_1 k_3 - \mu_2 \\ -a_2 k_1 + (D_2 - b_2)k_2 &= c_2 k_3 - \nu_2 \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenirse, k_1 ve k_2 ; k_3 parametresine bağımlı olarak; şimdi bir Cramer sistemi gibi ele alınmak suretiyle,

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 k_3 - \mu_2 & -b_1 \\ c_2 k_3 - \nu_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} D_2 - a_2 & c_1 k_3 - \mu_2 \\ -a_2 & c_2 k_3 - \nu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}}$$

bulunur. Bunlar ise

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & -b_1 \\ c_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}} . k_3 - \frac{\begin{vmatrix} \mu_2 & -b_1 \\ \nu_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}}$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} D_2 - a_2 & c_1 \\ -a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}} . k_3 - \frac{\begin{vmatrix} D_2 - a_1 & \mu_2 \\ -a_2 & \nu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_2 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_2 - b_2 \end{vmatrix}}$$

şeklinde de ifade edilebilirler ki buradan açık olarak, k_1 ve k_2 parametrelerinin k_3 cinsinden ne şekilde ifade edilmiş olduğu görülmektedir. Determinantların tamamı sabit değerlerden ibarettir ki bu da ilişkilerdeki katsayıları oluşturacaktır. k_3 keyfi seçilerek, bu ilişki düzeni içinde k_1 ve k_2 değerleri k_3 parametresinin seçimine bağlı olarak değerlendirilmiş olur. Örneğin, keyfi bir değer olarak $k_3 = \theta_3$ olursa, buna göre $k_1 = \theta_1, k_2 = \theta_2$ değerlerini almış olsun. Öyleyse çözüm takımı

$$x_3 = (\mu_2 t + \theta_1)e^{D_2 t}; y_3 = (\nu_2 t + \theta_2)e^{D_2 t}; z_3 = (\lambda_2 t + \theta_3)e^{D_2 t}$$

olarak belirlenecektir.

Çözüm takımlarının belirlenmesi, genel çözümün yazılabilmesini gerekli ve olanaklı kılar. Buna göre C_1, C_2, C_3 keyfi sabitler olmak üzere ;

$$\begin{cases} x(t) = C_1\mu_1 e^{D_1 t} + C_2\mu_2 e^{D_2 t} + C_3(\mu_2 t + \theta_1)e^{D_2 t} \\ y(t) = C_1\nu_1 e^{D_1 t} + C_2\nu_2 e^{D_2 t} + C_3(\nu_2 t + \theta_2)e^{D_2 t} \\ z(t) = C_1\lambda_1 e^{D_1 t} + C_2\lambda_2 e^{D_2 t} + C_3(\lambda_2 t + \theta_3)e^{D_2 t} \end{cases}$$

yazılabilecektir.

Çakışık kök olmasının daha genel hali

$$\Delta = F(D) = (D - D_1)^3 = 0$$

olmasıdır. Sistemimiz $n = 3$ için düzenlendiğinden, burada bütün kökler için katlılık hali söz konusudur. Bu durum da genel çözümün yazılabilmesi için, çözüm takımlarının ne şekilde belirlenebileceğini tartışacağız.

$D = D_1$ katlı köklerin ilki olup, $F(D_1) = 0$ dır. Bunun için sistem

$$\begin{cases} (D_1 - a_1)x - b_1 y - c_1 z = 0 \\ -a_2 x + (D_1 - b_2)y - c_2 z = 0 \\ -a_3 x - b_3 y + (D_1 - c_3)z = 0 \end{cases}$$

olur. Bu önceden incelediğimiz türden bir sistem olup, aşikar çözümden başka çözümlerinin bulunabilmesi koşulu, katsayılar determinantının sıfıra eşit olmasıdır. Bu sistemin ilk iki denklemi

$$\begin{vmatrix} D_1 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_1 - b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

olması koşuluyla,

$$\begin{cases} (D_1 - a_1)x - b_1 y = c_1 z \\ -a_2 x + (D_1 - b_2)y = c_2 z \end{cases}$$

şeklinde düzenleyelim.

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} D_1 - a_1 & -b_1 \\ -a_2 & D_1 - b_2 \end{vmatrix} ; \mu_1 = \begin{vmatrix} c_1 & -b_1 \\ c_2 & D_1 - b_2 \end{vmatrix} ; \nu_1 = \begin{vmatrix} D_1 - a_1 & c_1 \\ -a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

olarak alınırsa, bunlardan ve sistemden

$$\frac{x}{\mu_1} = \frac{y}{\nu_1} = \frac{z}{\lambda_1}$$

ilişkisi yazılabilecektir. $D = D_1$ için $e^{D_1 t}$ çarpan olarak kullanılacağından,

$$x_1 = \mu_1 e^{D_1 t}, y_1 = \nu_1 e^{D_1 t}, z_1 = \lambda_1 e^{D_1 t}$$

çözüm takımı bu şekilde bulunacaktır.

$D = D_1$ çakışık köklerin ikincisi olup bunun için de $F(D_1) = 0$ dır. Bu kez μ_1, ν_1, λ_1 önceki çözüm takımında kullandığımız sabitler olmak üzere ;

$$x_2 = (\mu_2 t + k_1)e^{D_2 t} ; y_2 = (\nu_2 t + k_2)e^{D_2 t} ; z_2 = (\lambda_2 t + k_3)e^{D_2 t}$$

almak suretiyle düzenlenirse, uygulama açısından bazı kolaylıklar sağlanmış olacaktır. Burada t lerin katsayısı olarak sırasıyla μ_1, ν_1, λ_1 sayılarının kullanıldığına dikkat edilmelidir. Bu çalışmanın sonuçlarının ikinci çakışık kök için nasıl değerlendirildiğini bir önceki incelememiz sırasında gördük; bu ayrıntıyı burada yinelemiyoruz. Yukarıdaki benzerinin aynı sonuçlarını aynı yorumlarla alırsak, ikinci çözüm takımını

$$x_2 = (\mu_2 t + \theta_1)e^{D_2 t}; y_2 = (\nu_2 t + \theta_2)e^{D_2 t}; z_2 = (\lambda_2 t + \theta_3)e^{D_2 t}$$

şeklinde ifade etmiş oluruz.

$D = D_1$ çakışık köklerin üçüncüsü ve bu modelimiz için sonuncusudur. Bunun için de $F(D_1) = 0$ dır. Bu kez öncekinden de farklı bir uygulamaya girme zorunluluğu ortaya çıkacaktır. Bu kez çözüm takımını x_2, y_2, z_2 de olduğu şekilde de seçemeyiz. m_1, m_2, m_3 hesaplanması gerekli parametreler olmak üzere, yeni çözüm takımı ;

$$x_3 = (\mu_1 t^2 + \theta_1 t + m_1)e^{D_1 t}; y_3 = (\nu_1 t^2 + \theta_2 t + m_2)e^{D_1 t}; z_3 = (\lambda_1 t^2 + \theta_3 t + m_3)e^{D_1 t}$$

şeklinde seçilmelidir. Bu kez $e^{D_1 t}$ nin katsayıları t ye göre ikinci dereceden çok terimlilerdir ve yine uygulamada bazı kolaylıklar sağlamak üzere t^2 ve t li terimlerin katsayıları, önceki çözüm takımlarındaki katsayılar olarak alınmıştır.

Bunların türevleriyle sisteme gidilir ve gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{cases} (D_1 - a_1)m_1 - b_1 m_2 - c_1 m_3 = \theta_1 \\ -a_1 m_1 + (D_1 - b_1)m_2 - c_1 m_3 = -\theta_2 \\ -a_1 m_1 - b_1 m_2 + (D_1 - c_1)m_3 = -\theta_3 \end{cases}$$

olur. Burada $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ile m_1, m_2, m_3 sayılarının ve μ_1, ν_1, λ_1 sayılarının orantılı ilişkiler içinde oldukları anlaşılır. Bu sistemdeki bağıntıların, lineer bağımlı oluşlarının ortaya koyduğu kaçınılmaz bir sonuçtur. Bu sistemin katsayılar determinantı $F(D_1) = 0$ dır. Yani m_1, m_2, m_3 sayıları $D = D_1$ için x, y, z ile orantılı ilişkiler içinde demektir ve bu da yukarıdaki açıklamanın ışığında değerlendirilmelidir. Öyleyse m_1, m_2, m_3 parametreleri bu sistemden, bir lineer bağımlılık ilişkisi içinde, tıpkı k_1, k_2, k_3 sabitlerinin hesaplanmasında olduğu gibi hesaplanabilecektir. x_3, y_3, z_3 çözüm takımı da bu şekilde belirlenmiş olacaktır. Artık genel çözüm yazılabilecektir.

Örnek.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2y \end{cases}$$

diferansiyel denklem sistemi, normal-homojen bir sistem olup, bunun $x(t) = y(t) = z(t) = 0$ aşikar çözümünden başka çözümleri bulunup bulunmadığını araştırmak istiyoruz.

$D = \frac{d}{dt}$ türev operatörü olmak üzere,

$$\begin{cases} (D-1)x - 2y - z = 0 \\ -x + (D-3)y - 2z = 0 \\ 2y + Dz = 0 \end{cases}$$

şeklinde düzenlenir.

$$\Delta = F(D) = \begin{vmatrix} (D-1) & -2 & -1 \\ -1 & D-3 & -2 \\ 0 & 2 & D \end{vmatrix} = (D-2)(D-1)^2 = 0$$

olup buradan $D_1 = 2, D_2 = D_3 = 1$ (iki katlı kök) bulunur.

$D = D_1 = 2$ için :

$F(D) = F(D_1) = F(2) = 0$ dır.

Sistem $D_1 = 2$ için :

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

şeklinde bir cebirsel sisteme dönüşür. Bu bağıntılar, aralarında lineer bağımlıdır. Bunlardan

$$x = y = -z$$

ilişkisine varılır. $D_1 = 2$ için e^{2t} çarpanı kullanılacağından, $z = e^{2t}$ alınırsa yukarıdaki ilişki yardımıyla,

$$x_1 = -e^{2t}; y_1 = -e^{2t}; z_1 = e^{2t}$$

bulunur.

$D = D_2 = 1$ için :

Bu çakışık (katlı) köklerin ilki olup bunun için $F(D) = F(D_2) = F(1) = 0$ dır. Bu kök için uygulama basit kökte olduğu gibi yapılacaktır. Sistem,

$$\begin{cases} -2y - z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

şeklini alır. Buradan, bağıntıların aralarında lineer bağımlı olmadıklarının bir sonucu olarak

$$x = 2y = -z$$

ilişkisine varılır. $D_1 = 1$ için e^t çarpanı kullanılacağından, $z = e^t$ alınırsa,

$$x_2 = -e^t; y_2 = -\frac{1}{2}e^t; z_2 = e^t$$

bulunur.

$D = D_3 = 1$ için :

Bu çakışık köklerin ikincisidir. Bunun için de $F(D) = F(D_3) = F(1) = 0$ dır. Bu kök için hesaplar öncekinde olduğu gibi düzenlenemez. Bu kez, x_2, y_2, z_2 çözüm takımının katsayıları kullanılarak, çözüm takımı

$$x_3 = (-t + k_1)e^t; y_3 = (-\frac{1}{2}t + k_2)e^t; z_3 = (t + k_3)e^t$$

olarak seçilmelidir. Buradaki k_1, k_2, k_3 sabitler, sistemi sağlayacak şekilde hesaplanmalıdır. Önerilen çözüm takımını sisteme uygulayalım:

$$\begin{cases} (D-1)(-t+k_1)e^t - 2(-\frac{1}{2}t + k_2)e^t - (t+k_3)e^t = 0 \\ -(-t+k_1)e^t + (D-3)(-\frac{1}{2}t + k_2)e^t - 2(t+k_3)e^t = 0 \\ 2(-\frac{1}{2}t + k_2)e^t + D(t+k_3)e^t = 0 \end{cases}$$

Gerekli işlemler ve sadeleştirmelerden sonra,

$$\begin{cases} 2k_2 + k_3 = -1 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 = -\frac{1}{2} \\ 2k_2 + k_3 = -1 \end{cases}$$

sistemine varılır. Bu elde edilirken, katsayılar önceden uygun seçildiği için t li terimlerin (katsayıları sıfır olduğu için) ortadan kalktığına dikkat edilmelidir. Bu sistem gerçekte

$$\begin{cases} 2k_2 + k_3 = -1 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

sisteminden ibarettir. Bunlardan, k_3 keyfi bilinmeyen seçilmek suretiyle

$$k_1 = \frac{1}{2} - k_3; k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k_3$$

ilişkisi yazılabilir. k_3 keyfi olarak 1 alınırsa ;

$$k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = -1, k_3 = 1$$

bulunur. Bu değerler için çözüm takımı

$$x_3 = (-t - \frac{1}{2})e^t; y_3 = (-\frac{1}{2}t - 1)e^t; z_3 = (t+1)e^t$$

olarak belirlenir.

Bu şekilde, her köke karşı gelen çözüm takımları belirlendiğine göre,

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^{2t} - C_2e^t - C_3(t + \frac{1}{2})e^t \\ y(t) = -C_1e^{2t} - \frac{1}{2}C_2e^t - C_3(\frac{1}{2}t + 1)e^t \\ z(t) = C_1e^{2t} + C_2e^t + C_3(t+1)e^t \end{cases}$$

yazılır. İstenirse bu sonuç

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^{2t} - (C_2 + \frac{1}{2}C_3)e^t - C_3te^t \\ y(t) = -C_1e^{2t} - (\frac{1}{2}C_2 + C_3)e^t - \frac{1}{2}C_3te^t \\ z(t) = C_1e^{2t} + (C_2 + C_3)e^t + C_3te^t \end{cases}$$

şeklinde de düzenlenebilir.

08.02.03. F(D)=0 Denkleminin Karmaşık Köklerinin Bulunması Hali:

Yine aynı model sistemi kullanarak konuyu incelemeye çalışalım. Bu amaçla normal-homojen sistem olarak (2.14) sistemini göz önüne alalım. Ancak konuya yaklaşımımız operatörlerin kullanılması olduğu için sistemin (8.1) ile verilen şekli üzerinde çalışalım. Bu sistemde, (8.2) ile ifade edilen F(D)=0 denkleminin, D nin 3. dereceden bir cebirsel denklemi olarak olarak belireceğini biliyoruz. Diyelim ki bu denklemin, bir reel kökü yanısıra diğer iki kökü kompleks sayılardır. Bunların eşlenik kompleks kökler olması gerektiğini biliyoruz. Bu denklem, n. dereceden bir cebirsel denklem olsaydı, herhalde farklı ya da katlı olmak üzere daha çok sayıda kompleks köklerin varlığı da tasarlanabilirdi. Burada ortaya koyacağımız ilkeler, çözüm aşamasında, daha genel uygulamalar için bir fikir vermeye yeterli olacaktır. $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} (D - a_1)x - b_1y - c_1z = 0 \\ -a_2x + (D - b_2)y - c_2z = 0 \\ -a_3x - b_3y + (D - c_3)z = 0 \end{cases}$$

sisteminin katsayılar determinantı Δ=F(D) ile gösterilirse

$$\Delta = \begin{vmatrix} D - a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_2 & D - b_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & D - c_3 \end{vmatrix} = F(D) = 0$$

olması koşuluyla, $x(t) = y(t) = z(t) = 0$ aşikar çözümünden başkaca çözümlerinin varlığından söz edilebilecektir.

F(D)=0 denklemi, köklerinden biri reel, diğer ikisi eşlenik kompleks kökler ise :

$$F(D) = (D-\lambda)(D^2 + \alpha D + \beta) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Öyle ki burada $\alpha^2 - 4\beta < 0$ dır. Buradan kökler,

$$D_1 = \lambda ; D_{2,3} = -\frac{\alpha}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}.i$$

olarak belirlenir. Eğer $A = -\frac{\alpha}{2}; B = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}$ ile gösterilirse kompleks kökler $D_{2,3} = A \mp iB$ şeklinde ifade edilmiş olur.

Katlı kökler bulunmaması nedeniyle, uygulamaya konuluşunda, reel ya da kompleks kök oluşuna bakılmaksızın, önceden uygulandığı tarzda bir yol izlenmesini gerekir.

$D = D_1 = \lambda$ için, $F(D_1) = F(\lambda) = 0$ olup, sistem bunun için düzenlenirse,

$$\begin{cases} (\lambda - a_1)x - b_1 y - c_1 z = 0 \\ -a_2 x + (\lambda - b_2)y - c_2 z = 0 \\ -a_3 x - b_3 y + (\lambda - c_3)z = 0 \end{cases}$$

olur. Bu bir cebirsel sistem olup, ancak katsayılar determinantı sıfıra eşit olduğundan, bir Cramer sistemi değildir. Öyleyse bu sistemdeki bağıntılar aralarında lineer bağımlıdır. Bu şekilde düşünülecek, keyfi seçilecek bağıntılar ve bilinmeyene göre sistem düzenlenerek, x, y, z arasındaki ilişki belirlendikten sonra, bu çözümde $e^{\lambda t}$ çarpanının da kullanılacağı hatırlanarak, ilk çözüm takımı x_1, y_1, z_1 olarak bulunacaktır.

$$D = D_{2,3} = A \mp iB \text{ için de } F(D_{2,3}) = F(A \mp iB) = 0 \text{ dır.}$$

Sistem bu kökler için düzenlenirse ;

$$\begin{cases} [(A \pm iB) - a_1]x - b_1 y - c_1 z = 0 \\ -a_2 x + ((A \pm iB) - b_2]y - c_2 z = 0 \\ -a_3 x - b_3 y + [(A \pm iB) - c_3]z = 0 \end{cases}$$

şeklini alır. Gerçekte bu (+) ve (-) sayılar için iki ayrı sistemi temsil etmektedir. Bu sistemdeki bağıntılar da aralarında lineer bağımlıdır. Yine lineer cebirin kurallarına uygun hareket edersek, buradan x, y, z arasındaki ilişkiler ayrı ayrı bulunur. Unutulmamalıdır ki bu ilişkilerden biri $e^{(A-iB)t}$ çarpanını; diğeri $e^{(A+iB)t}$ çarpanını kabul edecektir. Böylece bulunan çözüm takımları;

$$D_2 = A - iB \text{ için } x_2, y_2, z_2$$

$$D_3 = A + iB \text{ için } x_3, y_3, z_3$$

olsun. Bunlar yardımıyla, sistemin genel çözümü ifade edilmiş olacaktır. Ancak bu ifade tarzı, bu şekliyle kompleks ifadeleri içermektedir. Bu tarz pek geçerli olmadığından, önceden de yapıldığı gibi ; bunların trigonometrik gösterimine geçilmesi yeğlenecektir.

$$e^{(A \pm iB)t} = e^{At}(\cos Bt \pm i \sin Bt)$$

yazılabilecektir. Sonuç, bu ifadenin de katkısıyla ve C_1, C_2, C_3 keyfi sabitleri yeniden düzenlenerek, istenilen şekilde biçimlendirilebilecektir.

Bu konudaki ayrıntıları aşağıdaki örnek üzerinde, daha iyi açıklamak olanaklıdır.

Örnek.

$$\begin{cases} Dx - Dy + z = 0 \\ (D-1)x - Dz = 0 \\ 10x - 4y + (D-7)z = 0 \end{cases}$$

homojen diferansiyel denklem sistemini inceleyelim:

$$\Delta = F(D) = \begin{vmatrix} D & -D & 1 \\ 0 & D-1 & -D \\ 10 & -4 & D-7 \end{vmatrix} = D^3 - 2D^2 - 3D + 10 = (D+2)(D^2 - 4D + 5)$$

olur ki buradan F(D)=0 için $D_1 = -2, D_{2,3} = 2 \pm i$ bulunur. Demek ki sistemin $x(t) = y(t) = z(t) = 0$ aşikar çözümünden başka çözümleri, D nin bu değerleri için bulunabilecektir. Dikkat edilirse, sistemin veriliş özelliğinden ötürü serbest değişkenin ne olduğu net olarak bilinemememektedir. Biz bu değişkenin t olduğunu kendimiz belirlemiş oluyoruz. Bu değişkeni bir başka harfle de temsil edebilirdik. Ancak, bu harf herhalde x, y, z den biri olmayacaktır.

D=D1=2 için: F(D1)=F(-2)=0 olup sistem bunun için düzenlenirse :

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \\ 10x - 4y - 9z = 0 \end{cases}$$

olur. Bu sistemin katsayılar determinantının sıfır oluşu, bu bağıntıların aralarında lineer-bağımlı olduğunu gösterir. Bu şekilde, x, y, z arasında

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$$

ilişki bulunur. Bu oluşumda e^{-2t} çarpanı kullanılacaktır. z yi keyfi bilinmeyen seçer, diğer ikisini buna göre ifade edersek, ilk çözüm takımı olarak

$$x_1 = \frac{7}{6}e^{-2t}; y_1 = \frac{2}{3}e^{-2t}; z_1 = e^{-2t}$$

bulunur.

$D = D_2 = 2 - i$ için $F(D_2) = F(2-i) = 0$ dır. Sistem düzenlenirse

$$\begin{cases} (2-i)x - (2-i)y + z = 0 \\ (1-i)y - (2-i)z = 0 \\ 10x - 4y - (5+i)z = 0 \end{cases}$$

olur. Bu da önceki sistemin özelliklerine sahip olduğundan, sistemdeki denklemler aralarında lineer-bağımlıdırlar. x, y, z arasındaki ilişki

$$\frac{5x}{7-4i} = \frac{y}{2-i} = \frac{z}{1-i}$$

şeklinde belirlenir. Burada keyfi olarak z seçilir ve $z = e^{(2-i)t}$ alınırsa, ikinci çözüm takımı

$$x_2 = \frac{11+3i}{10} e^{(2-i)t}; y_2 = \frac{3+i}{2} e^{(2-i)t}; z_2 = e^{(2-i)t}$$

olarak bulunur.

$D = D_3 = 2+i$ için de $F(D_3) = F(2+i) = 0$ dır. Sistem bunun için düzenlenirse

$$\begin{cases} (2+i)x-(2+i)y+z=0 \\ (1+i)y-(2+i)z=0 \\ 10x-4y-(5-i)z=0 \end{cases}$$

olur. Bu sistemde de bağıntılar, aralarında lineer-bağımlıdır. Bu özelliğin bir sonucu olarak ; x, y, z arasında

$$\frac{5x}{7+4i} = \frac{y}{2+i} = \frac{z}{1+i}$$

ilişkisi belirlenir. Keyfi olarak z değişkeni seçilirse $z = e^{(2+i)t}$ için üçüncü çözüm takımı

$$x_2 = \frac{11-3i}{10} e^{(2+i)t}; y_2 = \frac{3-i}{2} e^{(2+i)t}; z_2 = e^{(2+i)t}$$

olarak bulunur.

Bu şekilde belirlenen çözüm takımları yardımıyla, genel çözüm C_1, C_2, C_3 keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x(t) = C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+C_3x_3(t) = \frac{7}{6}C_1e^{-2t} + \frac{11+3i}{10}C_2e^{(2-i)t} + \frac{11-3i}{10}C_3e^{(2+i)t} \\ y(t) = C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+C_3y_3(t) = \frac{2}{3}C_1e^{-2t} + \frac{3+i}{2}C_2e^{(2-i)t} + \frac{3-i}{2}C_3e^{(2+i)t} \\ z(t) = C_1z_1(t)+C_2z_2(t)+C_3z_3(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{(2-i)t} + C_3e^{(2+i)t} \end{cases}$$

olarak ifade edilecektir. Ancak bu sonuç genel uygulamada yeterli bir sonuç kabul edilememektedir. Çünkü kompleks sayıları içermektedir. Önceden de değinildiği gibi bu sayılar ve ifadeler

$$e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$$

bağıntıları yardımıyla yeniden düzenlenmelidir. Elemanter sayılabilecek çeşitli işlemler yapılarak, çözüm ifadesi yeniden düzenlenir. K_1, K_2, K_3 yeni keyfi sabitleri gösterdiklerine ve

$$K_1 = C_1, K_2 = \frac{C_2+C_3}{2}, K_3 = \frac{C_2-C_3}{2}i$$

olmak koşuluyla genel çözüm

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{7}{6}K_1e^{-2t}+[(55K_2+15K_3)\cos t+(15K_2-55K_3)\sin t].e^{2t} \\ y(t)=\dfrac{2}{3}K_1e^{-2t}+[(3K_2+K_3)\cos t+(K_2-3K_3)\sin t].e^{2t} \\ z(t)=K_1e^{-2t}+[(2K_2\cos t-2K_3\sin t].e^{2t} \end{cases}$$

bulunur.

Örnek.

$D=\dfrac{d}{dt}$ olmak üzere $\begin{cases} 4(D-1)x+2(D+2)y+(5D-2)z=0 \\ (D^2+8)x-2(D+2)y+(D^2-D+6)z=0 \\ (4D-3)x+(2D+3)y+(5D-1)z=0 \end{cases}$

diferansiyel denklem sistemini inceleyelim. Bu sistemin önceden incelediklerimizden, örneğin öncekindeki gibi sistemlerden bir ayrıcalığı, normal sistem olmamasıdır. Ancak, buna rağmen, bir lineer homojen sistem olarak, bu sistemin de önceki incelememizde uyguladığımız yolla integre edilebileceğini tartışabileceğiz.

Katsayılar determinantı F(D) hesaplanırsa

$$\Delta=F(D)=-(D+2)^3$$

bulunacaktır. Bu sistemin $x(t)=y(t)=z(t)=0$ aşikar çözümünden başkaca çözümleri varsa, bunlar ancak

$$\Delta=F(D)=-(D+2)^3=0\Rightarrow D-2$$

(üç katlı kök) için var olabilecektir.

$D=D_1=-2$ (ilk kök) için $F(D_1)=F(-2)=0$ dır. Sistemden

$$\begin{cases} -12x-12z=0 \\ 12x+12z=0 \quad\Rightarrow y=0, z=-x \\ -11x-y-11z=0 \end{cases}$$

ilişkileri bulunur. Keyfi olarak $x=e^{-2t}$ alınırsa, ilk çözüm takımı

$$x_1=e^{-2t}; y_1=0; z_1=-e^{-2t}$$

olur.

$D=D_2=-2$ (ikinci kök) için : yine $F(D_2)=F(-2)=0$ dır. Ancak bu kez ilk kökte olduğu gibi hareket edilemez. Çünkü çakışık köktür. Öyleyse x,y,z yeniden düzenlenerek önerilmelidir. $a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3$ hesaplanması gereken katsayılar olmak üzere ikinci çözüm takımının

$$x_2=(a_1t+b_1)e^{-2t}; y_2=(a_2t+b_2)e^{-2t}; z_2=(a_3t+b_3)e^{-2t}$$

şeklinde seçilmesi gerekecektir. Bunu sisteme uygulayalım. Bu amaçla önce türevleri hesaplayalım :

$$Dx_2 = \frac{dx_2}{dt} = (-2a_1t + a_1 - 2b_1)e^{-2t};$$
$$Dy_2 = \frac{dy_2}{dt} = (-2a_2t + a_2 - 2b_2)e^{-2t};$$
$$Dz_2 = \frac{dz_2}{dt} = (-2a_3t + a_3 - 2b_3)e^{-2t};$$
$$D^2x_2 = \frac{d^2x_2}{dt^2} = (4a_1t - 4a_1 + 4b_1)e^{-2t};$$
$$D^2z_2 = \frac{d^2x_2}{dt^2} = (4a_3t - 4a_3 + 4b_3)e^{-2t}$$

Sisteme uygulayalım. Bazı sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılmak suretiyle sistem,

$$\begin{cases} (-12a_1 - 12a_3)t + (4a_1 - 12b_1 + 2a_2 + 5a_3 - 12b_3) \equiv 0 \\ (12a_1 + 12a_3)t - (4a_1 - 12b_1 + 2a_2 + 5a_3 - 12b_3) \equiv 0 \\ (-11a_1 - a_2 - 11a_3)t + (4a_1 - 11b_1 + 2a_2 - b_2 + 5a_3 - 11b_3) \equiv 0 \end{cases}$$

şeklini alır. Bu bağıntılar özdeş olarak sağlanacağından ; t lerin katsayılarından

$$\begin{cases} -12a_1 - 12a_3 = 0 \\ 12a_1 + 12a_3 = 0 \\ -11a_1 - a_2 - 11a_3 = 0 \end{cases}$$

sistemi ; sabit terimlerden de

$$\begin{cases} 4a_1 - 12b_1 + 2a_2 + 5a_3 - 12b_3 = 0 \\ 4a_1 - 12b_1 + 2a_2 + 5a_3 - 12b_3 = 0 \\ 4a_1 - 11b_1 + 2a_2 - b_2 + 5a_3 - 11b_3 = 0 \end{cases}$$

sistemi elde edilir. İlk sistem $x = a_1, y = a_2, z = a_3$ alındığı takdirde önceki sistemle tamamen aynıdır. Öyleyse aynı değerlendirme yapılırsa (ki bu bir bakıma zorunludur.)

$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1$

bulunur; (x=1 keyfi seçilmiş olarak). Bu değerler için ikinci sistemi düzenleyelim :

$$\begin{cases} 12b_1 + 12b_3 = -1 \\ 11b_1 + b_2 + 11b_3 = -1 \end{cases}$$

olur. Bu sistem

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = -\dfrac{1}{12} \\ b_1 + b_3 = -\dfrac{1 + b_2}{11} \end{cases}$$

şeklinde düzenlenirse, bunlardan $b_2 = -\dfrac{1}{12}$ bulunur. Bu değer için her iki denklem

$$b_1 + b_3 = -\frac{1}{12}$$

bağıntısına indirgenmiş olur. Burada keyfi olarak $b_1 = 0$ seçilirse $b_3 = -\frac{1}{12}$ bulunacaktır. Böylece, önerilen bütün katsayılar belirlenmiş olur. Öyleyse artık ikinci çözüm takımını ifade etmek olanağı vardır. Bu da

$$x_2 = te^{-2t};\, y_2 = -\frac{1}{12}e^{-2t};\, z_2 = (-t - \frac{1}{12})e^{-2t}$$

şeklinde belirlenecektir.

$D = D_3 = -2$ (üçüncü kök) için de $F(D_3) = F(-2) = 0$ dır. Ancak bu kere de ikinci kök için yapılanda olduğu gibi hareket edilemez. Bu kez çözüm takımını; $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$ hesaplanması gereken sabitler olmak üzere

$$x_3 = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1)e^{-2t};\, y_3 = (a_2 t^2 + b_2 t + c_2)e^{-2t};\, z_3 = (a_3 t^2 + b_3 t + c_3)e^{-2t}$$

şeklinde düzenlemek gerekir. Yani katsayılar t nin ikinci dereceden çokterimlileri olarak ifade edilmiştir. Önce türev işlemlerini gerçekleştirerek, önerilen bu çözüm takımını sisteme uygulayalım :

$$Dx_3 = \frac{dx_3}{dt} = [-2a_1 t^2 + 2(a_1 - b_1)t + b_1 - 2c_1]e^{-2t}$$

$$Dy_3 = \frac{dy_3}{dt} = [-2a_2 t^2 + 2(a_2 - b_2)t + b_2 - 2c_2]e^{-2t}$$

$$Dz_3 = \frac{dz_3}{dt} = [-2a_3 t^2 + 2(a_3 - b_3)t + b_3 - 2c_3]e^{-2t}$$

$$D^2 x_3 = \frac{d^2 x_3}{dt^2} = [4a_1 t^2 - 4(2a_1 - b_1)t + 2(a_1 - 2b_1 + 2c_1)]e^{-2t}$$

$$D^2 z_3 = \frac{d^2 x_3}{dt^2} = [4a_3 t^2 - 4(2a_3 - b_3)t + 2(a_3 - 2b_3 + 2c_3)]e^{-2t}$$

olup, bunlar için sistem, bazı sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{cases} 12(a_1 + a_3)t^2 - (8a_1 - 12b_1 + 4a_2 + 10a_3 - 12b_3)t - (4b_1 - 12c_1 + 2b_2 + 5b_3 - 12c_3) \equiv 0 \\ 12(a_1 + a_3)t^2 - (8a_1 - 12b_1 + 4a_2 + 10a_3 - 12b_3)t + (2a_1 - 4b_1 + 12c_1 - 2b_2 + 2a - 5b_3 + 12c_3) \equiv 0 \\ -11(a_1 + a_2 + 11a_3)t^2 + (8a_1 - 11b_1 + 4a_2 - b_2 + 10a_3 - 11b_3)t + (4b_1 - 11c_1 + 2b_2 - c_2 + 5b_3 - 11c_3) \equiv 0 \end{cases}$$

şeklini alır. Bu bağıntılar özdeş olarak sağlanacağından, sırasıyla, t^2 lerin katsayılarından

$$\begin{cases} 12(a_1 + a_3) = 0 \\ 12\ (a_1 + a_3) = 0 \\ -(11\mathrm{a}_1 + a_2 + 11\mathrm{a}_3) = 0 \end{cases}$$

sistemi ; t lerin katsayılarından,

$$\begin{cases} 8a_1 - 12b_1 + 4a_2 + 10a_3 - 12b_3 = 0 \\ 8a_1 - 12b_1 + 4a_2 + 10a_3 - 12b_3 = 0 \\ 8a_1 - 11b_1 + 4a_2 - b_2 + 10a_3 - 11b_3 = 0 \end{cases}$$

sistemi ve nihayet sabit terimlerden

$$\begin{cases} 4b_1 - 12c_1 + 2b_2 + 5b_3 - 12c_3 = 0 \\ 2a_1 - 4b_1 + 12c_1 - 2b_2 + 2a - 5b_3 + 12c_3 = 0 \\ 4b_1 - 11c_1 + 2b_2 - c_2 + 5b_3 - 11c_3 = 0 \end{cases}$$

sistemi yazılır. Bunlardan ilki, ilk kök uygulamasında karşılaşılan sistemden farklı değildir. Öyleyse aynı yorumlar tekrarlanarak bu sistemdeki a_1, a_2, a_3 katsayılarını

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1$$

olarak alırız. Bu şekilde seçim yapmak bir bakıma bir zorunluluktur da. Bunlar yardımıyla ikinci sistemi düzenleyelim :

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = -\dfrac{1}{6} \\ b_1 + b_3 = -\dfrac{b_2 + 2}{11} \\ (b_1 + b_3) + b_2 = -2 \end{cases}$$

olur. Bu sistem gerçekte

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = -\dfrac{1}{6} \\ b_1 + b_3 = -\dfrac{b_2 + 2}{11} \end{cases}$$

şeklinde göz önüne alınırsa, buradan kolayca $b_2 = -\frac{1}{6}$ olması gerektiği belirlenir. Böylece son iki denklem de lineer-bağımlı hale gelir ki bunlardan, örneğin keyfi olarak $b_1 = 0$ seçilirse $b_3 = -\frac{1}{6}$ olur. Böylece b_1, b_2, b_3 katsayıları da

$$b_1 = 0, b_2 = -\frac{1}{6}, b_3 = -\frac{1}{6}$$

şeklinde belirlenmiş olur.

Bulunan bu değerler için üçüncü sistemi değerlendirelim :

$$\begin{cases} 12(c_1+c_3)=-\dfrac{7}{6} \\ 12(c_1+c_3)=-\dfrac{7}{6} \\ 11(c_1+c_3)+c_2=-\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

olur. Önceki iki sistemi yorumlarken göz önünde bulundurulan hususlar, bu sistem için de aynen tekrarlanacaktır. Bu düşünceden hareket edilerek,

$$\begin{cases} c_1+c_3=-\dfrac{7}{72} \\ c_1+c_3=-\dfrac{6c_2+7}{66} \end{cases} \rightarrow c_2=-\frac{7}{72}$$

bulunur.

Böylece sistem

$$c_1+c_3=-\frac{7}{72}$$

bağıntısına indirgenmiş olur. Keyfi olarak $c_1=0$ seçilirse, $c_3=-\dfrac{7}{72}$ bulunur. Demek ki, c_1,c_2,c_3 katsayıları

$$c_1=0, c_2=-\frac{7}{72}, c_3=-\frac{7}{72}$$

olarak belirlenmişlerdir.

Katsayıların bu işlemler sonucu belirlenmesinden sonra, üçüncü kök için üçüncü çözüm takımı

$$x_3=t^2e^{-2t}, y_3=(-\frac{1}{6}t-\frac{7}{72})e^{-2t}, z_3=(-t^2-\frac{1}{6}t-\frac{7}{72})e^{-2t}$$

olacaktır. Artık incelemekte olduğumuz sistemin genel çözümü ifade edilebilecektir. Gerekli düzenlemelerin de yapıldığı varsayımıyla, C_1,C_2,C_3 keyfi sabitler olmak üzere, genel çözüm

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}+C_3t^2e^{-2t} \\ y(t)=-\dfrac{1}{12}C_2e^{-2t}+(-\dfrac{1}{6}t-\dfrac{7}{72})C_3e^{-2t} \\ z(t)=-C_1e^{-2t}+(-t-\dfrac{1}{12})C_2e^{-2t}+(-t^2-\dfrac{1}{6}t-\dfrac{7}{72})C_3e^{-2t} \end{cases}$$

olarak ifade edilecektir. Hatta bu sonuç yeni bir düzenlemeyle,

$$\begin{cases} x(t) = (C_3t^2 + C_2t + C_1)e^{-2t} \\ y(t) = [-\frac{1}{6}C_3t - \frac{1}{72}(6C_2 + 7C_3)]e^{-2t} \\ z(t) = [-C_3t^2 - (C_2 + \frac{1}{6}C_3)t - (C_1 + \frac{1}{12}C_2 + \frac{7}{72}C_3)]e^{-2t} \end{cases}$$

şeklinde de yazılabilecektir.

Örnek.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 6\frac{dy}{dt} - 5\frac{dz}{dt} + 2x + 2z = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + 2x + 4y + 6z = 0 \\ -\frac{dx}{dt} + 6\frac{dy}{dt} + 5\frac{dz}{dt} - 2x - z = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklem sistemini, her ne kadar normal bir homojen sistem değilse de, önceki örneğimizde olduğu gibi, operatörleri kullanarak inceleyelim

$D = \frac{d}{dt}$ olmak üzere sistem yeniden düzenlenirse

$$\begin{cases} (D+2)x - 6Dy - (5D-2)z = 0 \\ (D+2)x + (D^2 - 2D + 4)y + (D^2 - D + 6)z = 0 \\ (D+2)x - 6Dy - (5D-1)z = 0 \end{cases}$$

şeklini alacaktır. Bu sistemin, $x(t) = y(t) = z(t) = 0$ aşikar çözümünden başkaca çözümünün var olup olmadığını araştırıyoruz. Bu amaçla önce katsayılar determinantını hesaplayalım:

$$\Delta = F(D) = \begin{vmatrix} (D+2) & -6D & -5D+2 \\ D+2 & D^2 - 2D + 4 & D^2 - D + 6 \\ D+2 & -6D & -5D+1 \end{vmatrix} = -(D+2)^3$$

olur.

$F(D) = -(D+2)^3 = 0$ için $D_{1,2,3} = -2$ (üç katlı kök) bulunur. Oysa $D = -2$ için sistem düzenlenirse ;

$$\begin{cases} 12y + 12z = 0 \\ 12y + 12z = 0 \\ 12y + 11z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 12y + 11z = 0 \end{cases}$$

sistemine geçilir. Bu y,z bilinmeyenleri için düzenlenmiş x den bağımsız bir lineer homojen sistemdir. Bu sistemden, $y = z = 0$ dan başka çözüm bulunabilmesi yani y ve z nin hesaplanabilir olması koşulu, bu sistemin katsayılar determinantının sıfır olmasıdır. Oysa,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 12 = -1 \neq 0$$

dır. Demek ki bu homojen sistemini, aşikar çözüm dışında sağlayan başkaca bir çözüm bulunamaz.

Bu sonuca bağlı olarak incelemeye aldığımız diferansiyel denklem sisteminin

$$x(t) = y(t) = z(t) = 0$$

dan başka bir çözümü bulunamayacaktır. Ayrıca aşikar çözüm olarak adlandırdığımız bu çözüm de, önceden de zaman zaman belirtildiği gibi, keyfi sabitleri içermediğinden genel çözüm niteliğinde değildir.

Sonuç olarak, seçilen diferansiyel denklemin genel çözümü mevcut değildir.

08.03. Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklem Sisteminin Operatörler ile Çözümü

08.03.01. Basit Halin İncelenmesi

Öncelikle bu tür sistemleri, alışıldığı biçimde, bir basit model üzerinde inceleyelim. Bu şekilde oluşan kavramları ve yöntemleri genellersek, genel hale varmaya çalışalım. Model olarak, yine üç bilinmeyen fonksiyonun üç bağıntıdan oluşan bir özel sistemini seçelim.

Bu sistem $a_{ij};(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$ sabitlerden oluşan katsayılar ;

$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ fonksiyonlarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = f_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = f_2(t) \\ \dfrac{dz}{dt} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = f_3(t) \end{cases} \tag{8.4}$$

şeklinde seçilmiş olsun. $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ gibi fonksiyonlara bazen, *"homojenliği bozucu fonksiyonlar"* da denilmektedir. Gerçekten, eğer $f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = 0$ olsaydı, (8.4) sistemi bir lineer-homojen sistemden başka bir şey olmayacaktı.

Bu tür bir sistem, ilkel bir yaklaşımla, türetme yok etme yönteminin kullanılmasıyla integre edilebilir. Ancak yöntemin fazla pratik olmaması nedeniyle sistemin genel oluşumunu incelerken göreceğimiz gibi, daha karmaşık sistemlerde bu yöntemin uygulanması pek de kolay olmayacaktır. Bu nedenle, henüz bu basit hali incelerken, bu yöntemi kullanmayı önermeyerek; bizim için daha yararlı ve üzerinde genellemeye gitmeye ortam hazırlayabilecek bir çözüm tekniği olarak, burada da operatörlerden yararlanılması yeğlenecektir. Kaldı ki bundan önceki altbölümde operatörlerle yapılan çalışmalar, bize bu konuda hayli deneyim kazandırmış olmalıdır.

Yukarıda açıklanan gerekçeye dayalı olarak, (8.4) diferansiyel denklem sistemi, $D = \dfrac{d}{dt}$ olmak üzere yeniden düzenlenirse sistem

$$\begin{cases} (D+a_{11})x+a_{12}y+a_{13}z=f_1(t) \\ a_{21}x+(D+a_{22})y+a_{23}z=f_2(t) \\ a_{31}x+a_{32}y+(D+a_{33})z=f_3(t) \end{cases} \tag{8.5}$$

şeklinde ifade edilmiş olacaktır. Bu sistemin, katsayılar determinantı sıfırdan farklı olması koşuluyla, böyle bir sisteme, cebirsel anlamda bir homojen sistem gibi yaklaşmak olanağı vardır.

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix} D+a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & D+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & D+a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

olsun.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} f_1(t) & a_{12} & a_{13} \\ f_2(t) & D+a_{22} & a_{23} \\ f_3(t) & a_{32} & D+a_{33} \end{vmatrix}=\varphi_1(t)\,;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} D+a_{11} & f_1(t) & a_{13} \\ a_{21} & f_2(t) & a_{23} \\ a_{31} & f_3(t) & D+a_{33} \end{vmatrix}=\varphi_2(t)\,;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} D+a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & D+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & D+a_{33} \end{vmatrix}=\varphi_3(t)$$

olarak hesaplanabildiğine göre, Cramer teoremi gereğince,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta(D)}=\frac{\varphi_1(t)}{\Delta(D)};\, y=\frac{\Delta_y}{\Delta(D)}=\frac{\varphi_2(t)}{\Delta(D)};\, z=\frac{\Delta_z}{\Delta(D)}=\frac{\varphi_3(t)}{\Delta(D)}$$

yazılabilecektir. $\Delta(D)$ ifadesi, modelimize göre D nin 3.dereceden bir tam çokterimlisidir. Buna göre çözüm yeniden düzenlenirse;

$$\Delta(D)x=\varphi_1(t);\Delta(D)y=\varphi_2(t);\Delta(D)z=\varphi_2(t)$$

olur ki bunlar, karakteristik denklemleri $\Delta(D)=0$ olarak aynı ancak ikinci yandaki fonksiyonlar itibariyle farklı birer adi ve sabit katsayılı diferansiyel denklemdirler. Bu tür diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin ne şekilde bulunacağına dair, bütün ayrıntıları da içeren bilgiler 1. ciltte bulunmaktadır. Yani önceliği itibariyle bu çözümler, bizce bilinmektedir.

İncelemeye ayrı ayrı alacağımızdan, bu diferansiyel denklemlerin her biri üçüncü mertebeden bir denklem olup, genel çözümleri ifade edildiği zaman,

$$\begin{cases} x(t)=\phi_1(t,c_1,c_2,c_3)+h_1(t) \\ y(t)=\phi_2(t,c_4,c_5,c_6)+h_2(t) \\ z(t)=\phi_3(t,c_7,c_8,c_9)+h_3(t) \end{cases} \tag{8.6}$$

şeklinde çözümlerle karşılaşılacaktır. Anlaşılacağı gibi fonksiyonlar birbirlerine bağlı olmaksızın çözümlendiğinden, her seferinde farklı keyfi sabitlerin kullanılması zorunluluğu sonucunda, ortaya dokuz farklı keyfi sabit çıkmıştır. Oysa sistemin mertebesi, altbölüm 13. deki tanıma uygun olarak 3 tür. Biliyoruz ki sistemimizin genel çözümünde de, sistemin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit bulunacaktır. Bu nedenle iddia edilebilir ki (8.6) çözümünde yer alan keyfi sabitler, aralarında lineer bağımlıdır. Öyleyse bu ilişkinin belirlenmesi ve bunun yardımıyla (8.6) çözümünün tanıma uygun olarak yeniden düzenlenmesi gerekir. (8.6) çözümündeki $h_1(t), h_2(t)$ ve $h_3(t)$ fonksiyonları ise diferansiyel denklemlerin ikinci yanlarında bulunan fonksiyonlarla ilintili olarak elde edilen özel çözümlerdir.

Keyfi sabitler arasındaki ilişkilerin belirlenmesinde, sistemdeki denklemlerden yararlanılır. (8.6) çözümü, sistemdeki her bağıntıyı ayrı ayrı özdeş olarak sağlayacaktır. Bu kavramdan hareket ederek, (8.6) de ifade edilen çözüm sisteme uygulanırsa, keyfi sabitler arsında sistemlere bağlı ilişkiler böylece düzenlenmiş olur. Bu sistemlerde, c_1, c_2, c_3 keyfi bilinmeyenler olarak seçilmek suretiyle,

$$\begin{aligned} c_4 &= u_1(c_1, c_2, c_3); \qquad & c_7 &= u_4(c_1, c_2, c_3) \\ c_5 &= u_2(c_1, c_2, c_3); \qquad & c_8 &= u_5(c_1, c_2, c_3) \\ c_6 &= u_3(c_1, c_2, c_3); \qquad & c_9 &= u_6(c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

şeklinde ifadelere varılıyorsa, genel çözüm sadece c_1, c_2, c_3 keyfi sabitlerini içerecek şekilde düzenlenebilecektir. Böylece genel çözüm

$$\begin{cases} x(t) = \phi_1(t, c_1, c_2, c_3) + h_1(t) \\ y(t) = \phi_2[t, u_1(c_1, c_2, c_3), u_2(c_1, c_2, c_3), u_3(c_1, c_2, c_3)] + h_2(t) \\ z(t) = \phi_3[t, u_4(c_1, c_2, c_3), u_5(c_1, c_2, c_3), u_6(c_1, c_2, c_3)] + h_3(t) \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilecektir.

Örnek.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - y = e^{4t} \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{5t} \end{cases}$$

diferansiyel denklem sistemi verilmektedir. Sistemin ikinci yanında homojenliği bozucu fonksiyonlar vardır. Sistem sabit katsayılıdır.

$D = \dfrac{d}{dt}$ olmak üzere sistemi operatör kullanarak yeniden düzenleyelim:

$$\begin{cases} Dx + (D-1)y = e^{4t} \\ 2Dx + (D+2)y = e^{5t} \end{cases}$$

olur.

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D & D-1 \\ 2D & D+2 \end{vmatrix} = 4D - D^2 \neq 0$$

dır. Öyleyse bu sistemden, Cramer teroremi yardımıyla $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları, birbirlerine bağımlı olmaksızın incelenebilecektir.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} e^{4t} & D-1 \\ e^{5t} & D+2 \end{vmatrix} = (D+2)e^{4t} - (D-1)e^{5t} = 6e^{4t} - 4e^{5t}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} D & e^{4t} \\ 2D & e^{5t} \end{vmatrix} = D(e^{5t}) - 2D(e^{4t}) = 5e^{5t} - 8e^{4t}$$

olarak

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta(D)} = \frac{\varphi_1(t)}{\Delta(D)} = \frac{6e^{4t} - 4e^{5t}}{4D - D^2}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta(D)} = \frac{\varphi_2(t)}{\Delta(D)} = \frac{5e^{5t} - 8e^{4t}}{4D - D^2}$$

yazılabilecektir. Buradan da teknik inceleme sırasında açıklandığı gibi

$$(D^2 - 4D)x = 4e^{5t} - 6e^{4t}; (D^2 - 4D)y = 8e^{4t} - 5e^{5t}$$

şeklindeki diferansiyel denklemlere varılacaktır. Bu denklemleri ayrı ayrı integre edelim :

$$(D^2 - 4D)x = 4e^{5t} - 6e^{4t}; (D^2 - 4D)y = 8e^{4t} - 5e^{5t}$$

diferansiyel denklemlerinin homojen kısmı,

$(D^2 - 4D)x = 0$ ve $(D^2 - 4D)y = 0$ olup $D^2 - 4D = 0$ ortak karakteristik denklemdir. Bundan $D_1 = 0$ ve $D_2 = 4$ bulunur. Buna göre her iki denklem için, ikinci yansız denklemlerin genel çözümleri, farklı keyfi sabitler kullanılarak ;

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{4t}; y_1 = c_3 + c_4 e^{4t}$$

şeklinde ifade edilecektir.

Özel çözümlere gelince :

$$(D^2 - 4D)x = 4e^{5t} - 6e^{4t} \text{ için } h_1(t) = \frac{4}{5}e^{5t} - \frac{3}{2}te^{4t}$$

$$(D^2 - 4D)y = 8e^{4t} - 5e^{5t} \text{ için } h_2(t) = 2te^{4t} - e^{5t}$$

bulunacaktır. Bunlarla ilgili ve önceki bilgilere dayanan ana işlemler okuyucuya bırakılmıştır. Bu aşamalardan sonra $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlarının genel çözümü yazılabilecektir.

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + h_1 = c_1 + c_2 e^{4t} + \dfrac{4}{5}e^{5t} - \dfrac{3}{2}te^{4t} \\ y(t) = y_1 + h_2 = c_3 + c_4 e^{4t} + 2te^{4t} - e^{5t} \end{cases}$$

olur. $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlarının bu şekilde belirlenmesine karşın, bu sonuç sistemin genel çözümü olarak alınamaz. Çünkü $\Delta(D) = 4D - D^2$ olarak D nin 2. dereceden bir tam çok terimlisidir. Bu, sistemin mertebelerinin 2 olduğunu, başka bir yaklaşımla da, sistemin genel çözümünde ancak ve ancak iki tane keyfi sabitlerin bulunabileceğini gösterir. Bu düşünceden hareket ederek, c_1, c_2, c_3, c_4 keyfi sabitleri arasındaki ilişkiyi belirlemeye çalışalım. Bunun için sistemdeki bağıntılara gidelim :

Sistemdeki ilk bağıntıdan : $(4c_2 + 3c_4 - \frac{1}{2})e^{4t} - c_3 \equiv 0$

Sistemdeki ikinci bağıntıdan : $(8c_2 + 6c_4 - 1)e^{4t} - 2c_3 \equiv 0$

bulunacaktır. Gerçekten bunlar da birbirleriyle aynı bağıntılardır. Bu bağıntılar özdeş olarak sağlanacaklarından,

$$\begin{cases} c_3 = 0 \\ 8c_2 + 6c_4 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_4 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}c_2 \end{cases}$$

bulunur. Burada dikkati çeken, c_1 keyfi sabitinin bu bağıntılarda yer almamasıdır. Bu her zaman böyle gerçekleşmez. Ancak burada olduğu gibi sonuç bir keyfi sabitle bağımlı olmaksızın düzenlenebilmişse, genel çözüm yazılırken bu keyfi sabit ya aynen bırakılır (bu çözümde olduğu gibi) ya da öyle gerektiriyorsa, yerine bir keyfi sayı konulabilir. Hatta ifadeyi bozmayacaksa yerine sıfır konulması dahi yeğlenebilir.

Sonuç olarak;

$$c_1 = c_1; c_2 = c_2; c_3 = 0; c_4 = \frac{1}{6} - \frac{4}{3}c_2$$

alınmak suretiyle, genel çözüm yeniden düzenlenirse, sistemin çözümü

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^{4t} - \frac{3}{2}te^{4t} + \frac{4}{5}e^{5t} \\ y(t) = -\frac{4}{3}c_2 e^{4t} + (2t + \frac{1}{6})e^{4t} - e^{5t} \end{cases}$$

bulunur.

08.03.02. Genel Halin İncelenmesi

Sabit katsayılı ve lineer bir diferansiyel denklem sisteminin genel ifadesi, operatörler kullanılmak suretiyle, aşağıda olduğu şekilde gösterilebilir. $D = \frac{d}{dt}$ olmak üzere ve $F_{ij}(D)$ ifadeleri $(i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n)$, D nin n . dereceye kadar lineer tam çok terimlisi olduğuna göre

$$\begin{cases} F_{11}(D)x_1 + F_{12}(D)x_2 + ... + F_{1n}(D)x_n = f_1(t) \\ F_{21}(D)x_1 + F_{22}(D)x_2 + ... + F_{2n}(D)x_n = f_2(t) \\ \vdots \\ F_{n1}(D)x_1 + F_{n2}(D)x_2 + ... + F_{nn}(D)x_n = f_n(t) \end{cases} \tag{8.7}$$

şeklinde bir simultane sistem, tanımlanmak istenilen denklem sistemini temsil etmektedir. $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ bilinmeyen fonksiyonları için oluşturulan bu sistemde, katsayılar operatörle ifade edildiğinden, sistemin çözümünde tamamen lineer cebir kuralları uygulamak olanağı vardır. Örneğin bu sistem bir Cramer sistemi gibi bakmak olasıdır. Ancak bir koşul öncelikle sağlanmalıdır: katsayılar determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

Bir önceki alt bölümde, böyle bir sistemin daha basit halini (daha özel halini) alarak inceledik. Orada oluşan bilgi birikiminin, bu denklemin çözümünde kullanılması yararlı olacaktır. Katsayılar determinantının sıfırdan farklı olması ve çözümde bu determinantın kullanılması gibi...

Sistemin katsayılar determinantı $\Delta(D)$ ile gösterelim. Buna göre;

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix} F_{11}(D) & F_{12}(D) & \dots & F_{1n}(D) \\ F_{21}(D) & F_{22}(D) & \dots & F_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{n1}(D) & F_{n2}(D) & \dots & F_{nn}(D) \end{vmatrix} \neq 0$$

olmak koşuluyla

$$\Delta_j(D)=\begin{vmatrix} F_{11}(D)\dots & F_{1,j-1}(D) & f_1(t) & F_{1,j+1}(D)\dots F_{1n}(D) \\ F_{21}(D)\dots & F_{2,j-1}(D) & f_2(t) & F_{2,j+1}(D)\dots F_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ F_{n1}(D)\dots & F_{n,j-1}(D) & f_n(t) & F_{n,j+1}(D)\dots F_{nn}(D) \end{vmatrix}$$

determinantları hesaplanabilecektir. $\Delta_j(D)$ determinantları tek tek hesaplandığında ki sayıca n tanedir, bunlar t nin birer fonksiyonu ya da sabitler olarak bulunacaktır. Bunları

$$\Delta_j(D)=\varphi_j(t);\ j=1,2,\dots,n$$

ile gösterelim. x_j bilinmeyen fonksiyonları temsil ettiğine göre

$$x_j(t)=\frac{\varphi_j(t)}{\Delta(D)} \rightarrow \Delta(D)x_j(t)=\varphi_j(t)$$

çözümlerine ve dolayısıyla diferansiyel denklemlerine ulaşılır.

$$\begin{aligned} &\Delta(D)x_1(t)=\varphi_1(t) \\ &\Delta(D)x_2(t)=\varphi_2(t) \\ &\vdots \\ &\Delta(D)x_n(t)=\varphi_n(t) \end{aligned} \tag{8.8}$$

diferansiyel denklemleri incelenmeli ve çözülmelidir. İlk denklemin çözümünden $x_1(t)$; ikinci denklemin çözümünden $x_2(t)$ ve giderek sonuncu denklemin çözümünden de $x_n(t)$ bilinmeyen fonksiyonları belirlenecektir. Ancak bu böyle olmakla birlikte birer sabit katsayılı, ikinci yanlı lineer diferansiyel denklem olan bu denklemin genel çözümlerinin yazılmasında keyfi sabitlerin bir kurala göre düzenlenmesi gerekmektedir. Aksi halde elde edilen sonuçlar, bir sistemin çözümü olarak bir araya getirildiğinde, buna "*sistemin genel çözümü*" denilemeyecektir. İşte bu düzenleme için nasıl hareket edileceği aşağıda açıklanmıştır:

$\Delta(D)x_j=\varphi_j(t);\ j=1,2,\dots,n$

diferansiyel denklemlerinin bir ortak özelliği $\Delta(D)$ nin bütün denklemlerde aynı olmasıdır. $\Delta(D)$ aynı zamanda, katsayılar determinantı olup, D nin bir tam çok terimlisidir. Bu aynı zamanda diferansiyel denklemlerin karakteristik denklemi olarak görülmektedir, yeter ki $\Delta(D)=0$ alınmış olsun. $\Delta(D)$ nin derecesi, sistemin mertebesini belirtmektedir. Buna bağlı olarak, sistemin genel çözümünde yer alacak keyfi sabitlerin sayısını da düzenlemektedir. Şimdi bu olgular göz önünde bulundurularak, $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonlarının çözümleri sırasında ortaya çıkan keyfi sabitlerin sayısının kaç tane olması gerektiği böylece saptanabilecektir. Bunun üstünde kalan sayıdaki keyfi sabitler öncekilerle lineer bağımlılık ilişkisi içindedirler.

$\Delta(D)=0$ karakteristik denkleminin $k.$ dereceden bir cebirsel denklem olduğunu varsayalım. Burada $k>0$ ve tam sayı olabileceği gibi, $k \geq n$ ya da $k \leq n$ olması gerektiği de saptanabilir. Yani bir başka yaklaşımla k için sonlu olmak koşuluyla, bir üst sınır belirlemek bu aşamada olanaksızdır. Bu k sayısı, her problem için, onun koşullarına göre belirlenecektir. Ancak bu sayının özelliği, sistemin mertebesinin k olduğunu belirtmesidir. Diğer yandan, (8.8) deki diferansiyel denklemlerinin her biri için, $m_0, m_1, ..., m_k$ sabit katsayıları olmak üzere,

$$\Delta(D) = m_0 D^k + m_1 D^{k-1} + ... + m_{k-1} D + m_k = 0$$

karakteristik denkleminden $D_1, D_2, ..., D_k$ gibi, k tane cebirsel sayıdan oluşan kökler elde edilecektir. Bunların, her bir denklem için değerlendirilmesi, ikinci yansız denklemlere göre, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= c_{11}e^{D_1 t} + c_{12}e^{D_2 t} + ... + c_{1k}e^{D_k t} \\
x_2(t) &= c_{21}e^{D_1 t} + c_{22}e^{D_2 t} + ... + c_{2k}e^{D_k t} \\
&\vdots \\
x_n(t) &= c_{n1}e^{D_1 t} + c_{n2}e^{D_2 t} + ... + c_{nk}e^{D_k t}
\end{aligned} \tag{8.9}$$

olup, bunlarda toplam olarak $n \times k$ tane keyfi sabit kullanıldığı görülmektedir. Çünkü, her bilinmeyen fonksiyon için yapılan çözüm, öncekilerden bağımsız olarak gerçekleştirildiğinden, önceden yapılan çözümlerde kullandığımız keyfi sabitlerin tekrar kullanılması artık olanaksızdır.

Sistemin mertebesi k olması, (8.8) çözümlerinden hareketle genel çözüm ifade edilirken ancak k tane keyfi sabiti seçerek, diğer geriye kalan $(n-1).k$ tane keyfi sabitin bunlar cinsinden ifade edilmesini gerekli kılmaktadır. Bu iş her sistemdeki bağıntıdan yararlanılarak sağlanır. (8.8) ifadeleri, ikinci yanlı diferansiyel denklemlerdir. Öyleyse ikinci yanda yer alan $\varphi_j(t)$ fonksiyonlarından ötürü, birer özel çözümü bulunup, (8.9) çözümlerime eklenmelidir. Eğer bu çözümlerin $h_j(t); j=1,2,...,n$ oldukları varsayılırsa (8.9) daki diferansiyel denklem çözümleri her birinden bağımsız olarak, birer genel çözüm niteliğine kavuşurlar. Böylece ;

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= c_{11}e^{D_1 t} + c_{12}e^{D_2 t} + ... + c_{1k}e^{D_k t} + h_1(t) \\
x_2(t) &= c_{21}e^{D_1 t} + c_{22}e^{D_2 t} + ... + c_{2k}e^{D_k t} + h_2(t) \\
&\vdots \\
x_n(t) &= c_{n1}e^{D_1 t} + c_{n2}e^{D_2 t} + ... + c_{nk}e^{D_k t} + h_n(t)
\end{aligned} \tag{8.10}$$

olurlar. Bunlar için önceden göz önüne alınan sisteminin herhangi bir bağıntısı seçilerek bir uygulama yapılır. Bilindiği gibi $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ fonksiyonları (8.7) sistemine aittir ve bu sistem, bu fonksiyonlar tarafından sağlanmalıdır. Bu işlemleri keyfi sabitler arasındaki lineer-bağımlılık ilişkileri tam olarak belirleninceye kadar sürdürülür. Bunun için gerekirse, (8.7) sisteminin diğer bağıntıları da kullanılır.

Keyfi sabitler arasındaki ilişkiler belirlendikten ve keyfi sabitler k tane keyfi sabite göre düzenlendikten sonra, bunlar için bilinmeyen fonksiyonlar yeniden düzenlenir, İşte bu şekilde düzenlenmiş olan (8.10) çözümleri, (8.7) sisteminin genel çözümünü belirler.

Örnek.

$$\begin{cases} (D-3)x - 6y = t^2 \\ Dx + (D-3)y = e^t \end{cases}$$

diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulalım.

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D-3 & -6 \\ D & D-3 \end{vmatrix} = (D-3)^2 + 6D = D^2 + 9 \neq 0$$

olarak, Cramer teoremi uygulanabilecektir :

$$\Delta_x(D) = \begin{vmatrix} t^2 & -6 \\ e^t & D-3 \end{vmatrix} = 6e^t - 3t^2 + 2t = \varphi_1(t)$$

$$\Delta_x(D) = \begin{vmatrix} D-3 & t^2 \\ D & e^t \end{vmatrix} = -2e^t - 2t = \varphi_2(t)$$

olup,

$$x = \frac{\Delta_x(D)}{\Delta(D)} = \frac{\varphi_1(t)}{\Delta(D)} = \frac{6e^t - 3t^2 + 2t}{D^2 + 9}$$

$$y = \frac{\Delta_y(D)}{\Delta(D)} = \frac{\varphi_2(t)}{\Delta(D)} = \frac{-2e^t - 2}{D^2 + 9}$$

bulunur. Bunlardan

$$(D^2 + 9)x = 6e^t - 3t^2 + 2t$$

$$(D^2 + 9)y = -2e^t - 2t$$

diferansiyel denklemlerine varılır. Bu denklemler ayrı ayrı çözülür. Ancak $D^2 + 9 = 0$ karakteristik denklemleri ortaktır. Buradan

$$D^2 + 9 = 0 \rightarrow D_{1,2} = \pm 3i$$

$$x_1(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$$

$$y_1(t) = c_3 \cos 3t + c_4 \sin 3t$$

yazılacaktır. Şimdi de özel çözümleri bulalım. Önceki bilgilerimize göre bu çözümler düzenlenir ve gerekli işlemler yapılırsa sırasıyla,

$$x_2 = \frac{3}{5}e^t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}$$
$$y_2 = -\frac{1}{5}e^t - \frac{2}{9}t$$

bulunur. Bunlar dikkate alınarak, diferansiyel denklemlerin genel çözümü

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \frac{3}{5}e^t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}$$
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = c_3 \cos 3t + c_4 \sin 3t - \frac{1}{5}e^t - \frac{2}{9}t$$

şeklinde düzenlenmiş olacaktır. Şimdi, bu iki çözümün birlikte, verilen sistemin genel çözümünü oluşturması koşulunu tartışalım.

Görüldüğü gibi, $\Delta(D) = D^2 + 9$ olup, D nin 2. dereceden birçok terimlisidir. Öyleyse sistemin mertebesi 2 olup, sistemin genel çözümünde ancak ve ancak iki tane keyfi sabit bulunabilecektir: Oysa yukarıdaki çözümler incelenirse c_1, c_2, c_3, c_4 gibi dört adet keyfi sabit kullanıldığı görülür. Demek ki bunlardan ikisi, diğer ikisiyle lineer bağımlılık ilişkisi içindedir. Bu ilişkiyi belirlemek için, sistemdeki ikinci bağıntıyı kullanalım:

$$Dx + (D-3)y = e^t;$$
$$Dx = \frac{dx}{dt} = -3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t + \frac{3}{5}e^t - \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}$$
$$(D-3)y = \frac{dy}{dt} - 3y = -3c_3 \sin 3t + 3c_4 \cos 3t - \frac{1}{5}e^t - \frac{2}{9} - 3c_3 \cos 3t - 3c_4 \sin 3t + \frac{3}{5}e^t + \frac{2}{3}t$$

olarak uygulanırsa

$$-3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t + \frac{3}{5}e^t - \frac{2}{3}t + \frac{2}{9} - 3c_3 \sin 3t + 3c_4 \cos 3t$$
$$-\frac{1}{5}e^t - \frac{2}{9} - 3c_3 \cos 3t - 3c_4 \sin 3t + \frac{3}{5}e^t + \frac{2}{3}t \equiv e^t$$

olup, buradan ;

$$-3(c_1 + c_3 + c_4)\sin 3t + 3(c_2 - c_3 - c_4)\cos 3t \equiv 0$$

bağıntısına varılır. Buradan da

$$\begin{cases} c_1 + c_3 + c_4 = 0 \\ c_2 - c_3 - c_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = -c_3 - c_4 \\ c_2 = c_3 + c_4 \end{matrix}$$

ilişkileri saptanır. Böylece

$$x(t) = (-c_3 - c_4)\cos 3t + (c_3 + c_4)\sin 3t + \frac{3}{5}e^t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}$$
$$y(t) = c_3 \cos 3t + c_4 \sin 3t - \frac{1}{5}e^t - \frac{2}{9}t$$

çözümüne ulaşılır ki bu genel çözümdür.

Örnek.

$$\begin{cases} (D+1)^2 y_1 + 2Dy_2 + 3Dy_3 = 1 \\ Dy_1 + y_3 = 0 \\ y_1 - Dy_2 - Dy_3 = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklem sistemi de, sabit katsayılı bir lineer sistem olup, genel çözümünü araştıralım. Bu amaçla, öncelikle katsayılar determinantını hesaplayalım:

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} (D+1)^2 & 2D & 3D \\ D & 0 & 1 \\ 1 & -D & -D \end{vmatrix} = 2D^2 + 3D \neq 0$$

;

$$\Delta y_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2D & 3D \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -D & -D \end{vmatrix} = D(1) = 0$$

$$\Delta y_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2D & 3D \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -D & -D \end{vmatrix} = D^2 + 1 = 1$$

$$\Delta y_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2D & 3D \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -D & -D \end{vmatrix} = -D^2 = 0$$

bulunur. Bu sonuçlardan yararlanarak artık, Cramer teoremi gereğince

$$y_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta(D)} = \frac{0}{2D^2 + 3D} \rightarrow \quad (2D^2 + 3D)y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta(D)} = \frac{1}{2D^2 + 3D} \rightarrow \quad (2D^2 + 3D)y_2 = 1$$

$$y_3 = \frac{\Delta y_3}{\Delta(D)} = \frac{0}{2D^2 + 3D} \rightarrow \quad (2D^2 + 3D)y_3 = 0$$

diferansiyel denklemlerine ulaşılır. Bunlar ayrı ayrı integre edilirse

$$y_1 = c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}; y_2 = c_3 + c_4 e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{x}{3}; y_3 = c_5 + c_6 e^{-\frac{3}{2}x}$$

bulunacaktır. Diğer yandan bu çözümler birlikte göz önüne alınırsa altı tane farklı keyfi sabit kullanıldığı görülür. Oysa

$$\Delta(D) = 2D^2 + 3D$$

olduğu ve bu da 2. dereceden olduğundan, gerçekte incelenen sistemin mertebesi 2 dir. Öyleyse y_1, y_2, y_3 birlikte bu sistemin genel çözümünü oluşturacaksa, ancak ve ancak iki keyfi sabit içermelidirler. Bu amaçla y_1, y_2, y_3 çözümlerini kullanarak sisteme gidelim. Burada ilginç olan, bir önceki örnekte olduğu gibi, sistemin tek bir denklemiyle sonuca gidilmesindeki güçlüktür. Bu nedenle gerektiği kadar bağıntı kullanılacaktır. Aşağıdaki işlemlerde bunu izliyoruz.

Sistemin 3. bağıntısı alınırsa :

$$y_1 - Dy_2 - Dy_3 =$$

$$c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} - D(c_3 + c_4 e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{x}{3}) - D(c_5 + c_6 e^{-\frac{3}{2}x}) \equiv 0$$

$$c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{3}{2} c_4 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} c_6 e^{-\frac{3}{2}x} \equiv 0$$

$$c_1 - \frac{1}{3} + (c_2 + \frac{3}{2} c_4 \frac{3}{2} c_6) e^{-\frac{3}{2}x} \equiv 0$$

olup buradan

$$c_1 - \frac{1}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{3}$$

$$c_2 + \frac{3}{2} c_4 \frac{3}{2} c_6 = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{3}{2}(c_4 + c_6)$$

elde edilir. Sistemin 2. bağıntısı alınırsa :

$$Dy_1 + y_3 = 0$$

$$D(c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}) + c_5 + c_6 e^{-\frac{3}{2}x} \equiv 0$$

$$-\frac{3}{2} c_2 e^{-\frac{3}{2}x} + c_5 + c_6 e^{-\frac{3}{2}x} \equiv 0$$

$$c_5 + (-\frac{3}{2} c_2 + c_6) e^{-\frac{3}{2}x} \equiv 0$$

olup buradan

$$c_5 = 0; -\frac{3}{2} c_2 + c_6 = 0 \quad \rightarrow \quad c_6 = \frac{3}{2} c_2$$

elde edilir. Aynı şekilde 1. bağıntı kullanılırsa ;

$$(D+1)^2 y_1 + 2Dy_2 + 3Dy_3 = 1$$

$$(D^2 + 2D + 1)c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} + 2D(c_3 + c_4 e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{x}{3}) + 3D(c_5 + c_6 e^{-\frac{3}{2}x}) \equiv 1$$

$$D^2(c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}) + 2D(c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}) + c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$+2D(c_3 + c_4 e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{x}{3}) + 3D(c_5 + c_6 e^{-\frac{3}{2}x}) \equiv 1$$

$$\frac{9}{4} c_2 e^{-\frac{3}{2}x} - 3c_2 e^{-\frac{3}{2}x} + c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} - 3c_4 e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{2}{3} - \frac{9}{2} c_6 e^{-\frac{3}{2}x} \equiv 1$$

$$c_1 + \frac{2}{3} - 1 + (\frac{9}{4} c_2 - 3c_2 + c_2 - 3c_4 - \frac{9}{2} c_6) e^{-\frac{3}{2}x} \equiv 0$$

yazılarak buradan ;

$$c_1+\frac{2}{3}-1=0 \quad \rightarrow \quad c_1=\frac{1}{3}$$
$$\frac{9}{4}c_2-3c_2+c_2-3c_4-\frac{9}{2}c_6=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}c_2-3c_4-\frac{9}{2}c_6=0$$
$$\rightarrow \quad c_2=4(3c_4+\frac{9}{2}c_6)$$

olup, $c_6=\frac{3}{2}c_2$ olduğundan $c_4=-\frac{13}{6}c_2$ bulunur.

Böylece, bu tespitlerimize göre keyfi sabitler arasındaki ilişkiler c_2, c_3 keyfi sabitleri cinsinden düzenlenebilecektir. Buna göre

$$c_1=\frac{1}{3}, c_2=c_2, c_3=c_3, c_4=-\frac{13}{6}c_2, c_5=0, c_6=\frac{3}{2}c_2$$

olmak üzere, sistemin genel çözümü ;

$$\begin{cases} y_1(t)=\frac{1}{3}+c_2e^{-\frac{3}{2}x} \\ y_2(t)=c_3-\frac{13}{6}c_2e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{x}{3} \\ y_2(t)=\frac{3}{2}c_2e^{-\frac{3}{2}x} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilecektir.

Örnek.
Bu örnek, diferansiyel denklem sistemlerinin tanıtılması aşamasında göz önüne alınan ve bir elektrik devresi için, tekniğin bir problemi olarak, kuruluşu 2.Bölüm, 7. sayfada yapılmış olan

$$\begin{cases} 0,5\frac{di_1}{dt}+50i_1+20i_2=10 \\ \frac{di_2}{dt}+20i_1+30i_2=10 \end{cases}$$

diferansiyel denklem sisteminin incelenmesine yöneliktir. Ayrıca bu sistem $i_1(0)=0$ ve $i_2(0)=0$ başlangıç koşulları için çözümleneceğinden, bir diferansiyel denklem sisteminin özel çözümünün bulunmasına dair bir örnek oluşturmaktadır.

Göz önüne alınan sistem, $D=\frac{d}{dt}$ türev operatörü kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\begin{cases} (D+100)i_1+40i_2=20 \\ 20i_1+(D+30)i_2=10 \end{cases}$$

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix} D+100 & 40 \\ 20 & D+30 \end{vmatrix}=D^2+130D+2200;$$

$$\Delta i_1=\begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 10 & D+30 \end{vmatrix}=200;\Delta i_2=\begin{vmatrix} D+100 & 20 \\ 20 & 10 \end{vmatrix}=600$$

olup, bunlardan

$$i_1=\frac{\Delta i_1}{\Delta(D)}=\frac{200}{D^2+130D+2200} \quad \to \quad (D^2+130D+2200)i_1=200$$

$$i_2=\frac{\Delta i_2}{\Delta(D)}=\frac{600}{D^2+130D+2200} \quad \to \quad (D^2+130D+2200)i_2=600$$

diferansiyel denklemlerine ulaşılacaktır. Bu iki denklemde, karakteristik denklem aynı olup

$$F(D)=D^2+130D+2200=0 \quad \to \quad D_1=-110, D_2=-20$$

bulunur. Öyleyse, ikinci yansız denklemlerin genel çözümleri, c_1,c_2,c_3,c_4 keyfi sabitler olmak üzere

$$(i_1)_1=c_1e^{-110t}+c_2e^{-20t};(i_2)_1=c_3e^{-110t}+c_4e^{-20t}$$

olarak ifade edilecektir. Denklemlere ait özel çözümler ise

$$(i_1)_2=\frac{1}{11};(i_2)_2=\frac{3}{11}$$

şeklinde hesaplanmış olacaktır. Böylece, $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ için genel çözüm

$$i_1(t)=c_1e^{-110t}+c_2e^{-20t}+\frac{1}{11}$$

$$i_2(t)=c_3e^{-110t}+c_4e^{-20t}+\frac{3}{11}$$

fonksiyonları olarak bulunacaktır. Ancak bu ikilinin, sistemin genel çözümünü oluşturabilmesi için ancak iki keyfi sabit içermesi gerekmektedir. Çünkü $\Delta(D)$ ikinci derecedendir. c_1,c_2,c_3,c_4 arasındaki ilişkinin belirlenebilmesi için sistemdeki denklemlerden yararlanılır. Bu işlemler yapı-lırsa ;

$$c_3=\frac{1}{4}c_1;c_4=-2c_2$$

bulunur. Böylece sistemin genel çözümü

$$i_1(t)=c_1e^{-110t}+c_2e^{-20t}+\frac{1}{11}$$

$$i_2(t)=\frac{1}{4}c_1e^{-110t}-2c_2e^{-20t}+\frac{3}{11}$$

olarak şekillenir.

Örneğimizin bir de özel çözümünün bulunması gerekmektedir. Sistemin $i_1(0)=i_2(0)=0$ başlangıç koşullarına uyan çözümünü bulmak için, bu koşulları genel çözüm ifadesine uygulayalım. Buna göre;

$$\begin{cases} i_1(0)=c_1+c_2+\dfrac{1}{11}=0 \\ i_2(0)=\dfrac{1}{4}c_1-2c_2+\dfrac{3}{11}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=-\dfrac{1}{11} \\ c_1-8c_2=-\dfrac{12}{11} \end{cases}$$

sistemi oluşur. Bu sistem çözülürse $c_1=-\dfrac{20}{99}, c_2=\dfrac{1}{9}$ elde edilir. Böylece sistemin verilen başlangıç koşullarına uyan özel çözümü

$$\begin{cases} i_1(t)=-\dfrac{20}{99}e^{-110t}+\dfrac{1}{9}e^{-20t}+\dfrac{1}{11} \\ i_2(t)=-\dfrac{5}{99}e^{-110t}-\dfrac{2}{9}c_2e^{-20t}+\dfrac{3}{11} \end{cases}$$

şeklinde belirlenecektir.

08.04 Alıştırma Problemleri ve Yanıtları

Aşağıdaki homojen denklem sistemlerinin genel çözümünü bulunuz

1) $\begin{aligned} 2(D-2)x+(D-1)y&=0 \\ (D+3)x+y&=0 \end{aligned}$ Yanıt: $\begin{aligned} x(t)&=K_1\cos t-K_2\sin t \\ y(t)&=K_1(\sin t-3\cos t)+K_2(\cos t+3\sin t) \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} (D+2)x+(D-1)y&=0 \\ (D-3)x+(D+2)y&=0 \end{aligned}$ Yanıt: $x(t)=y(t)=0$ *Aşikar çözüm* $\quad x(t)=9Ce^{\frac{-t}{8}}$ $\quad y(t)=\dfrac{135}{7}Ce^{\frac{-t}{8}}$

Aşağıda verilmiş sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerinin genel çözümünü bulunuz.

1) $\begin{aligned} (D-1)y+Dz&=2x+1 \\ (2D+1)y+2Dz&=x \end{aligned}$ Yanıt: $\begin{aligned} y(x)&=-x-\dfrac{2}{3} \\ z(x)&=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x+C \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 2(D-2)x+(D-1)y&=e^t \\ (D+3)x+y&=0 \end{aligned}$ Yanıt: $\begin{aligned} x(t)&=C_1\cos t+C_2\sin t-\dfrac{1}{2}e^t \\ y(t)&=(C_1-3C_2)\sin t-(3C_1+C_2)\cos t+2e^t \end{aligned}$

3) $$\begin{aligned}(D+2)x+(D-1)y&=-\sin t\\(D-3)x+(D+2)y&=4\cos t\end{aligned}$$

Yanıt: $$\begin{aligned}x(t)&=Ce^{\frac{-t}{8}}-\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t\\y(t)&=\frac{15}{17}Ce^{\frac{-t}{8}}+\sin t+\cos t\end{aligned}$$

9. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GRAFİK YÖNTEM VE ALETLER

09.01. Grafik Yöntem

Diferansiyel denklemlerin grafik yardımıyla çözümünü elde etmek ne anlama geliyor? Bir diferansiyel denklem integre edildiği zaman, elde edilen fonksiyonun gösterdiği grafiğe yaklaşıklığı mümkün mertebe fazla olan bir eğrinin bulunması anlaşılacaktır. Burada bilhassa birinci ve ikinci mertebe diferansiyel denklemlerle, bazı özel diferansiyel denklem tipleri üzerinde araştırma yapılacaktır.

Diferansiyel denklemlerin grafikle çözümlerinin araştırılmasında çeşitli yöntemler ve yaklaşıklık derecesini artıran fikirler ileri sürülmüştür. Bu yöntemlerden bazılarını bundan sonraki bölümlerde ele alacağız.

09.02. Aletler

Diferansiyel denklemlerin grafik yöntemle çözümünü temin etmek konusunda çalışanlar, zamanla, bu işi mekanik olarak yapacak olan aletler ortaya koymuşlardır. Doğrultu alanlarının veya tanımını bundan sonraki bölümde vereceğimiz izoklin noktalarına ait doğruların çizilmesinde kullanılmak üzere *V.Bjerknes* ve *V.Södeberg* tarafından meydana getirilmiş aletler vardır.

Doğrultu alanları çizen aletler yapıldığı gibi bazı diferansiyel denklemlerin integral eğrilerini doğrudan doğruya çizen aletler de yapılmaya çalışılmıştır. Örneğin *Knorr* tarafından yapılan bir alet

$$y''(x) = f(y') + g(y) + h(x)$$

diferansiyel denklemini çözmekte kullanılmaktadır. Ancak bunun elde edilebilmesi için f(y'), g(y), h(x) fonksiyonlarına ait eğrilerin çizilmiş olması gerekmektedir. Bir takım uçlar bu eğriler üzerinde hareket ettirilerek integral eğrilerinin elde edilmesi mümkün olmaktadır.

Bir başka alet *Bush* tarafından yapılmıştır. Bu alet

$$z'(x) = z + f_r \; y'(x) = z + f_l$$

şeklindeki bir diferansiyel denklem sistemini ve bunun karşıtı olan ikinci mertebe diferansiyel denkleminin integralinin alabilmektedir. Burada f_1 , f_2 , f_3 , f_4 foksiyonları x, y, z değişkenlerinden birine bağlı keyfi fonksiyonlardır. Bunlara ait eğriler çizildiği takdirde, bahsedilen alet y(x) ve z(x) eğrilerini çizebilmektedir.

1939 yılında Oslo'da imal edilen bir başka alet ise, bir altıncı mertebe diferansiyel denklemini çözebildiği gibi, iki üçüncü mertebe diferansiyel denklemden meydana gelmiş bir sistemi de çözmeye yaramaktadır.

Bu aletler genellikle mekanik çalışmakta, bunlarda elektrikten faydalanılamadığı görülmektedir. Ancak bazı aletlere konulan fotoelektrik kameradan istifade edilerek, aletlerin çalışması otomatikleştirilmektedir.

Bir takım matematik yöntemler öncelikle

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$

tipindeki *Riccati* diferansiyel denklemlerinin ve

$$y' = f(x)y^3 + g(x)y^2 + h(x)y + k(x)$$

tipindeki *Abel* diferansiyel denklemlerinin çözülmelerini sağlamaktadır. Ayrıca *W.Thoneon* , iterasyon yöntemi yardımıyla çözülecek

$$y = [f(x), y]'$$

diferansiyel denklemi için yapılan ara hesaplarında integralleri almaya yarayan bir alet yapmıştır. Bütün bunların dışında, çeşitli kişiler tarafından bu amaçlara hizmet eden birçok alet geliştirilmiştir.

09.03. Doğrultu Alanı

F(x,y,y') = 0 diferansiyel denkleminin anlayışına uyan bu noktalarda diferansiyel denklemin karşıt tuttuğu doğrultuları belirtmeye yetecek sayıda bol nokta seçilir. Bu diferansiyel denklemi

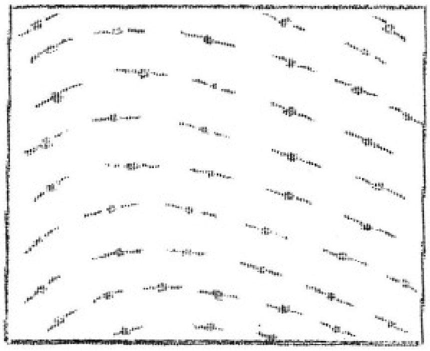
$$y' = G(x, y)$$

şeklinde ele alırsak, bunun analitik anlamını " O(x,y) nin herhangi bir noktasındaki değeri, bunu türeten fonksiyonun o noktadaki teğetinin eğimidir. " şeklinde ifade etmek mümkün olur. Bu ise α eğim açısını göstermek üzere

$$y' = G(x, y) = tg\alpha$$

olarak göz önüne alınırsa, G(x,y) nin alacağı değerlere göre, α da çeşitli değerler alacaktır. Halbuki birçok hallerde α, verilen diferansiyel denkleme göre, her noktada aynı doğrultuya sahip olabilirler. Bu doğrultuya ait noktaların tanımlarının bulunması da oldukça kolaydır.

Aynı α doğrultusunu belirten noktaların geometrik yerine İzoklin eğrisi denir. İzoklinler çizilebildiği ve bunların değer doğrultuları bilindiği takdirde, doğrultu alanı belirlenmiş olur (Şekil 9.1).



Şekil 9.1. İzoklin Eğrisi

09.04. $y = f(x)$ Fonksiyonunun Grafikle İntegrasyonu

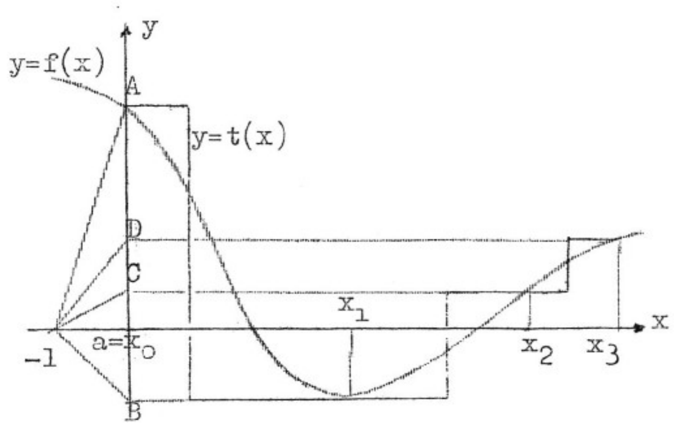
Bir diferansiyel denklemin integrasyonunu grafik yöntemle yapmadan önce, herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafikle integre edilebilmesi hususunu ele alalım. Böylece, grafikle integral işlemi yapma fikrini örneklemiş olacağız.

$y = f(x)$ fonksiyonunun bir (a,b) aralığında sürekli olduğunu varsayalım. (a,b) aralığını ise

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

gibi n kısmî aralığa ayıralım.

$y = f(x)$ fonksiyonunun eğrisinin sınırladığı alan bir merdiven eğrisi (çizgisi) yardımı ile yaklaşık olarak gösterilebilir, (Şekil 9.2). Bu merdiven



Şekil 9.2. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafikle integre edilebilmesi-1

çizgisinin denklemini $y = t(x)$ ile gösterelim. Burada x_1 noktaları fonksiyonun sürekli olduğu noktalar olup, bir sıçrama noktası olmayacaktır. Bu merdiven çizgisi

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} t(x)dx$$

bağlantısına uyacak tarzda çizilir. Burada merdiven çizgisine ait alanın oluşumu kolayca görülebilir ve hatta çok az bir dikkatle büyüklüğü hakkında bir fikir edinilebilir. $y = f(x)$

eğrisi ile meydana gelen alanları karşılaştırma imkanı da kolayca mümkün olur. $y = t(x)$ çizgisinin alanı

$$T(x) = \int_a^x t(x)dx$$

ile bulunabileceği gibi, bu integralin değeri çizim yolu ile de bulunabilir. x_i noktalarında

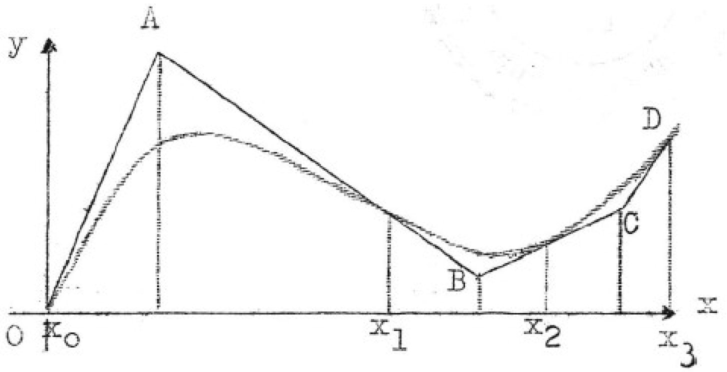
$T(x) = F(x)$

dir. Yani

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

integral eğrisinin x_i noktasındaki ordinatı ile $T(x)$ in aynı x_i noktasındaki ordinatı birbirine eşittirler, (Şekil 9.2).

Şekil 9.2 de görülen merdiven çizgilerin, şekil 3 de görülen kırık çizgiler şekline dönüştürülmesi işi gayet basit bir tarzda oluşturulur. z = a dan itibaren aralığın içine doğru gidildikçe merdiven çizgiye ait rastlanılan bir kısmi aralıkta onun gösterdiği doğrultu, aynı eşel ile çizilmiş diğer bir koordinat sistemi içine aktarılabilir. Şekil 9.2 ve Şekil 9.3 birlikte göz önüne alınırsa, A ya ait doğrultu OA doğrultusuna, B ye ait doğrultu AB doğrultusuna, C ye ait doğrultu BC doğrultusuna ve nihayet D ye ait doğrultu CD doğrultusuna karşı gelmektedir. Şekil 9.3 ilkinden x_1, x_2, x_3,…..apsislerini de almak suretiyle, kullanışlı kılınır. OA, AB, BC, CD teğetlerine x_0, x_1, x_2, x_3 apsisli değme noktalarında uygun tarzda intibak ettirilmiş bir eğri, $y = f(x)$ fonksiyonunun integral eğrisini yaklaşık bir tarzda bize verecektir.



Şekil 9.3. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafikle integre edilebilmesi-2

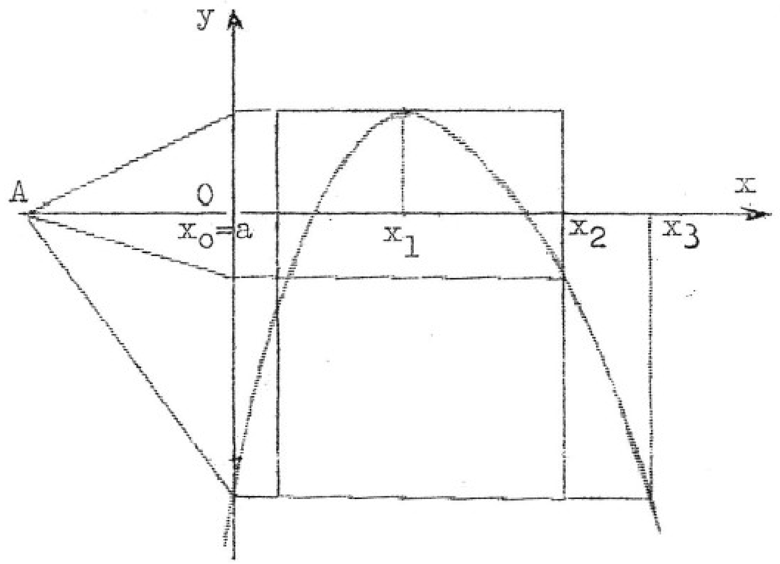
Örnek.

$y = -3x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun integral eğrisini bir basit örnek olarak araştıralım. Bu fonksiyonun gösterdiği eğriyi *xoy* dik koordinat sistemi içine çizelim, (Şekil 9.4).

Bu eğrinin x_0 ile x_3 apsisleri arasında kalan kısmının sürekli olduğunu biliyoruz. Bu aralığa x_1 ve x_2 apsislerini de kullanarak (bunlar keyfi seçilmiştir.) üç kısmi aralığa bölmüş olalım.

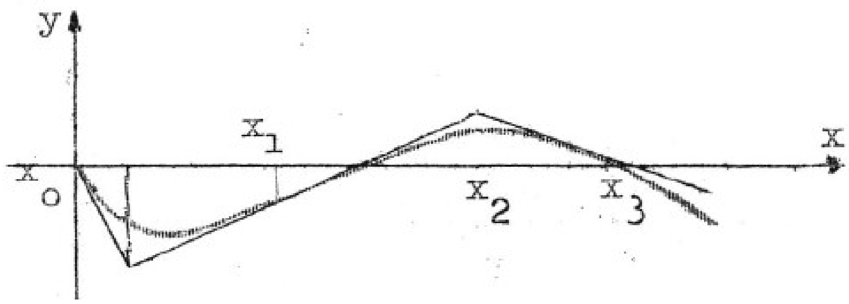
(x_0,x_3) aralığında $y = t(x)$ ile gösterdiğiniz, merdiven çizgilerle bir fonksiyon kuralım, (Şekil 9.4) Ox ekseni üzerinde O dan itibaren negatif yönde 1 birim gidilerek A noktası işaretlenir. Sonra sırasıyla merdiven çizgiye ait belirli noktaların Oy ekseni üzerinde izdüşüm ayakları bulup, bunları A noktasına birleştirelim. Böylece teğet doğrultuları bulunmuş olur. Şimdi aynı eşelleri kullanarak bir başka ve bulgularımızı buraya aktaralım, (Şekil 9.5)..

x_0, x_1, x_2, x_3 apsislerini yeni koordinat sistemine taşıyalım. x_0 ın yine orijinde olduğu görülmektedir. Daha sonra x_0 dan itibaren bulunan teğet



Şekil 9.4. $y = -3x^2 + 4x - 1$ fonksiyonunun integral eğrisi

doğrultuları burada sırasıyla çizilmek suretiyle belirtilir ve nihayet bunlara teğet kalacak ve belirli noktalardan geçecek şekilde çizilecek uygun bir eğri, $y = -3x^2 + 4x - 1$ fonksiyonun integral eğrisini yaklaşık olacak verecektir, (Şekil 9.5).



Şekil 9. 5. $y = -x^3 + 2x^2 - x$ fonksiyonunun integral eğrisi

Gerçekten verilen fonksiyonu integre edersek

$$y = -x^3 + 2x^2 - x$$

bulunur. Bu ise Şekil 9.5 te görülen eğrinin gösterdiği bütün özellikleri taşımaktadır. Burada integral sabiti, başlangıç şartı bakımından keyfi olarak sıfır alınmıştır.

09.05. Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

$y' = f(x, y)$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bunun, grafik yöntem uygulanmak suretiyle bir çözümünü araştırmak istiyoruz.

Bir (x_1, y_1) noktası için verilen diferansiyel denklemi hesaplayalım. y' nün bu değeri (x_1, y_1) noktasındaki teğet doğrultusunu vereceğinden, bu sonuç

$$y' = f(x_1, y_1) = \tan\alpha$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$\alpha = arctg\, f(x_1, y_1)$$

yazmak olanaklıdır. Böylece x_1 apsisli noktadaki teğet doğrultusu belirlenmiştir. Genelleştirmek istersek, i = 1, 2, 3, … olmak üzere

$$\alpha = ac\tan f(x_i, y_i)$$

yazabiliriz.

(x_0, x_n) aralığını kısmi aralıklara bölelim. $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ apsislerine karşılık fonksiyon olarak, $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ değerlerini almış olsunlar.

(x_0, y_0) noktasından

$$\alpha = arctg\, f(x_1, y_1)$$

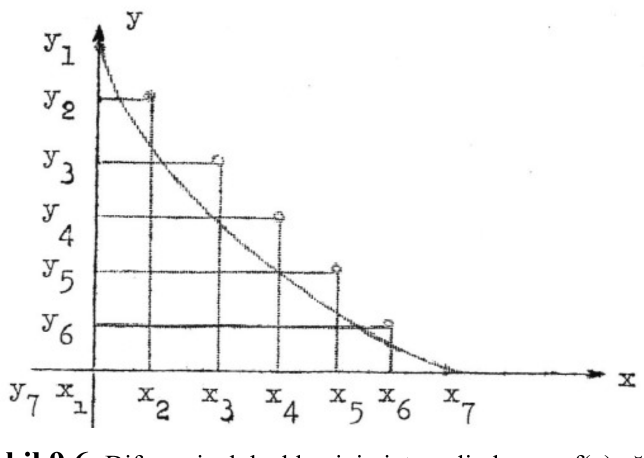
doğrultusunda, $x = x_1$ doğrultusuna rastlayıncaya kadar bir doğru çizelim. Sonra

$$\alpha = arctg\, f(x_2, y_2)$$

doğrultusunda, x_1 den itibaren ve ilk çizimin kaldığı noktadan başlayarak $x = x_2$ doğrusuna rastlayıncaya kadar bir doğru çizelim. Ve işlemlere böylece devam edelim. Bunun sonucu (x_1,x_2), (x_2,x_3), (x_3,x_4), … aralıklarının her birine, o aralıkta fonksiyonun teğet doğrultusunu veren ve her biri uçuca eklenmiş bir kırık çizgi fonksiyonuna varılmış olur. Bu doğru parçalarının her birine teğet kalacak şekilde çizilmiş bir uygun eğri

$$y' = f(x,y)$$

diferansiyel denkleminin integrali olan y = f(x) fonksiyonunun gösterdiği eğriye yaklaşık bir çizim olarak bulunacaktır. Bu açıklamalara ait grafik görüntü Şekil 9.6 daki gibidir.



Şekil 9.6. Diferansiyel denkleminin integrali olan y = f(x) eğrisi

Bu yaklaşık eğriye ait bazı koordinat noktalarını bulmak suretiyle interpolasyon yöntemleri (Lagrange ve Newton interpolasyon yöntemleri gibi) kullanılarak bu eğrinin denklemi yazılabilecektir.

Örnek.

y’ = - x diferansiyel denklemini bir basit örnek olarak seçmiş olalım. Aralıkları da işi basitleştirmek için, 1 cm uzunluğunda seçelim. (x_1,x_n) aralığını da bu örnek için (1, 5) olarak alalım.

$$y' = - x_{i-1} = tg\alpha_{i-1} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

olarak düşünülürse, buradan

$$\alpha_{i-1} = arctg\ (-x_{i-1})$$

yazılabilir. Buradan, aşağıdaki inceleme yoluyla, sırasıyla her aralıktaki teğet doğrultularını bulmuş oluyoruz :

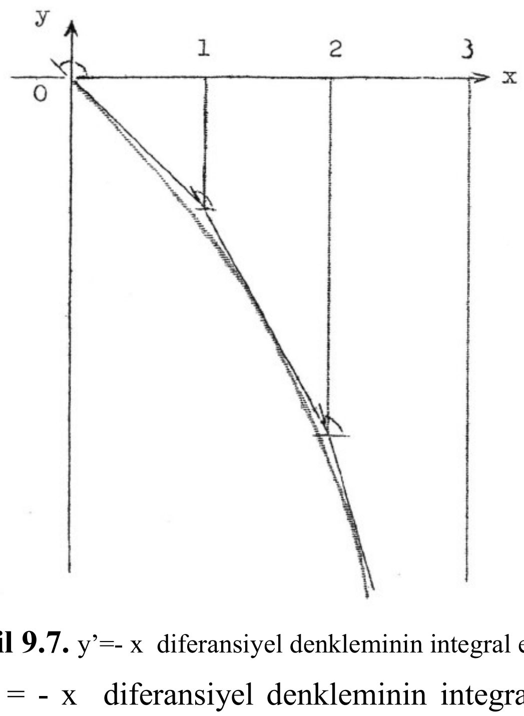
i = 2 için : $\alpha_1 = arctg\ (-x_1) = arctg\ (-1)$ den $\alpha = 135^0$

i = 3 için : $\alpha_2 = arctg\ (-x_2) = arctg\ (-2)$ den $\alpha \cong 117^0$

i = 4 için : $\alpha_3 = arctg\ (-x_3) = arctg\ (-3)$ den $\alpha \cong 107^0$

i = 5 için : $\alpha_4 = arctg\ (-x_4) = arctg\ (-4)$ den $\alpha \cong 102^0$

değerleri bulunur. Bir dik koordinat sistemi içinde bu doğrultuları kendilerine ait aralıklar içinde işaretleyelim. (Şekil 9.7).



Şekil 9.7. y’=- x diferansiyel denkleminin integral eğrisi

Burada görüldüğü gibi y’ = - x diferansiyel denkleminin integral eğrisi elde edilmiş olur. Şekil 9,7 de görülmekte olan eğri parçası, integral eğrisinin seçmiş olduğumuz aralıktaki kısmıdır. y’ = - x diferansiyel denklemi integre edilirse

$$y = \tfrac{1}{2} x^2$$

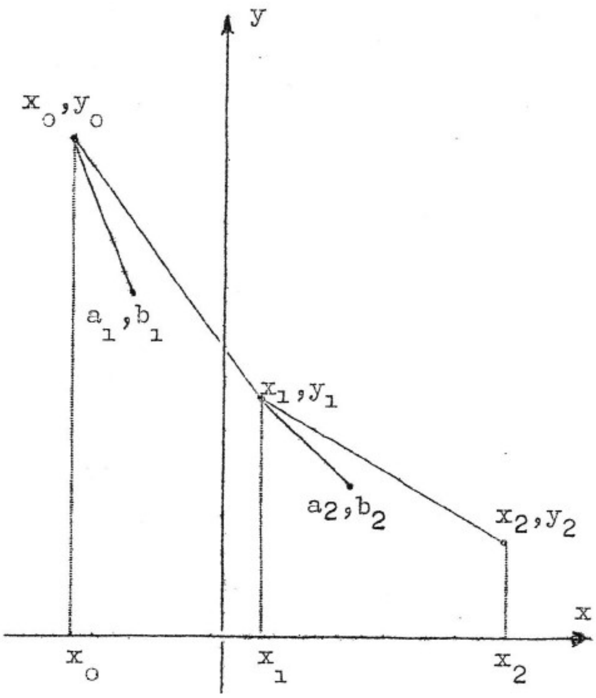
bulunur ki bu şekildeki eğri ile benzer özellikleri taşımaktadır.

09.06. Yarım Adımlar Yöntemi

Bu yöntem, yukarıda verilen yöntemin daha sağlıklı bir şekilde uygulanabilmesine olanak sağlayacaktır. Bu amaçla kullanılır. Yöntemin uygulanmasına öncekinde olduğu gibi başlanır. Yani başlangıç noktasındaki doğrultu, $y' = f\ (x,y)$ diferansiyel denkleminden elde edilir. Başlangıç noktasının koordinatları x_0, y_0 ise

$$y_0' = f\,(x_0, y_0)$$

bize, başlangıç noktasındaki teğet doğrultusunu verecektir. Yarım adımlar yöntemi olarak, bu ilk doğrultuda bir miktar gidilir. Varılan bu nokta a_1,b_1 olsun, (Şekil 9.8). Bu ilk yarım adımdır.



Şekil 9.8. Yarı adımlar yöntemi

Şimdi a_1,b_1 noktası için diferansiyel denklemden b_1 doğrultu katsayısı hesaplanır. Bu doğrultuda, yine başlangıç noktasından hareketle ilk adımın iki katı kadar gidilerek x_1,y_1 noktasına varılır. Bu nokta ilk tam adımdır ve integral eğrisine aittir.

Bu işlemler istenildiği kadar devam ettirilebilir. Böylece integral eğrisine ait çok sayıda nokta belirlenmiş olur. Ancak öncelikle belirtmek gerekir ki bu noktalar teorik olarak integral eğrisine aittirler. Gerçekte bu eğrinin civarındaki noktalardır.

Yarım adımlar yöntemini bir kez daha uygulamak istersek bu kere x_1,y_1 noktasını başlangıç noktası seçmek gerekir. Bu nokta için

$$y_1' = f\,(x_1,\ y_1)$$

olup, x_1 deki teğet doğrultusu bulunmuş olur. Bu doğrultuda bir miktar gidilir ve bu nokta a_2,b_2 olarak işaretlenir : (Şekil 9.8 den izleyiniz). Diferansiyel denklemden b_2 doğrultu katsayısı belirlenerek, x_1,y_1 den itibaren bu doğrultuda ilk uzunluğun iki katı kadar gidilerek x_2,y_2 noktasına varılır ki bu nokta ikinci tam adımdır. Böylece devam edilerek x_n,y_n noktalarını bulmak olanaklı hale gelir. Bu yöntemin sağlıklı bir şekilde uygulanabilmesi için yarım adımlar, olabildiği kadar küçük seçilmelidir.

09.07. İzoklin Yöntemiyle İntegrasyon

$y' = f(x,y)$ diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Bu denklemi, m herhangi bir noktadaki eğimi göstermek üzere

$$f(x,y) = m$$

yapısında ele almak olanaklıdır. Bu bize bir eğri gösterir. Bu eğriyi E ile gösterelim. E eğrisinin üzerindeki her A noktasından bir C integral eğrisi geçer. Bu C eğrilerinin ortak özelliği ise A noktalarındaki teğetlerinin eğimlerinin m olarak birbirlerine eşit olmasıdır. Bu özelikten ötürü E eğrilerine *İzoklin Eğrileri* denir. m nin her değeri için bir E eğrisi çizilebileceği aşikârdır. Bu aynı zamanda,

$$f(x_i,y_i) = m$$

olduğundan, yani bir $(x_i;y_i)$ noktasının koordinatları için m tayin edileceğinden, her bir $(x_i;y_i)$ noktasından, bu eğrilerden bir tane geçtiğini ifade etmiş olur.

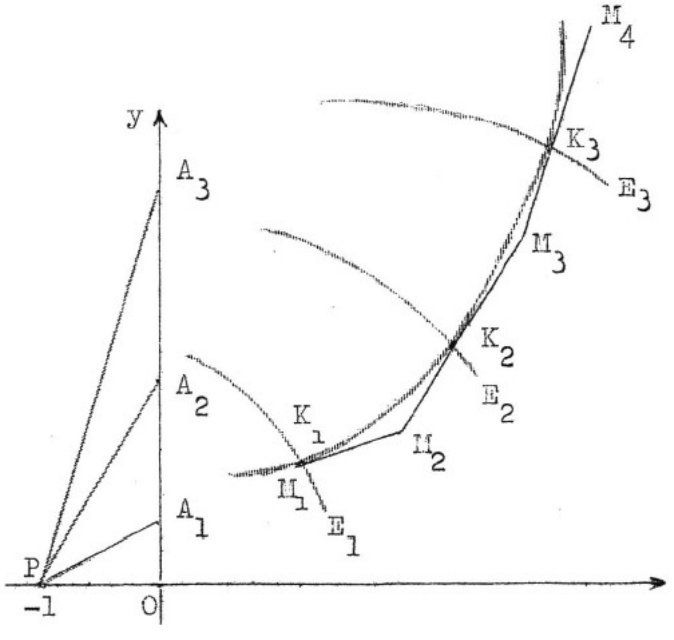
Artık izoklinlerden yararlanmak suretiyle

$$y' = f(x,y)$$

diferansiyel denkleminin integral eğrilerinin ne şekilde bulunabileceğini araştıralım.

$$f(x,y) = m$$

olarak düşünüldüğü anımsanırsa, m ye verilecek birkaç uygun değer için elde edilen E eğrileri çizilir. Bu çizimler düzgün bir şekilde yapılmalıdır. Bu eğrileri sıra ile E_1, E_2, E_3, … ile gösterelim. Aynı zamanda m ye verilen değerleri de Oy ekseni üzerinde işaretleyelim : (Şekil 9.9).



Şekil 9.9. İzoklin yöntemi

Bunlar sırasıyla $m_1 = OA_1$, $m_2 = OA_2$, $m_3 = OA_3$, … olsunlar. Sonra Ox ekseni üzerinde O dan itibaren negatif yönde 1 birim gidilerek, P noktasını işaretleyelim. Bundan sonra P ile A_1, A_2, A_3, … noktalarını birleştirmek suretiyle m_1, m_2, m_3, … değerlerine karşı gelen doğrultuları çizgisel olarak belirtmiş oluyoruz. Bu integral eğrilerinin, her bir izoklin ile kesiştiği noktadaki teğetinin eğiminin belirlenmiş olması demektir.

E_1 izoklin eğrisinin M_1 noktasını alalım. Bu noktadan PA_1 e bir paralel çizelim. E_1 ve E_2 izoklinleri arasında ortada bir yerde M_1M_2 doğrusu sınırlandırılır. Şimdi de M_2 den PA_2 ye bir paralel çizelim. Bu da M_2M_3 olarak E_2 ile E_3 izoklinleri ortasında bir yerde sınırlandırılır. Nihayet M_3 noktasından PA_3 e bir paralel çizelim. Böylece $M_1M_2M_3$… poligonu elde edilmiş olur. Bu poligon, izoklin eğrilerini sıra ile K_1, K_2, K_3, … noktalarında keser (Şekil 9.9 dan izleyiniz).

Bu hazırlıklardan sonra K_1 de M_1M_2 doğrusuna; K2 de M_2M_3 doğrusuna; K3 de M_3M_4 doğrusuna teğet olacak şekilde çizeceğimiz eğri, aradığımız integral eğrisinin bir yaklaşık şekli olacaktır. Özel olarak,

$$y + x\,\varphi(y') + \psi(y') = 0$$

şeklindeki *Lagrange Diferansiyel Denklemi* için izoklinlerin birer doğrudan ibaret olduğu hemen söylenebilir. Gerçekten,

$$y' = f(x,y) = m$$

olarak alınırsa, m bir parametre olduğundan, yukarıdaki denklem

$$y + x\,\varphi(m) + \psi(m) = 0$$

veya bu da $\varphi(m) = a$; $\psi(m) = b$ değerlerinde oldukları kabul olunursa

$$y + a\,x + b = 0$$

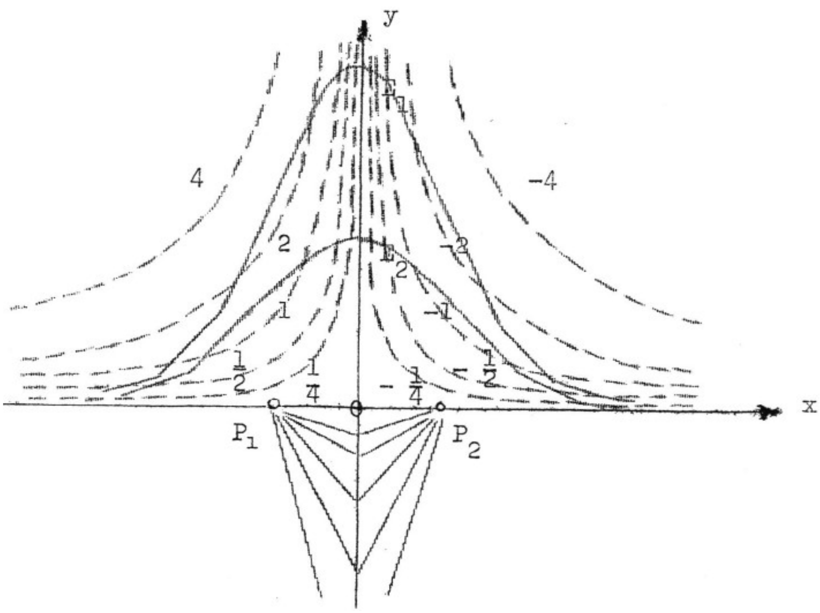
şeklinde bir doğru denklemi gösterecektir.

Örnek .

$y' + x\,y = 0$ diferansiyel denklemini izoklin yöntemiyle çözmeye çalışalım:

$$y' = m = -\,x\,y$$

olarak alalım. $x.y = -\,m$ fonksiyonlarının ikizkenar hiperboller ailesi olduğunu biliyoruz. Burada m ye verilecek çeşitli değerler yardımıyla bu ikizkenar hiperboller ayrı ayrı belirlenecektir ; (Şekil 9.10).



Şekil 9.10. $y' + x\,y = 0$ dif. denklemi için İzoklin yöntemi

m =… -4 , -2 , -1 , -½ , -¼ , ¼ , ½ , 1 , 2 , 4 , …

değerlerini aldığını varsayalım. Bu değerler sırasıyla, denklemleri

xy = 4 , xy = 2 , xy = 1 , xy = ½, xy =¼, xy = -¼,xy=½ ,

xy=-1 , xy = -2 , xy = -4

olarak belirlenen ikizkenar hiperboller elde edilir. Bunlar şekilde görüldüğü gibi, aynı bir koordinat sistemi içine hep birlikte çizilir. Şekildeki noktalı çizilmiş eğriler bu hiberbollerdir.

Şimdi O noktasından itibaren pozitif ve negatif yönlerde 1 birim gidilirse P_1 ve P_2 noktaları bulunur ve işaretlenir. Burada P_1 negatif m değerleri için, P_2 ise pozitif m değerleri için kullanılacaktır. Şunu ilk önce işaret edelim ki Şekil 9.10 da P noktasının nasıl seçildiği anımsanırsa, burada P ve A_1, A_2, A_3, …noktalarını sırasıyla Ox ve Oy eksenlerine göre simetrik olarak yerleştirdiğimiz takdirde PA_1, PA_2, PA_3, …doğrultularında değişen bir şey olmayacaktır. Bu durum göz önünde tutularak m nin değerlerini Oy ekseninin negatif tarafında işaretlemekte bir sakınca yoktur. m için Oy ekseninde işaretlenen bu noktaları sırasıyla P_1 ve P_2 kutup noktalarına birleştirelim. Böylece izoklinler üzerindeki integral eğrisine ait değme noktalarının teğet doğrultuları belirlenmiş olur.

Bütün bu hazırlıklardan sonra, Şekil 9 da görülen çizim yolu buradaki değerler kullanılarak bu probleme uygulanırsa, Şekil 9.10 de görülen ve E_1 ve E_2 olarak adlandırdığımız poligonlar elde edilir. Bunlar yardımıyla diferansiyel denklemin integral eğrilerini hemen hemen vermiş olacaklardır. Şekil 9.10 de görülen *Çan Eğrisi (Gauss Eğrisi)* böyle elde edilmiş olmaktadır. Gerçektende verilen diferansiyel denklemin elemanter olarak çözümü yapılırsa, C bir keyfi sabiti gösterdiğine göre

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

olduğu görülecektir. Bu fonksiyon ise, analitik olarak, çan eğri ailesini göstermektedir.

09.08. Nomogramların Kullanılması

y' = f (x,y) diferansiyel denkleminin çözülmesi için grafik yöntemin uygulanması halinde, önemli olanın, hangi x,y noktalarına karşı gelen doğrultuların bulunması olacaktır. Bazı diferansiyel denklemlerde nomogramlar kullanılarak bazı çalışmalar yapılabilir.

H.Heinrich nomogramları kullanmak suretiyle, bazı durumlarda bu doğrultuların bulunmasının kolayca olanaklı olduğunu savunmuştur.

$$y' = \frac{g_1(x) - g_2(y)}{f_1(x) - f_2(y)}$$

tipindeki diferansiyel denklemleri göz önüne alalım. Bu tip diferansiyel denklemlerin doğrultu alanını bulmak üzere, Heinrich tarafından geliştirilen nomografik yöntem aşağıda açıklanmıştır :

$$y' = \frac{g_1(x) - g_2(y)}{f_1(x) - f_2(y)}$$

diferansiyel denkleminden, parametreleri x ve y olan ve dik açılı bir u, v sistemi içinde,

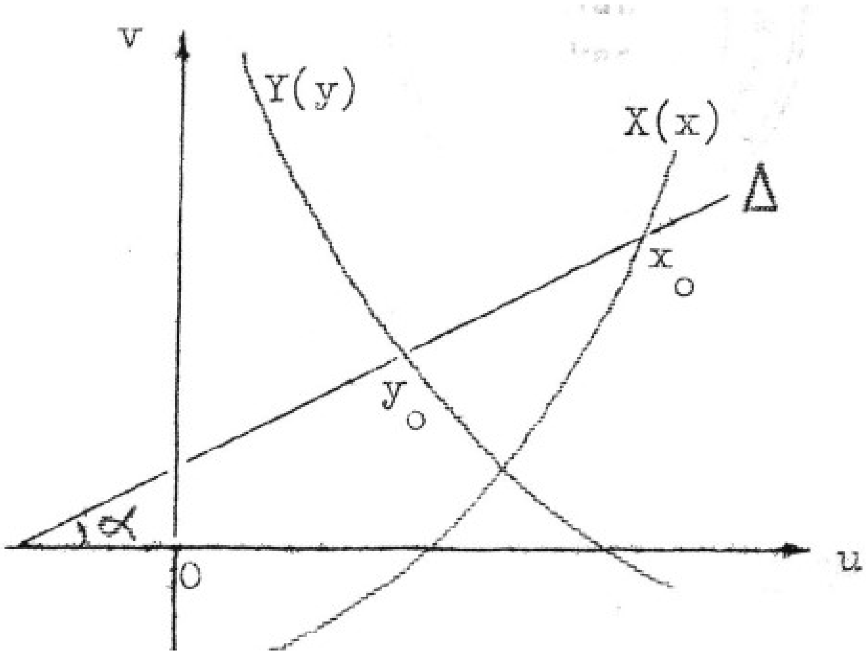
$X(x)\ :\ u = f_1(x) \quad , \quad v = g_1(x)$

$Y(y)\ :\ u = f_2(y) \quad , \quad v = g_2(y)$

eğrileri çizilmiş olsun. x ve y parametrelerinin bir x_0 ve y_0 paremetrik değerlerine karşın X(x) ve Y(y) eğrilerini bu noktalarda kesen bir Δ doğrusunun Ou ekseniyle yaptığı açı α ise

$$\tan\alpha = \frac{g_1(x_0) - g_2(y_0)}{f_1(x_0) - f_2(y_0)}$$

olarak hesaplanır, (Şekil 9.11). Δ doğrusu ötelenerek, α doğrultu açısını içeren izokline ait x_0, y_0 koordinatları elde edilmiş olur.



Şekil 9.11. Nomogramların kullanılması

Uygulamada bazı hesapların yapılması gerekmektedir. Önce problemi şu şekilde ele alalım :

$$F(x\,,y\,,y') = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümünün

$$F(x\,,y\,,C) = 0$$

formunda bir sonuç olması gerektiğine göre, C keyfi sabitinin alacağı değerler itibariyle bu bir eğri ailesi gösterecektir. Bu eğriler ise düzlemi dolduracaktır. Keyfi bir başlangıç noktası seçmekte bir sakınca yoktur. Çünkü bu nokta mutlaka eğri ailesindeki eğrilerden biri üzerinde olmak zorundadır. Bu yöntemin uygulanması sırasında, daha önce konu edilmiş olan yarım adımlar yöntemi de kullanılacak ve yaklaşıklık derecesini artırmak bakımından faydalı olacaktır.

Örnek .

$y' = [x^2 - y^2] / [x^2 + y^2]$

diferansiyel denklemi veriliyor. Bu, yukarıda belirttiğimiz tipe uyan bir denklemdir. Bunu parametrik olarak ifade edelim :

$X(x) \quad : \quad u = x^2 \quad ; \quad v = x^2$

$Y(y) \quad : \quad u = - y^2 \quad ; \quad v = y^2$

ve bunlar birleştirilerek

$X(x)$ eğrisi için $v = u$

$Y(y)$ eğrisi için $v = - u$

yazılabilecektir. Hatta

$v = u = 0 \quad ; \quad v = - u = 0$

koşulları da oluşturulabilecektir. Bunun anlamı şudur : Her ikisinde de birimleme sadece pozitif yöndeki kollar üzerinde yapılacaktır.

$v = u$ ve $v = -u$, uOv koordinat sistemi içinde birer doğru gösterirler. Bu doğrular xOy dik koordinat sistemi içinde, birincisi $X(x)$, ikincisi $Y(y)$ olarak çizilirler. Ancak her sistemde birimleme keyfi yapılabileceği gibi,

$v = u$ ve $v = -u$ doğrularının başlangıç noktası xOy düzlemi içinde keyfi olarak yerleştirilebilir.

Bu açıklamaları daha iyi kavrayabilmek için aşağıdaki örneği inceleyelim :

Örnek olarak seçilmiş olan diferansiyel denklemin $x = 2$, $y = 8$ olan bir integral eğrisini bulmak isteyelim:

Yarım adımlar yöntemini uygulayarak, verilen başlangıç koşulları için diferansiyel denklemi hesaplayalım :

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(2 ; 8) = [4 – 64] / [4 + 64] = - 15 / 17$$

olur. Buradan α hesaplanırsa, $\alpha = 138° \; 34'$ olduğu görülür. Bu doğrultu- da $x = 2$, $y = 8$ noktasından itibaren bir miktar (örneğin 1 cm) ilerle- yelim. İşaretleyeceğimiz nokta A olsun, (Şekil 9.12). Yarım adımlar yön-temini uygulamaya devam edelim. Bunun için A noktasının koordinatlarını bilmek gerekir. Dikkat edilirse, A noktası, merkezinin koordinatları (2 ; 8) ve yarıçapı 1 cm olan (öyle seçmiştik) bir çember ile (2 , 8) noktasından geçen ve eğimi

$$\operatorname{tg} \alpha = - 15 / 17$$

olan bir doğrunun ortak noktasıdır. Bu bilgiler ışığında aşağıda görülen sistem kurulabilir :

$$(x – 2)^2 + (y – 8)^2 = 1$$

$$y – 8 = - (15/17) (x – 2)$$

Bu sistem çözülürse

$$x = 2.75 \; ; \; y = 7,34$$

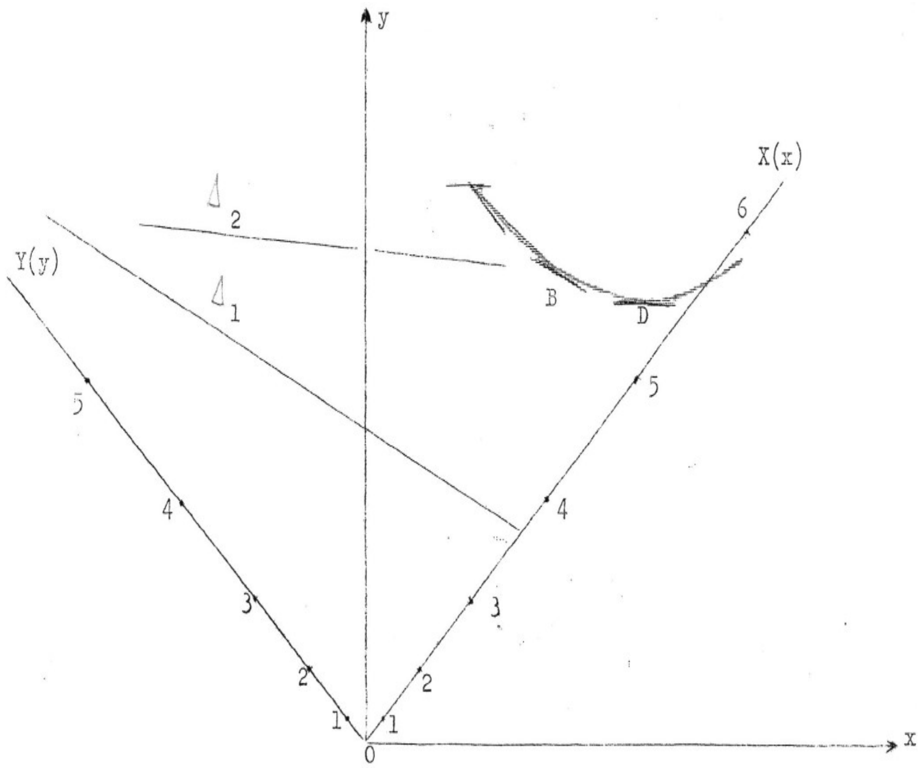
bulunur. Bu ilk yarım adımdır. Yarım adımlar yöntemi anımsanırsa, bu kez bu koordinatlar için diferansiyel denklem yeniden hesaplanacaktır.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y'(2,75 ; 7,34) = [7,5725 – 53,8756] / [7,5725 + 53,8756]$$

$$= - [46,3031] / [61,4481] = - [46,30] / [61,45]$$

olup değeri üzerinden α_1 hesaplanırsa $\alpha_1 = 143°$ olduğu görülür. Buna göre yine (2;8) noktasından başlamak ve bu doğrultuda bu kez 2 misli (2 cm) gidilerek B noktasına varılır.

Bu ilk tam adımdır. Demek ki B noktası integral eğrisine ait bir nokta olmalıdır. B noktasının koordinatları yukarıda olduğu gibi düşünülerek,



Şekil 9.12. $y' = [x^2 - y^2] / [x^2 + y^2]$ dif. denkleminin çözümü

$$(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = 4$$

$$y - 8 = - [46,30 / 61,45] (x - 2)$$

denklem sisteminin çözümünden elde edilir. Bu sistem çözülürse B noktasının koordinatları B (3,6 ; 6,85) olarak bulunacaktır.

B noktası integral eğrisine ait olduğuna göre bu noktadaki teğet doğrultusu nedir ? Bunu araştıralım. X(x) eğrisi üzerinde kendi birimlemesine göre 3,6 noktası işaretlenir. Aynı işlem Y(y) eğrisi üzerinde 6,85 noktası işaretlenmek suretiyle tekrarlanır (Şekil 9.12 ten izleyiniz). Bu iki nokta birleştirildiğinde B noktasından çizilecek teğetin doğrultusu belirlenmiş olur. Artık B noktasından bu doğrultuya bir paralel doğru çizmek yeterlidir. Bu örnek için aynı integral eğrisine ait bir üçüncü nokta bulmak üzere işlemlere devam edelim. Bu kere çıkış noktamız B dir. Bu noktada yarım adımlar yöntemini uygulayalım.

B noktasının koordinatları için diferansiyel denklemi hesaplayalım :

$$tg\,\alpha_2 = y'(3,6 ; 6,85) = [12,96 - 46,9225] / [12,96 + 46,9225] =$$

$$= - [33,96] / [59,88]$$

olup buradan α_2 hesaplanırsa ; $\alpha_2 = 150°\ 25'$ bulunacaktır. B noktasından itibaren bu doğrultuda 1 cm ilerlenirse C noktasına varılır. Tam adıma ulaşmak üzere işlemlere devam edelim. Bunun için C noktasının koordinatlarını belirlemek üzere, yukarıdaki işlemlerin benzerini yapalım

$$y - 6{,}85 = - [33{,}96 / 59{,}88]\ (x - 3{,}6)$$

$$(x - 3{,}6)^2 + (y - 6{,}85)^2 = 1$$

denklem sistemini çözersek $x = 4{,}5$ $y = 6{,}4$ bulunur. Dolayısıyla C noktası belirlenmiş olur : C(4,5 ; 6,4). Şimdi C nin koordinatları için diferansiyel denklemin yeniden hesaplanması gerekmektedir.

$$\text{tg}\ \alpha_3 = y'(4{,}5\ ;\ 6{,}4) = [20{,}25 - 40{,}96] / [20{,}25 + 40{,}96] = - [20{,}71 / 61{,}21]$$

olup buradan α_3 hesaplanırsa : $\alpha_3 = 161°\ 20'$ bulunur. B noktasından başlayarak $\alpha_3 = 161°\ 20'$ doğrultusunda bu kez 2 cm ilerlenirse D noktasına varılacaktır. Bu ise integral eğrisi üzerinde olan (olması gereken) bir noktadır. D noktasındaki teğet doğrultusunu çizebilmek için bu noktanın koordinatlarının bilinmesi gerekmektedir.

$$y - 6{,}85 = - [20{,}71 / 61{,}21]\ (x - 3{,}6)$$

$$(x - 3{,}6)^2 + (y - 6{,}85)^2 = 4$$

sistemi çözülmelidir. Sistem çözülürse $x = 5{,}5$ $y = 6{,}2$ bulunur.

Bir önceki tam adımda olduğu gibi bu değerler sırasıyla X(x) ve Y(y) eğrileri üzerinde işaretlenir ve elde edilen noktalar birleştirilirse Δ_2 teğet doğrultusu belirlenmiş olur. D noktasından bu Δ_2 doğrusuna çizilecek bir paralel, bu noktadan geçecek olan integral eğrisinin teğet kalacağı doğrultuyu belirtmiş olur.

Integral eğrisine ait başka noktalar elde edilmek istenildiğinde uygulama burada olduğu gibi devam ettirilmelidir. Ancak ara hesaplar oldukça uzun olacak ve belirli bir yaklaşıklıkla çalışmak gerekecektir. Yaklaşık hesaplamalar sonucunda, integral eğrisinin de sonuçta bir yaklaşık eğri olacağı kabul edilmelidir.

Bu konunun ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin incelenmesinde kullanılması gibi bir olanak varsa da biz kitabımıza bu bölümü koymadık. Çünkü Grafik Yöntem başlığı altında yaptığım yukarıdaki çalışmada görüldüğü gibi, bu konuda çözüm üretmek hayli güç ve zahmetli olmaktadır. Çözüm üretmek yerine, adi diferansiyel denklemler için biraz da özel bir durum arz etmektedir.

Konuyu buraya koyarken şöyle düşündük: Demek ki bu konuda *grafik yöntem* başlığı altında yapılmış çalışmalar da varmış! Bu bölüme ait yukarıdaki çalışmalar yapılırken gerçekte okuyucumuzu, böyle bir yöntemin varlığından haberdar etmekti. Ancak pratikte görülüyor ki kolayca uygulanabilir değildir.

Okuyucumuza biraz da bunu göstermek istemiştik.

10. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN VE SİSTEMLERİN ÇEŞİTLİ ALANLARDAKİ UYGULAMALARI

10.01. Giriş

Diferansiyel denklemlerin ve sistemlerin, başta da belirtildiği gibi, pek çok bilim alanında uygulama alanları bulunmaktadır. Bunlar tek düze sıradan konular olmamakla birlikte daha çok Mekanik, Elektrik Devreleri, Geometri, Roketler, Kimya, Radyoaktivite, Kirişlerin eğilmesi gibi konularda karşımıza çıkar. Ayrıca vereceğimiz bazı örnekler ilginç hatta şaşırtıcı olacaktır. Diferansiyel denklemler sadece matematiğin değil konu ettiğimiz alanlardaki problemlerin kurulup çözülmesine de yardımcı olmaktadır.

10.02. Mekanikteki Uygulamalar

Fizik konuları, fiziksel âlemin tabiatını belirleyen kanunları araştırmakla uğraşır. Fiziksel âlemde etrafta görülen, atom ve moleküller gibi görülmeyen şeylerin bütünü anlaşılır. Cisimlerin hareketinin incelenmesi mekaniğin bir dalıdır; buna *dinamik* denir. Newton'un üç hareket kanunu, dinamik çalışmalarının temel dayanağı şeklindedir.

10.02.01 Newton'un Hareket Yasaları

İlk olarak Newton tarafında ortaya çıkan üç yasa aşağıdaki gibidir.

*Üzerine dış kuvvetler etki etmedikçe duran bir cisim durmaya devam eder, hareketteki bir cisim ise hareketini bir doğru üzerinde değişmez hızla devam ettirir.

*Bir cismin momentumunun zamanla değişmesi cisme etki eden net kuvvetle ilgili orantılı ve aynı doğrultudadır.

*Her etkiye eşit ve zıt bir tepki vardır.

İkinci kanuna göre bir cismin momentumu, m kütlesi ile v hızının çarpımı olarak tarif edilir. Buna göre momentumun zamanla değişimi $\frac{d}{dt}(mv)$ dir. Cisme etki eden net kuvvet F ile gösterilirse ikinci kanuna göre

$$\frac{d}{dt}(mv)\alpha F \tag{10.1}$$

dir. Burada α işareti orantılı olduğunu göstermektedir. Orantı k ile gösterilirse;

$$\frac{d}{dt}(mv) = kF$$

elde edilir. Eğer m değişmez ise, bu

$$m\frac{dv}{dt} = kF \text{ veya } ma = kF$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $a = \dfrac{dv}{dt}$ ivmedir. Böylece;

$$F = \frac{ma}{k} \tag{10.2}$$

olduğu görülür. k nın değeri kullanılmak istenen birimlere bağlıdır. Bugün bu iki temel sistem kullanılmaktadır.

10.02.02. c g s sistemi veya Santimetre, Gram, Saniye Sistemi

Bu sistemde uzunluklar santimetre(cm), kütleler gram(gr) ve zamanlar saniye(sn) ile ölçülür. k için en basit değer $k = 1$ dir. (10.2) deki kanun

$$F = ma \tag{10.3}$$

olur. Eğer belirli bir kuvvet 1 gramlık bir kütlede saniyede bir santimetre $\left(1cm/sn^2\right)$lik bir ivmeye ulaşırsa, bu taktirde (10.3) den

$$F = 1g\,. \quad , \quad 1\ cm/sn^2 = 1\ g\ \ cm/sn^2$$

elde edilir. Bu kuvvete *dyne* denir. c g s sistemine *metrik sistem* de denir.

10.02.3. f p s Sistemi veya Foot, Pount, Saniye Sistemi

Bu sistemde de $k = 1$ olarak kullanılabilir. Böylece yasa $F = sa$ olur. Eğer belirli bir kuvvet 1 pount (1b) luk bir kütlede saniyede foot ivmeye ulaşırsa bu kuvvete *1 poundal* denir. Böylece;

$F = ma$ dan 1 poundal = 1 lb ft/sn^2 elde edilir.

Newton yasasının diğer bir ifade şekli, cismin kütlesi yerine ağırlığını kullanarak bulunur. Bir cismin kütlesinin dünya üzerinde her yerde aynı olmasına karşın üzerine sadece W ağırlığı etki eden bir cisim incelenirse karşıt ivmenin g yerçekimi ivmesi olduğu görülür. Burada kuvvet W dir. Newton yasası gereğince

$$W = mg \tag{10.4}$$

olur. (10.3) denklemi (10.4) denklemi ile bölünerek ;

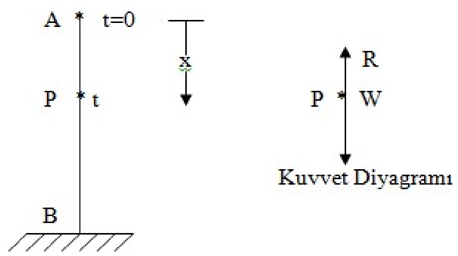
$$\frac{F}{W} = \frac{a}{g} \quad \text{veya} \quad F = \frac{Wa}{g} \tag{10.5}$$

elde edilir. (10.5) denklemi hem c g s hem de f p s birimleri ile kullanılabilir.

Örnek .

Bir paraşütçü durgun halde başlayarak düşmektedir. Paraşütçünün ve paraşütün toplam ağırlığı W libredir. Paraşüt üzerine (hava direnci dolayısıyla) etki eden bir kuvvet vardır. Ve bu kuvvet, düşme esnasında, herhangi bir andaki hızla doğru orantılıdır. Paraşütçünün düşey olarak aşağıya doğru düştüğünü ve tam atladığı anda paraşütünün açıldığını kabul ederek , meydana gelen hareketi belirleyiniz.

Fiziksel kuvvet diyagramı çizelim. A yı başlangıç noktası olarak ve AB yönünü pozitif x ekseni olarak kabul edelim. Etki eden koşullar ;



Şekil 10.1 Paraşüt problemi

(a) aşağı doğru etki eden W toplam ağırlığı ;

(b) yukarı doğru etki eden R hava direncidir.

Pozitif (aşağı doğru) yöndeki net kuvvet W- R dir. Direnç hızla doğru orantılı olduğundan

$$R\alpha|v| \text{ veya } R=\beta\ |v|$$

yazılır. Burada β orantı değişmezidir. Ve daima pozitif olduğundan mutlak değer işaretine gerek yoktur. Kısaca $R=\ \beta v$ yazılabilir. Böylece net kuvvet ; W- $\beta\ v$

ve Newton yasası kullanılarak;

$$\frac{W}{g}.\frac{dv}{dt}=\ W-\beta\ v$$

elde edilir.Paraşütçü durgun halden harekete başladığından $t=0$ da $v=0$ dır. Böylece tam matematiksel bağıntı ;

$$\frac{W}{g}.\frac{dv}{dt}=\ W-\beta\ v\ ,\ t=0 \text{ da } v=0$$

olur.

Diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilir tiptendir. Buna göre ;

$$\int\frac{Wdv}{W-\beta v}=\ \int gdt \quad \text{veya} \quad -\frac{W}{\beta}\ln\left(W-\beta v\right)=\ gt+c_1$$

olur. $t=0$ iken $v=0$ olduğundan

$$c_1=-\frac{W\ln W}{\beta}$$

ve,

$$-\frac{W}{\beta}\ln\left(W-\beta v\right)=gt-\frac{W}{\beta}\ln W$$

$$\ln\left(\frac{W}{W-\beta v}\right)=\frac{\beta gt}{W}$$

dır ve

$$v=\frac{W}{\beta}\left(1-e^{-gt/W}\right)$$

ve; $t\to\infty$ iken v nin W/β gibi değişmez bir limit hıza yaklaştığına dikkat edilmelidir. Bu, belirli bir zaman geçtikten sonra paraşütün, yaklaşık olarak, düzgün hızla hareket etmesinin nedenini açıklar. Ayrıca paraşütçünün aldığı yol da zamanın bir fonksiyonu olarak belirlenebilir.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{W}{\beta}\left(1-e^{-\beta gt/W}\right)$$

denkleminden;

$$x=\frac{W}{\beta}\left(t+\frac{W}{\beta g}e^{-\beta gt/W}\right)+c_2$$

elde edilir. $t=0$ iken $x=0$ olma koşulu kullanılarak ;

$$c_2=-\frac{W^2}{\beta^2 g}$$

bulunur. Böylece;

$$x=\frac{W}{\beta}\left(t+\frac{W}{\beta g}e^{-\beta gt/W}-\frac{W^2}{\beta^2 g}\right)$$

olur.

10.03. Elektrik Devrelerine Dair Uygulamalar

Mekanikteki Newton yasaları gibi, elektrikte de elektrik devrelerinin özelliklerini inceleyen *Kirchhoff* yasaları vardır. Gerçekte elektrik teorisi, elektromagnetik teoride Maxwell denklemleri denen belirli birkaç denkleme dayanır. Cisimlerin basit hareketlerini incelemek için Newton yasalarıı nasıl yeterli ise, elektrik devrelerinin basit özelliklerinin incelenmesi için de Kirchhoff yasaları yeterlidir.

En basit elektrik devresi bir seri devredir. Bu devrede bir batarya ya da jenaratör gibi enerji kaynağı olarak kullanılan bir e m k (elektromotiv kuvvet) ve bir elektrik ampulü, elektrik ocağı veya diğer başka aletler gibi bu enerjiyi kullanan bir direnç vardır.

Elementer fizikte e m k in devredeki akımla ilgili olduğu görülür. I ani akımı e m k ile doğru orantılıdır. Formül olarak;

$I \alpha E$ veya $E \alpha I$ dir. Buna göre;

$$E = I\ R \tag{10.6}$$

olur.

Burada R orantı değişmezidir. Buna direnç katsayısı veya sadece direnç denir. Genel olarak <Pratik birimler> cinsinden **E**'nin birimi **volt**, **I** 'nın birimi **Amper** ve **R**'nin birimi **Ohm'**dur. (10.6) denklemi **Ohm kanunu** olarak bilinir.

Dirençten başka elemanları da kapsayan devreler daha karışık fakat birçok durumda daha pratiklerdir. İki önemli eleman bobin (inductor) ve kondansatör'dür. Bir bobin akımın değişmesine karşı koyar. Mekanikte kütlenin atalet etkisi gibi, elektrikte de bobinin atalet etkisi vardır. Bir kondansatör ise enerji depo eden bir elemandır.

- **Bir direnç üzerindeki voltaj düşmesi dirençten geçen akımla orantılıdır.**

Direnç üzerindeki voltaj düşmesi E_R ve akım I ise, bu taktirde;

$E_R \alpha I$ veya $E_R = RI$ dir. Burada R orantı katsayısıdır ve buna direnç katsayısı veya kısaca direnç denir.

- **Bir bobin üzerindeki voltaj düşmesi akımın zamana göre ani değişmesi ile orantılıdır.**

Bobin üzerindeki voltaj düşmesi E_L ise bu taktirde ;

$$E_L \alpha \frac{dI}{dt} \quad \text{veya} \quad E_L = L\frac{dI}{dt}$$ 'dir.

Burada L orantı değişmezidir. Ve buna öz indüksiyon katsayısı veya kısaca indüktans denir.

- **Bir kondansatör üzerindeki voltaj düşmesi kondansatör üzerindeki ani elektrik yükü ile orantılıdır.**

Kondansatör üzerindeki voltaj düşmesi E_C ve ani yük Q ise bu taktirde;

$E_C \alpha\ Q$ veya $E_C = \frac{Q}{C}$ dir. Burada orantı sabiti $1/C$ alınmıştır. C sığa veya kapasitans olarak bilinir.

Kirchhoff Yasası

Bir elektrik devresindeki bütün voltaj düşmelerinin cebirsel toplamı sıfırdır. Yani uygulanan voltaj (e m k) voltaj düşmelerinin toplamına eşittir.

Kirchhoff yasasına göre, uygulanan e m k (E) bobin üzerindeki voltaj düşmesi $(L\frac{dI}{dt})$ ile direnç üzerindeki voltaj düşmesinin (RI) toplamına eşit olacağından, devrenin diferansiyel denklemi;

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

olur.

Örnek .

E m k'i 100 volt olan jeneratör 10 ohm luk bir direnç ve 2 henrilik bir bobinle seri bağlanmıştır. $t = 0$ anında K anahtarı kapanırsa, akım için bir diferansiyel denklem yazınız. Ve t anındaki akımı belirleyiniz.

Uygulanan voltaj = 100 volt, direnç üzerindeki voltaj düşmesi $(RI) = 10I$, bobin üzerindeki voltaj düşmesi $(L\, dI/dt) = 2\, dI/dt$ dir.

Bunlara göre Kirchhoff yasasından

$$100 = 10I + 2\frac{dI}{dt} \quad \text{veya} \quad \frac{dI}{dt} + 5I = 50 \quad \text{dir.} \tag{10.7}$$

$t = 0$ anında anahtar kapatıldığından $t = 0$ iken $I = 0$ dır.

(10.7) diferansiyel denklemi, integrasyon çarpanı e^{5t} olan birinci mertebeden doğrusal bir denklemdir. Bu çarpanla çarpılınca,

$$\frac{d}{dt}(e^{5t}I) = 50e^{5t} \quad \text{veya} \quad e^{5t}I = 10e^{5t} + c$$

Yani $I = 10 + ce^{-5t}$ olur.

$t = 0$ iken $I = 0$ olduğundan $c = -10$ dur. Böylece ; $I = 10(1 - e^{-5t})$ dir.

10.04. Kimya ve Kimyasal Karışımlara Ait Uygulamalar

Diferansiyel denklemlerin kimyasal olaylarda birçok uygulamaları vardır.

Örnek .

"Radyoaktif Bozulma ve Karbon 14 (C^{14}) Yaş Tayin Yöntemi"

Ön bilgi : c^{14} yaş tayin yöntemi, çok eski çağlardan kalma artıkların yaşını belirlemede kullanılan bir yöntemdir. Yöntem, karbon atomunun önemli bir özelliğinin kullanmaktadır. Atmosferin üst tabaklarında bulunan C^{12} atomu kozmik bombardıman sonucunda iki nötron alarak C^{14} izotopuna dönüşmektedir. C^{14} te zamanla bir elektron kaybederek azota (N^{14}) dönüşmektedir. C^{14} radyoaktif izotopunun bozulma süresi (yarılanma ömrü) 5730 yıldır. Bu sayı 1941 de W.S. Libby tarafından bulunmuştur. Yani, 1 gr C^{14}, 5730 yıl sonra 0.5 gr N^{14} olmaktadır. Atmosferde C^{12} nın C^{14} e oranının sabit olduğu kabul edilmektedir. Yaşayan canlı

varlıklar C^{12} gibi C^{14} ü de kullanmaktadır. Bu oran atmosferdeki gibi sabittir; ancak C^{14} bozunmaya uğradığı için ölen bir canlının vücudundaki bu oran, yukarıda belirtilen değere uyacak şekilde değişmektedir.

Yapılan deneyler C^{14} ün zamanla bozunma miktarının kütlesi ile doğru orantılı olduğunu göstermektedir. O halde, buradan hareketle bir kalıntıdaki C^{14} miktarı ölçülerek fosilin yaşı tayin edilebilir.

C^{12} nin a C^{14} oranının atmosferde sahip olduğu kabulünün doğru olmadığı ve oluşma oranının bozulma oranından %38 daha fazla olduğu Southern California University'den Hans Svez ; Utah University'den Melvin Cook tarafından gösterilmiştir. Buna göre temel kabullerden birinde yanlışlık vardır. Tekniğin bazı testlerden başarıyla geçerken bazılarında ise tamamen yanlış sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Ayrıca, diğer metotlarla karşılaştırıldığında C^{14} metodunun olması gerekenden daha az bir değer verdiği tespit edilmiştir.

C^{14}'ün herhangi andaki kütlesi $M(t)$ olsun. Bozulmanın kütle ile orantılı olduğu iddia edildiğinden ;

$$\frac{dM}{dt} = -aM$$

yazılabilir. Burada a, orantılılık katsayısıdır. (-) işareti azalmayı ifade eder. Denklemin basit integrasyonu;

$$M = M_0 e^{-at}$$

verir.

Burada M_0, başlangıçtaki kütledir. a'nın değeri henüz bilinmemektedir. Ancak, C^{14} izotopunun yarı ömrü 5730 yıl olduğuna göre bu kadar yıl sonra M_0 kütlesi $\frac{M_0}{2}$'ye inecek ve diğer yarısı N^{14}' e dönüşecektir. O halde bu bilgiyi yukarıda kullanarak a yı bulabiliriz:

$$\frac{M_0}{2} = M_0 e^{-a(5730)} \rightarrow e^{-a} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$$

bulunur. O halde:

$$e^{-at} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

dur. Metodu uygulamak için şöyle bir örnek seçelim:

Çok eski zamanlardan kaldığı düşünülen bir fosil incelenmiş ve C^{14} miktarının atmosferdeki değerinin %25 ine indiğinin gözlemlenmiş olduğunu kabul edelim. Bu fosil kaç yaşındadır?

Yukarıdaki denklemi ve a değerini kullanarak;

$$0.25M_0 = M_0 e^{-at} = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\ln(0.25) = \frac{t}{5730} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow t = 11460 \text{ yıl}$$

bulunur.

Örnek .

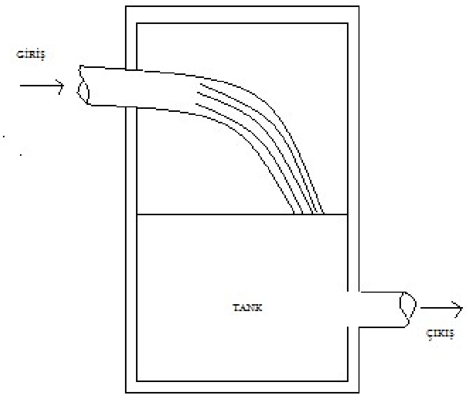
“Karıştırma Problemi”

Sürekli karıştırılan bir tankın içinde başlangıçta 20 kilogramı tuz olan toplam 800 kg karışım bulunmaktadır. Her bir kutusu 0.9 kg çözülmüş tuz içeren 20 kg’lık beş adet tuzlu su bidonu her dakikada bir tanka boşaltılmakta ve tamamen homogen bir karışım elde edildikten sonra tanktan aynı oranda pompalanmaktadır. Herhangi bir anda tankta bulunan $y(t)$ tuz miktarı nedir?

Tanktaki tuzun zamana göre değişim oranı, tanka tuz girişi oranı ile çıkış oranının farkı olmalıdır. Tanka giren dakika dakika başına tuz miktarı 5x0.9=4.5 kg/dak’dır. Giren ve çıkan aynı olduğuna göre tankta daima 800 kg karışım vardır. O halde, herhangi bir anda tankta bulunan tuz oranı $y(t)/800$ dür. Tanktan dakikada çıkan 20 kg olduğuna göre çıkan karşımdaki tuz miktarı 20y/800=0.025 $y(t)$ dir. Buna göre kurulacak matematiksel model:

$$y' = \frac{dy}{dt} = \text{Giren tuz oranı- Çıkan tuz oranı} = 4.5\text{-}0.025\ y(t) \tag{10.8}$$

şeklinde olmalıdır. Bu denklem ayrıştırılabilir bir diferansiyel denklemdir. Öyleyse , (10.8) denklemi integre edilirse;



Şekil 10.2. Karıştırma problemi

$$\frac{dy}{y-180} = -0.025dt \rightarrow \ln\left|y-180\right| = -0.025t + c$$

ya da;

$$y = 180 + ce^{-0.025t} \tag{10.9}$$

elde ederiz. c yi bulmak için $t=0$ anında $y(0)$=20 kg olduğuna dikkat edelim. (10.9) denkleminden;

$$20 = 180 + ce^{-0.025(0)} \rightarrow c = -160 \tag{10.10}$$

buluruz. O halde,

$$y(t) = 180 - 160e^{-0.025t}$$

dır. Tanktaki tuz miktarının sürekli arttığı görülebilir. Değişimin (20,180) arası olduğu aşikardır.

10.05. Çeşitli Artma ve Azalma Problemleri ile İlgili Uygulamalar

Bir y büyüklüğünün zamana göre değişme hızının y ile orantılı olduğu

$$\frac{dy}{dt} = ay$$

diferansiyel denklemi ile belirlenir. Eğer a orantı sabiti pozitif ve y de pozitif ise dy/dt pozitif ve bu da y nin arttığını gösterir. Bu taktirde y için artıyor denir. Bu problem, bir artma problemidir. Diğer taraftan da eğer a negatif ise ve y pozitif ise dy/dt negatif ve bu da y nin azaldığını gösterir. Bu taktirde bir azalma problemidir.

Örnek .

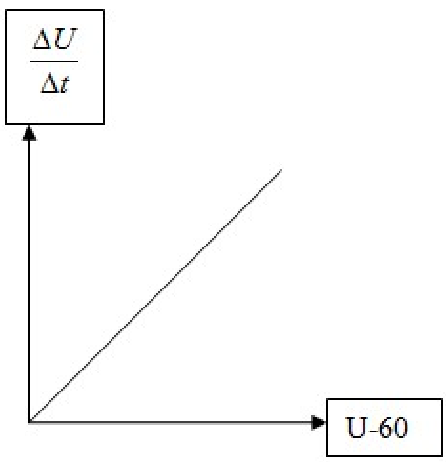
Bir miktar su, kaynama noktası olan $100^\circ C$ ye kadar ısıtılıyor. Sonra sıcaklık kaynağından alınıp $60^\circ C$ değişmez sıcaklıktaki bir odaya götürülerek muhafaza ediliyor. 3 dakika sonra suyun sıcaklığı $90^\circ C$ olarak ölçülüyor.

a) 6 dakika sonra su sıcaklığını bulunuz.

b) Su sıcaklığının ne zaman $75^\circ C$ ve ne zaman $61^\circ C$ olacağını bulunuz.

Suyun sıcaklık kaynağından uzaklaştırılmasından t dakika sonraki sıcaklığını U ile gösterelim. Oda ile suyun sıcaklığı arasındaki fark U-60 ‘dır. U’nun zamana göre değişme oranı;

$\frac{dU}{dt}$ dir.



Şekil 10.3. Artma azalma problemi

Deneylere dayanarak (U-60) en büyük değere sahip iken sıcaklığın en hızlı, (U-60) küçük iken ise en yavaş şekilde değişeceği söylenebilir.

ΔU sıcaklıktaki değişme miktarını, Δt ise bu değişmenin meydana gelmesi için gerekli zaman aralığını göstersin. Küçük bir Δt zaman aralığını aldığımız taktirde $\Delta U/\Delta t$ 'nin dU/dt 'ye çok yakın olacağını varsayabiliriz. -$\Delta U/\Delta t$'nin (U-60)'a göre grafiği çizildiğinde, şekildekine benzer bir grafik ortaya çıkar.

Grafikte görülen bağıntı bir doğru olduğundan yaklaşık olarak $\frac{dU}{dt}$ nin (U-60) ile orantılı olduğu varsayılır. Yani :

$$\frac{dU}{dt} = \text{a (U-60)}$$

Burada a orantı katsayısıdır. Şimdi (U-60) pozitif iken $\frac{dU}{dt}$ negatif $k > 0$ olmak üzere a=k yazalım. Bu takdirde:

$$\frac{dU}{dt} = -k(U-60)$$

olur. Bu denklem fizikte **Newton soğuma kanunu** adı ile tanınır ve birçok sıcaklık problemlerinde önemlidir. Bu denklem için bilinen koşullar:

$t = 0$ için U=$100^\circ C$ ve $t = 3$ dakika için U$= 90^\circ C$ dir.

Denklemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözersek:

$$\int \frac{dU}{U-60} = \int -k dt$$

$$\ln(U-60) = -kt + c \text{ veya } U - 60 = ce^{-kt}$$

bulunur.

$t = 0$ için $U = 100$ olduğundan c=40 dır. Dolayısıyla :

$$U - 60 = 40e^{-kt} \text{ dir.}$$

$t = 3$ için $U = 90$ olduğundan ;

$$e^{-3k} = 3/4 \Rightarrow e^{-k} = \left(3/4\right)^{1/3}$$

dür. Buradan da

$$U - 60 = 40(e^{-k})^t = 40\left(3/4\right)^{t/3}$$

Yani ;

$$U = 60 + 40\left(3/4\right)^{t/3} \tag{10.11}$$

elde edilir.

6 dakika sonra sıcaklık : (4) denkleminde $t = 6$ konursa $U = 82.5^\circ C$ bulunur.

Sıcaklığın $75^{\circ}C$ ve $61^{\circ}C$ olduğu zamanlar :

Denklemde $U = 75^{\circ}C$ konursa:

$$75 = 60 + 40\left(\frac{3}{4}\right)^{t/3} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{t/3} = \frac{3}{8} \quad \text{ve} \quad t \cong 10.2 \quad ;$$

$U = 61^{\circ}C$ konursa :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{t/3} = \frac{1}{40} \text{ ve } t = 38.5 \text{ bulunur.}$$

Böylece $100^{\circ}C$ daki suyun sıcaklığının $75^{\circ}C$'ye düşmesi için 10.2 dakika, $61^{\circ}C$ ye düşmesi için de 38.5 dakika geçmesi gerekmektedir.

10.06. Nüfus Artış Problemi

Örnek .

t anında nüfus sayısı $N(t)$ olsun. Birey başına artış oranını, nüfus büyüme miktarının toplam nüfusa oranı olarak tanımlayalım. Mesela, doğum oranı % 3.7 ve ölüm oranı % 1.9 ise, artış oranı % (3.7-1.9) =

% 1.8 = 0.018 dir. Buna göre : $\dfrac{dN}{dt} = 0.018 \; N$ dir.

Verilen bu topluluktaki ortalama doğum oranının sabit olduğunu farz

edelim. Ortalama ölüm oranı topluluktaki birey sayısı ile orantılıdır. Bu orantı katsayısı δ olsun. dN/dt topluluğun artış oranı olduğundan, birey başına artış oranı:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} \tag{10.13}$$

dir. O halde topluluğun artışına dair diferansiyel denklem :

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \beta - \delta N \tag{10.14}$$

dir. (10.14) denklemi **nüfus artış denklemi** (lojistik denklem) ve bazen de **Verhults Denklemi** adını almaktadır. Bu denklemin önerdiği büyüme oranı da **lojistik artış** olarak bilinir.

(10.14) denklemi, değişkenlerine ayrılabilir olduğundan,

$$\int \frac{dN}{N(\beta - \delta N)} = \int dt$$

yazabiliriz. Bunun integrali :

$$\frac{1}{N(\beta - \delta N)} = \frac{1}{\beta N} + \frac{\delta}{\beta(\beta - \delta N)}$$

şeklinde basit kesirlere ayrıştırıp integrasyonu gerçekleştirerek:

$$\frac{1}{\beta}\ln|N|-\frac{1}{\beta}\ln|\beta-\delta N|=t+c$$

olup buradan

$$\frac{1}{\beta}\ln\left|\frac{N}{\beta-\delta N}\right|=t+c$$

elde ederiz. Biraz kez daha düzenlenirse :

$$\frac{N}{\beta-\delta N}=c_1e^{\beta t} \tag{10.15}$$

buluruz. Burada $c_1=\pm e^{\beta c}$ aldık. $t=0$ koyarak :

$$c_1=\frac{N(0)}{\beta-\delta N(0)}$$

buluruz. Bunu (10.15) denkleminde yerine koyarsak ;

$$N(t)=\frac{\beta N(0)e^{\beta t}}{\beta-\delta N(0)+\delta N(0)e^{\beta t}}=\frac{\beta}{\delta+\left[\frac{\beta}{N(0)}-\delta\right]e^{-\beta t}}$$

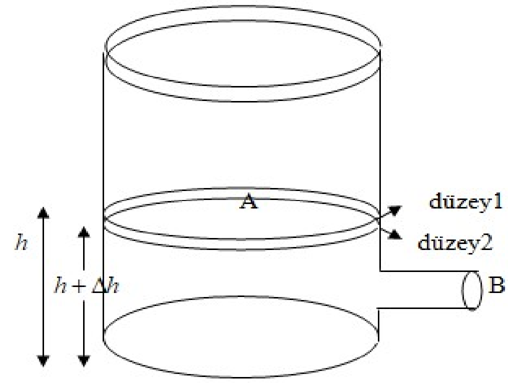
verir. $\beta>0$ olduğundan, t arttıkça $e^{-\beta t}$ sıfıra yaklaşır. Öyleyse, en fazla β/δ sınır değerine ulaşılabilir.

10.07. Geometri Kapsayan Fizik Problemleri

Fizik problemlerinin pek çoğu, geometri ile ilişkilidir. Örneğin yarısına kadar su ile dolu ve ekseni etrafında sabit bir açısal hız ile dönen bir dik dairesel silindir düşünelim. Su yüzeyinin şekli, silindirin açısal hızı ile belirlenecektir. Burada fizik, su yüzeyinin geometrik şeklini belirler.

Örnek.

Kesiti değişmez ve A olan bir kap H yüksekliğine kadar su ile doludur. Su kabın dibindeki B kesitli bir delikten dışarı akmaktadır. Herhangi bir anda suyun yüksekliğinin ve tankın boşalması için geçen süreyi bulunuz.



Şekil 10.4. Fizik problemi

Kap şekil 10.4 te görüldüğü gibi olsun. A, kabın değişmez kesit alanı ve B de deliğin kesit alanıdır.

t anında tanktaki su yüksekliği h (düzey 1) ve $t+\Delta t$ anındaki yükseklik $h+\Delta h$ (düzey 2) olsun. Kullanacağımız temel prensip, düzey, 1 den 2 ye düştüğünde kaybedilen su miktarı delikten çıkan su miktarına eşittir, şeklindedir.

Su düzeyi 1 den 2 ye düştüğünde kaybedilen hacim, sayısal olarak, $A\Delta h$ dır. Bu arada işaretlere dikkat edilmelidir. Gerçekte Δh negatif bir büyüklük olduğundan, Δt zaman aralığında gerçek hacim kaybı $-A\Delta h$ dır.

Delikten çıkan suyun hacmi ise, kesiti B olan ve Δs uzunluğundaki bir silindirin hacmi kadardır. Burada Δs, su yatay olarak hareket ettirebildiği taktirde Δt zaman aralığında hareket edebileceği mesafedir. Böylece :

$-A\Delta h = B\Delta s$ bulunur. Δt ile bölüp $\Delta t \to 0$ için limit alınırsa,

$$-A\frac{dh}{dt} = B\frac{ds}{dt} = Bv \quad \text{veya} \quad -Adh = Bvdt \tag{10.16}$$

elde edilir. Burada $v = \dfrac{ds}{dt}$ delikteki akış hızıdır. Şimdi delikteki akış hızının belirlenmesi gerekmektedir. Su düzeyi yüksek ise v de büyük olur. Gerçekte ideal koşullar için , $v = \sqrt{2gh}$ olduğunu göstermek zor değildir. Böylece (10.16),

$$-Adh = B\sqrt{2gh}dt \tag{10.17}$$

olur. Başlangıçtaki yükseklik H olduğundan, $t = 0$ iken $h = H$ dır.

(10.17) deki bağıntı değişkenlerine göre ayrılırsa,

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{B}{A}\sqrt{2g}\int dt \ , \quad 2\sqrt{h} = -\frac{B}{A}\sqrt{2g}t + c$$

bulunur. $t = 0$ iken $h = H$ olduğu kullanılırsa, $c = 2\sqrt{H}$ elde edilir ve :

$$2\sqrt{h} = -\frac{B}{A}\sqrt{2g}t + 2\sqrt{H} \qquad (10.18)$$

şeklinde yüksekliği zamanın bir fonksiyonu olarak ifade eden bir denklem çıkar. Tankın boşalması için geçen süre ise $h = 0$ için t bulunarak elde edilir.

(10.18) den , $t = \frac{A}{B}\sqrt{\frac{2H}{g}}$ elde edilir.

10.08. Karma Örnekler

Bu bölümde yukarıdaki konuların daha iyi anlaşılması açısından çeşitli örnekler bulunmaktadır.

Örnek.

Radyum'un %5 inin 12 yılda kaybolduğu hesaplanmıştır.

a) 1000 yılda kütlenin % kaçı kaybolur ?

b) Radyum'un yarı ömrü nedir ?

A, gr. cinsinden Radyum'un t yıl sonundaki miktarını göstersin. Bu takdirde dA/dt (matematiksel yaklaşım yöntemi düşünülürse) Radyum'un çözülme hızını gösterir.

$$\frac{dA}{dt}\alpha A \quad \text{veya} \quad \frac{dA}{dt} = \alpha A$$

yazılabilir.

Burada α orantı katsayısıdır. Daima $A > 0$ ve azaldığından $\frac{dA}{dt} < 0$ ve dolayısıyla α negatif olmalıdır. $\alpha = -k$ ile gösterilerek,

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

yazılır.

Varsayalım ki, A_0, gr. cinsinden Radyum'un başlangıçtaki kütlesini göstersin. Bu takdirde verilen bilgiye göre 12 yılsonunda 0.005 A_0 gr. kalmış olacaktır. Dolayısıyla $t = 0$ için $A = A_0$ ve $t = 12$ yıl için $A = 0.995$ A_0 yazılabilir.

Değişkenlerine ayrılabilen integral hesabı ile,

$$\ln A = -kt + c_1 \quad \text{veya} \quad A = ce^{-kt}$$

bulabiliriz. $t = 0$ için $A = A_0$ olduğundan $c = A_0$ dır. Buradan

$$A = A_0 e^{-kt}$$

yazılabilir.

$t = 12$ için $A = 0.995$ A_0 olduğundan,

$$0.995A_0 = A_0 e^{-12k}, e^{-12k} = 0.995, e^{-k} = \left(0.995\right)^{1/12}... \tag{10.19}$$

Dolayısıyla,

$$A = A_0 e^{-kt} = A_0 \left(e^{-k}\right)^t = A_0 \left(0.995\right)^{t/12} \tag{10.20}$$

olarak (10.19) denkleminden k çözülürse, $k = 0.000418$ bulunur. Buradan :

$$A = A_0 e^{-0.000418t} \tag{10.21}$$

dır.

1000 yılın sonunda kaybolan % kütle : $t = 1000$ konursa (10.20) ve (10.21) den $A = 0.658$ A_0 veya kütlenin %34.2 sinin kaybolacağı hesaplanır.

Radyum'un yarı ömrü : Radyoaktif yok olmanın yarı ömür süresi, kütlenin yarısının kaybolduğu zaman olarak tanımlanır. Böylece problemimizde $A = \frac{1}{2} A_0$ olduğu zamanı bulmamız istenmektedir. (10.21) denklemini kullanarak, $e^{-0.000418t} = \frac{1}{2}$ ifadesinden $t \cong 1660$ yıl olarak bulunur.

Örnek.
Toricelli Kanunu

Bir kabın içindeki sıvının, kabın altına açılan delikten ne kadar zamanda boşalacağını bilmek isteyebiliriz.

Fizik ilkesi sıvı boşalma oranının,

$$\frac{dv}{dt} = -kAv$$

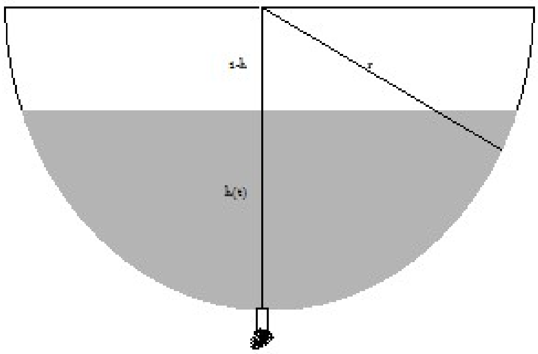
ile verileceğini öngörmektedir. Burada $v(t)$, herhangi bir t anında kapta bulunan sıvının hacmi, A ; deliğin kesit alanı ve k da sıvı viskozitesi ve delik şekline bağlı bir sabittir. k nın deneysel olarak belirlenen değeri 0 ile 1 arasındadır. Bu ilkeye ilave olarak kap içindeki sıvı parçacıklarının serbest düşen bir cisim gibi hareket ettiklerini kabul edelim. Bu kabule göre delikten çıkış hızını bulmak için delikten h(t) yüksekliğinde bulunan m kütleli parçacık için y=h(t) ve y=0 konumları arasında enerjinin konumunu yazabiliriz :

$$mgh(t) = \frac{1}{2} mv^2 \quad ; \quad v(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

Bu değeri yukarıdaki dif. denklemlde yerine koyarsak :

$$\frac{dv}{dt} = -kA\sqrt{2gh(t)} \tag{10.22}$$

elde edilir. Bir örnek olarak yarı küresel tankın boşalmasını inceleyelim.



Şekil 10.5. Toricelli Kanunu

Önce v ile h arasındaki bağıntıyı bulalım. r, t anındaki sıvı yüzeyinin yarıçapı olsun. T anı ile t+Δt anı arasında kaptan dökülen Δv sıvı hacmi Δh kalınlığındaki ve r(t) yarıçapındaki diskin hacmine eşit olmalıdır.

Buna göre :

$$\Delta v = \pi \left(r \left(t \right) \right)^2 \Delta h$$

ve dolayısıyla da ,

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \pi (r(t))^2 \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

olur. $\Delta \to 0$ limit halinde,

$$\frac{dv}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \tag{10.23}$$

olur. (10.22) ve (10.23) denklemlerinden,

$$\pi r^2 \frac{dh}{dt} = -kA\sqrt{2gh} \tag{10.24}$$

elde ederiz. Eğer r yarıçapı h cinsinden yazılabilirse, (10.24) ten sadece h ile t ye bağlı bir diferansiyel denklem elde edilmiş olur. Şeklin geometrisini dikkate alarak,

$$r^2 = 1^2 - (1-h)^2 = 2h - h^2$$

bulunur. Şimdi (10.24) denklemi,

$$\pi\left(2h - h^2\right)\frac{dh}{dt} = kA\sqrt{2gh(t)} \tag{10.25}$$

şeklini alır. (10.25) denklemi,

$$\frac{\pi\left(2h - h^2\right)}{\sqrt{h}} = -kA\sqrt{2g}dt$$

şeklinde ayrıştırılabilir olduğundan, integrasyonla,

$$\pi\left[\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}\right]=-kA\sqrt{2g}t+c \tag{10.26}$$

buluruz. g=9.81 m/sn^2, delik yarıçapı $r_d = 2cm$ ve şekil faktörü $k = 0.8$ alınırsa, $A = \pi r_d^2 = 2.826x10^{-3}m^2$ olur. (10.26) ifadesi,

$$10h^{\frac{3}{2}} - 6h^{\frac{5}{2}} = -0.47x10^{-1}t + c \tag{10.27}$$

elde edilir.

$t = 0$ anında $h(0) = r = 1m$ olduğunu göz önüne alarak,

$10 - 6 = -0.4710^{-1}(0) + c \rightarrow c = 4$ bulunur. Öyleyse, (10.27) denklemi,

$$10h^{\frac{3}{2}} - 6h^{\frac{5}{2}} = -0.47x10^{-1}t + 4 \quad \text{olur.}$$

$h = r = 0$ koyarak boşalıncaya kadar geçen zaman

$$t = 85sn = 1.416\,\text{dakika}$$

olarak bulunur.

Örnek.

Kimya ve Kimyasal Karışımlara ait Uygulama

A ve B gibi iki kimyasal madde reaksiyona girerek diğer bir C maddesi belirlenmektedir. C'nin belirme hızı A ve B'nin o andaki miktarlarının çarpımı ile orantılı olarak değişmektedir. Olay esnasında B'nin her paundu için A dan 2 lb. gerekmektedir. Başlangıçta 10 lb. A ve 20 lb. B varsa 20 dakika sonra 6 lb. C belirmektedir. Herhangi bir anda C'nin miktarını bulunuz.

t saatte belirlenen C miktarı x pound olsun. Bu taktirde belirleme hızı $\frac{dx}{dt}$ dir. x pound C meydana gelmesi için 2x/3 *lb. A,* x/3 lb. B ye ihtiyaç vardır. Buna göre x pound C'nin belirlendiği t anında $10 - {}^{2x}\!/_{3}$ pound A ve $20 - {}^{x}\!/_{3}$ pound B mevcuttur. Bu nedenle:

$$\frac{dx}{dt} = K\left(10 - \frac{2x}{3}\right)\left(20 - \frac{x}{3}\right)$$

dir. Burada, K orantı sabitidir. Bu denklemde k diğer bir değişmez olmak üzere:

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x)$$

olarak da yazılabilir. İki koşul mevcuttur. Başlangıçta hiç C olmadığından $t = 0$ iken $x = 0$ dır. Diğer taraftan $t = \frac{1}{3}$ için $x = 6$ dır. Gerçekten biri k yı belirlemek, değeri diferansiyel denklemin çözümünde çıkan keyfi değişmezi bulmak için iki koşul gereklidir. Böylece tam kuruluş :

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x)$$

$t=0$ iken $x=0$, $t=\frac{1}{3}$ iken $x=6$ dır.

Değişkenlere ayırarak :

$$\int \frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \int kdt = kt + c_1$$

bulunur.

$$\int \frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \int \frac{1}{45}\left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x}\right)dx = \frac{1}{45}\ln\left(\frac{60-x}{15-x}\right)$$

dir. Böylece gösterilebilir ki :

$\frac{60-x}{15-x} = ce^{45kt}$ dir. $t=0$ için $x=0$ olduğundan c=4 bulunur.

$\frac{60-x}{15-x} = 4e^{45kt}$ ve $t=\frac{1}{3}$ iken $x=6$ olduğundan : $e^{15k} = \frac{3}{2}$ ve

$\frac{60-x}{15-x} = 4\left(e^{15k}\right)^{3t} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}$ bulunur.

Buradan da

$x = \dfrac{15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right]}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}$ elde edilir. $t \to \infty$ iken $x = 15lb.$ dır.

Örnek.

Düzgün ısı akışı

Isısal geçirgenliği K=0.15 c g s olan uzun bir çelik borunun iç yarıçapı 10 cm ve dış yarı çapı 20 cm. dir. İç yüzey $200^\circ C$ de dış yüzey $50^\circ C$ de tutulmaktadır.

a) Aynı merkezli silindirlerin ortak ekseninden olan r uzaklığının fonksiyonu olarak sıcaklığı bulunuz.

b) r=15 cm iken sıcaklığı bulunuz.

c) Borunun 20 m uzunluğundaki bir kısmından dakikada ne kadar ısı kaybolur ?

İzotermal yüzeyler verilenlerle aynı merkezli silindirlerdir. Yarıçapı r, uzunluğu *l* olan böyle bir yüzeyin alanı $2\pi rI$ dır. dn uzaklığı bu hal için dr dir. Bunlara göre :

$$q = -K\left(2\pi rI\right)\frac{dU}{dr}$$

olarak yazılabilir. K=0.15 I= 20 m.=2000cm. olduğundan,

$$q = -600\pi r\frac{dU}{dr}$$

dir. Bu denklemde q şüphesiz değişmezdir. Koşullar ise :

r = 10 iken U= $200^{\circ}C$

r = 20 iken U= $50^{\circ}C$ dir.

Yukarıdaki denklemde değişkenler ayrılıp integre edilirse :

$-600\pi U = q\ln r + c$ elde edilir ve koşullar kullanılırsa,

$$-600\pi(200) = q\ln 10 = c\,,$$

$$-600\pi(50) = q\ln 20 + c$$

bulunur.

Buradan da, $q = 408000$ ve $c = -1317000$ değerleri elde edilir.

Dolayısıyla $U = 699 - 216\ln r$ bulunur.

Eğer r = 15 ise yerine koyarsak, $U = 114^{\circ}C$ elde edilir. q nun yukarıdaki saniyede kalori değerinden , $q = 408000X60cal/dak = 24480000cal/dak$

bulunur.

Örnek.

Çeşitli artma ve azalma problemleri (Newton'un soğuma yasası)

Newton soğuma yasası, bir cisim ile çevresi arsındaki sıcaklık farkının zamana göre değişiminin, sıcaklık farkıyla orantılı olduğunu ifade etmektedir. Cismin verilen andaki sıcaklığı $T(t)$ ve ortamın sabit kabul edilen sıcaklığı da T_{∞} olsun. Buna göre kanunun matematiksel ifadesi :

$$\frac{d}{dt}\left[T(t) - T_{\infty}\right] = k\left[T(t) - T_{\infty}\right]$$

$$\frac{dT}{dt} = k\left[T(t) - T_{\infty}\right]$$

şeklinde olacaktır (1) denklemini değişkenlerine ayırıp çözersek :

$$T(t) = T_{\infty} + c_1 e^{kt} \tag{10.28}$$

elde edilir.

Polis teşkilatındaki adli tıp birimleri bu denklemi kullanarak bir kurbanın ne zaman öldürüldüğünü bulabilirler. Mesela, kabul edelim ki kurban, sıcaklığı $10^{\circ}C$ de olan bir odada tutulmaktadır. Ölüm anındaki beden sıcaklığını, normal değer olan $37^{\circ}C$ olarak alalım. Araştırmacının ölüm saatini bulması için öncelikle c_1 ve k sabitlerini bulması gerekir.

Farz edelim ki memur saat 10 ve 11 de ölçümler yaparak vücut sıcaklığını $32.4^{\circ}C$ ve $26.2^{\circ}C$ olarak ölçtü. Bu değerle (10.28) ifadesine başvurarak:

$$T(0) = 32.4^{\circ} = 10 + c_1 e^{k(0)} \rightarrow c_1 = 22.4$$

$$T(60) = 26.2^\circ = 10 + 22.4e^{60k} \rightarrow k = -5.4x10^{-3}$$

bulunur. Kurbanın öldürüldüğü andaki vücut sıcaklığı $37^\circ C$ idi. Bu bilgi ve sabitlerin değerlerini denklemde kullanarak :

$$37 = 10 + 22.4e^{-5.4x10^{-3}t} \rightarrow t = -34.58sn$$

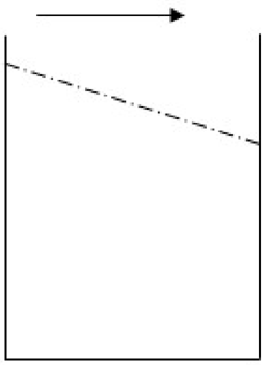
bulunur. $t = 0$ anı saat 10 olarak alınmıştı. O halde kurbanın öldüğü saat,

$$10 - (34.58/60) = 9.42$$

dir.

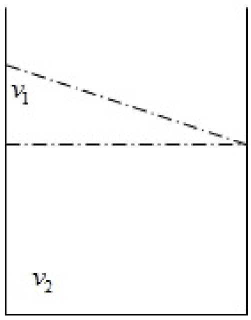
Örnek.

Akışkanlar mekaniğinde yüzey şekli



Şekil 10.6. Akışkanlar mekaniği

a ivmesi ile sağa doğru hareket eden bir tanktaki su değişmez bir şekil aldıktan sonra yüzeyin şekli ne olur?



$$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta P}{\delta x} + f_x = a_x$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta P}{\delta x} + f_y = a_y$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta P}{\delta x} + f_z = a_z$$

$a_x = a \qquad a_y = 0 \qquad a_z = 0$

$f_x = 0 \qquad f_y = -g \qquad f_z = 0$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta P}{\delta x} = a \Rightarrow P = -agx + M(y,z,t)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta P}{\delta x} - g = 0 \Rightarrow M = -g\rho y + N(z,t)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta P}{\delta x} = 0 \Rightarrow N = F(t)$$

$P = F(t) - agx - g\rho y$

$x = x' + x_0(t)$
$y = y'$
$z = z'$

$$P = F(t) - ag(x' + x_a) - g\rho y'$$

P basıncı $x' = 0, y' = 0, z' = 0$ noktalarında P_0 eşittir.

$$P_0 = F(t) - agx_0$$

$$P = P_0 - agx' - g\rho y'$$

Yüzey üzerinde her noktada $P = P_0$ ise:

$$P_0 = P_0 - agx' - g\rho y'$$

$$x' = -\frac{g}{a}y'$$

olur.

BU CİLDİN HAZIRLANMASINDA YARARLANILAN ESERLER

AKSOY, Yavuz, "Diferansiyel Denklemler", Cilt 1, Yıldız Üniversitesi Yayını, Yayın No. : 839, 5.Baskı, İstanbul, 2011

AYRES, Frank, "Differantial Equations", Schaum Publishing Co, New York, 1952

ÇAĞAL, Behiç, "Sayısal Analiz", Yıldız Üniversitesi Yayını, İstanbul, 1989

KARAGÖZ, İ. , "Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları", İstanbul, 2001

LOMEN, D. , LOVELOCK, D. , "Differential Equations : Grafics, Models", Data John Wiley & Sons, İnc. , 1996

MOCAN, Raşit, "Diferensiyel Denklemler ve Diferensiyel Denklem Sistemleri" , Yıldız Üniversitesi Yayını, No. : 137, İstanbul, 1977

ROSS, Shepley L. "Differential Equations" (3.edition), John Wiley & Sons, İnc. , 1984

SPİEGEL, M. "Diferansiyel Denklemler, Uygulamaları ve Çözüm Tekniği", Çeviri : S.Pekol, A.Demirseren, Çağlayan Kitabevi, İstanbul, 1975

TUNCER, Talât, "Alıştırmalarla Diferansiyel Denklemler", Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, 1969

ADLAR – DEYİMLER – SÖZCÜKLER DİZİNİ